





Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Carl Ohrtmann.

Vierzehnter Band.

Jahrgang 1882.

Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1885.

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

Abh. z. Gesch. d. Math.: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Leipzig. Teubner. IV.

Act. Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. I-III.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée, publié par J. Ch. d'Almeida. Paris. 8°.

Am. Ass.: Proceedings of the American Association for the advancement of sciences.

Am. J. Sc.: American Journal of sciences and arts.

Amst. Jaarb.: Jaarboek van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst. Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst. Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. XVII.

Anal.: The Analyst, a monthly journal of pure and applied mathematics. Edited and published by J. E. Hendricks. Des Moines, Jowa. gr. 8°. IX.

Andresen Tekn. Foren. Tidsskr.: Den tekniske Forenings Tidsskrift udgivet af A. Andresen. Kopenhagen.

Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Dumas etc. Paris. Masson. 8°. XXXIII. XXXIV.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'instruction publique par M. Le Pasteur. Paris. Gauthier-Villars. 4°. (2) XI.

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4°. 2446-2453.

Astr. Viertschr.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, A. Winnecke in Strassburg i. E. Leipzig. W. Engelmann. 8°.

A*

Bair. Bl.: Blätter für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen, redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8°. XVII, XVIII.

Batt. G.: Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°. XX.

Belg. Ann.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Ann : Annales de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) III, IV, V.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°. XLIV, XLV.

Belg. Mém. S. E.: Mémoire in 4° des Savants Étrangers de l'Académie de Belgique. XLIV.

Belg. M. N.: Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Monatsber.: Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1882.

Bibl. un.: Bibliothèque universelle et revue suisse. Archives des sciences physiques et naturelles. Lausanne. Bridel.

Bologna Mem.: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°.

Bologna Rend.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna Bologna.

Bonc. Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°. XIV, XV.

Bord. Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. (5) V.

Brioschi Ann.: Annali di matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tortolini. Milano. 4°. (2) X.

Brit. Ass. Rep.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°. 1882.

Brux. Ann.: Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publieés aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Brux. S. sc.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.). VI, VII.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. IV.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge. XIII.

Carl Rep.: Repertorium für Experimental-Physik, herausgegeben von Ph. Carl. München. gr. 8°.

Cas : Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch) XI.

Centr. f. Forstw.: Centralblatt für das gesammte Forstwesen.

Chark. Ges.: Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Charkow.

Christiania Forh.: Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 8⁰. XXI, XXII.

Christ. G. d. W.: Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania. Christiania.

Civiling.: Der Civilingenieur. Herausgegeben von K. H. Bornemann.

Conn. d. temps: Connaissance des temps ou des mouvements célestes. Paris. Gauthier-Villars. 8⁰.

Conn. Trans.: Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. New-Haven.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4⁰. XCIV, XCV.

Cron. cient.: Cronica cientifica revista international de ciencias, fundador proprietario y director D. Rafael Roig y Torres. Barcelona. 8⁰.

D. Versz.: Deutsche Versicherungszeitung.

Darb. Bull.: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Hoüel avec la collaboration des MM. André, Lespiault, Painvin et Radau, sous la direction de la Commission des Hautes Études. Paris. Gauthier-Villars. 8⁰. (2) VI.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXVIII.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8⁰. XXXII, XXXIII, XXXIV.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4⁰. XXX.

Ed. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8⁰. C. F. Hodgson and Son. XXXVI, XXXVII.

Electrot. Z.: Elektrotechnische Zeitschrift. Herausgegeben vom elektrotechnischen Verein. Berlin. 4⁰. III.

Erlang. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8⁰.

Franc. Ass: Association Française pour l'avancement des sciences naturelles. 1880.

Gen. Mém.: Mémoire de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Genève. 4⁰. Librairie H. Georg. XXVIII.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4⁰. XXIX.

Gött. N.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 12⁰. 1882.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8⁰. 1882.

Helsingf. Afh.: Akademiens Afhandlingar Helsingfors.

Herm.: Hermathena, a series of papers on literature, science and philosophy, by members of Trinity College. Dublin. Ponsonby. 8⁰. 1882.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8⁰. XIII.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8⁰. LXVII, LXVIII, LXIX.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4°.

J. Hopkins circ.: Johns Hopkins University Circulars. 1882. (Bd. II.)

Jordan, Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungskunde, herausgegeben von W. Jordan.

Kazan Ber.: Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kazan. 1881-1882.

Kazan Ges.: Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kazan.

Kazan Nachr.: Nachr. der Kaiserlichen Universität zu Kazan.

Kjob. Skrift.: Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen. (6) I.

Klein Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. v. d. Mühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XIX, XX.

Königsb. Schr.: Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Königsberg i. Pr. 4°.

Kopenh. Overs.: Oversigt over Videnskabs Selskabet Forhandlingar. Kopenhagen.

Krak. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Krakauer Akademie. Krakau. (Polnisch.)

Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.)

Kronecker J.: Journal für reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass mit tätiger Beförderung hoher Königl. Preussischer Behörden. Fortsetzung des von A. L. Crelle (1826-1856) und C. W. Borchardt (1856-1880) herausgegebenen Journals. Berlin. G. Reimer. 4°. XCII, XCIII, XCIV.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Lie Arch.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8°. VII.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. Liège. (2) X.

Lisb. J.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturales publicados sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lisb. Mem.: Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XIV, XV.

Lond. M. S., Proc.: Proceedings of the London mathematical Society. London. 8°. XIII.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXI, CLXXII, CLXXIII.

Lond. R. S., Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8° XXXIII.

Lund Act.: Acta universitatis Lundensis. Lund.

Lund Afh.: Lunds Akademiens Afhandlingar. Lund.

Lund Årsskr.: Lunds Universitets Årsskrift. Lund. XVIII.

Manch. Proc.: Proceedings of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Marb. Ber.: Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. Marburg. 8°. 1882.

Math.: Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissement d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Host. Paris. Gauthier-Villars. 8°. I, II.

Mem. R. Astr. S.: Memoirs of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

Mess.: The Messenger of mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8°. (2) XI, XII.

Modena Mem.: Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena. XX.

Monthl. Not.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

Mosk. Nachr.: Nachrichten der Moskauer Universität Moskau (Russisch).

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bairischen Gesellschaft der Wissenschaften zu München. Zweite Classe. München. 1882.

Münch Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. 1881,

Nap. Rend.: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli. 4°. XXI.

Néerl. Arch.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. La Haye. 8°. XVII.

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam. 8°. VIII, IX.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°. (3) I.

Observatory: The Observatory, a monthly review of astronomy. Edited by W. N. M. Christie. M. A. London.

Odessa Nachr.: Nachrichten von der Universität Odessa. Odessa.

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova.

Par. Denkschr.: Denkschriften der Pariser Gesellschaft der exacten Wissenschaften. Paris. 4°. (Polnisch).

Paris Mém. prés.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris.

Paris Soc. Phil.: Bulletin de la Société Philomatique de Paris. Paris. 8°.

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Petersburg. (Russisch). X.

Pétersb. Bull.: Bulletin de l'Académie impériale de St. Pétersbourg. Pétersbourg et Leipzig. Folio. XXVII.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Brewster, Kane, Francis. London. 8°.

Phys. Ges. St. Pét.: Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St.-Petersburg.

Prag. Abh: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°. (6) XI.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1881.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied mathematics Edited by Sylvester and Ferrers. London. 8". XVIII, XIX.

Résal J.: Journal de mathématiques pures et appliquées fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié par H. Résal avec la collaboration de plusieurs savants. Paris. 4°. (3) VIII.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15. de chaque mois. Paris.

Rev. d. qu sc.: Revue des questions scientifiques. XI, XII.

Revue de l'instr. p.: Revue de l'instruction publique de Belgique. Gand. 8°. XXV.

Riv. Mat. el.: Rivista di matematica elementare. (2) XV.

Rom. Acc. L.: Atti della Accademia Reale dei Lincei. Roma. 4°. (3) VI.

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Accademia Reale dei Lincei. Roma. gr. 4°. XIV.

Rom Acc. P. d. N. L: Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. XXXIII, XXXIV.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°. XXVII.

Hl. A.: Historisch-literarische Abteilung (besonders paginirt).

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. IX, X.

Stockh. Handl.: Handlingar af Kongl Svenska Vatenskabs Akademiens. Stockholm. VI, XVIII.

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskabs Akademiens Forhandlingar. Stockholm. XXXVII.

Sylv. Am. J.: American Journal of mathematics pure and applied. Editor in chief: J. J. Sylvester; Associate Editor in charge: W. E. Story. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. Murphy. 4°. IV, V.

Teixeira J.: Jornal di Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pel Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. IV.

Torino Ann.: Annuario dell' Accademia Reale di scienze e di lettere di Torino. Torino.

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. XVII.

Torino Mem.: Memorie dell' Accademia Reale delle scienze di Torino. Torino.

Toul. Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Toulouse. Dulagrave. 8°. (8) IV.

Upsala Afh.: Akademiens Afhandlingar. Upsala.

Ups. Arsskr.: Upsala Universitets Årsskrift. Upsala. 8°.

Ups. N. Act.: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala. 4°.

Ven. At., Atti: Atti dell' Ateneo Veneto. Venezia. Cecchini. 8°.

Ven. Ist., Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (5) VII, VIII.

Ven. Ist., Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia.

Verhandl. d. naturh. Vereins für Rheinland und Westphalen. XXXIX.

Warsch. J.: Jahrbuch der Arbeiten Warschauer Studenten. Warschau. 1881.

Wash. Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington.

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. (2) XV, XVI, XVII.

Wien. Anz.: Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien. 8°. 1882.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. LXXXV, LXXXVI, LXXXVII.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien. 4°. XLV, XLVI.

Wochenschr. f. Astr.: Wochenschrift für Astronomie. Halle a. S. H. W. Schmidt.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXIV, XXV, XXVI, XXVII.

Woolwich, Art. Inst. Proc.: Proceedings of the Royal Artillery Institution. Woolwich. 8°. XI, XII.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Ziebarth. Berlin. 4°.

Zeuthen T.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. Kopenhagen. 8°. (4) VI.

Z. Realsch.: Zeitschrift für das Realschulwesen. VII.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

Seite

Th. von Oppolzer. Ueber eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsternis . . . 1
A. Riecke. Pythagoras . . . 2
P. Tannery. Système astronomique d'Eudoxe . . . 2
P. Tannery. Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules 3
H. G. Zeuthen. Fra Mathematikens Historie, II—III . . . 4
P. Tannery. Aristarque de Samos . . . 4
P. Tannery. Critique ancienne d'une démonstration d'Archimède . 6
P. Tannery. Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus . . . 7
B. Sepp. Zu Posidonius Rhodius . . . 7
Winterberg. Der Tractat Franco's von Lüttich: „De quadratura circuli" . . . 8
E. Narducci. Due trattati inediti d'Abaco . . . 8
M. Steinschneider. Sur les tables astronomiques attribuées à Pierre III. d'Aragon . . . 9
H. Suter. Unbekannte Schrift des Nic. Oresme . . . 9
J. P. Gram. Le triparty de Nicolas Chuquet . . . 9
O. Z. Bianco. G. F. Peverone . . . 10
J. Perott. Une arithmétique espagnole du 16me siècle . . . 10
E. Wiedemann. Sulla storia delle scienze naturali presso gli Arabi 11
A. Lindhagen. N. Coppernici de hypothesibus motuum coelestium 11
S. Günther. Peter und Philipp Apian . . . 12
A. Favaro. Vita ed opere di B. Sovero . . . 12
Ch. Henry. Anciens traités français d'algorisme et de géométrie . 14
Mouchez. Discours . . . 14
P. Fermat. Manuscripts inédits . . . 14
A. Favaro. Sul carteggio Galileiano . . . 15
A. Favaro. Episodio non ancora chiarito del processo di Galilei . 15
A. Favaro. Nuova edizione delle opere di Galilei . . . 15
G. Campori. Carteggio Gallileiano . . . 15

Seite

A. Genocchi. Presentazione di un volume: „Correspondance inédite de Lagrange et D'Alembert" 18
S. Günther. Il carteggio tra Gauss e S. Germain 18
David. Sur les oeuvres de Cauchy 18
J. Steiner. Gesammelte Werke 18
Faye, Laboulaye. Discours 19
D. Bauer. Gedächtnisrede auf Otto Hesse 19
†L. Tetmajer. Ueber Culmann's bleibende Leistung 20
A. Favaro. Della vita e degli scritti di Culman 20
D. Turazza. Commemorazione di G. Bellavitis 20
D. Bierens de Haan. Bibliographie Néerlandaise 20
P. Riccardi. Nota statistica di storia matematica 20

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

P. de Lagarde. Woher stammt das x der Mathematiker? 21
S. Günther. Sur la dépendance entre certaines méthodes d'extraction de la racine carrée et l'algorithme des fractions continues 21
S. Günther. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten 21
F. Schlepps. Die Logarithmen 22
Kiessling Entwickelung des Imaginären in der Analysis 23
F. Hultsch Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate 23
O. Stolz. Zur Geometrie der Alten 23
E. Mahler. Beitrag zur Geschichte der Mathematik 23
M. Baker. Alhazen's problem 24
E. Gelcich. Ueber die Entdeckung der analytischen Geometrie . . 24
V. Liguine. Liste des travaux sur les ovales de Descartes . . . 25
F. Rosenberger. Geschichte der Physik 25
K. Lasswitz. Die Lehre von den Elementen 25
Järisch. Die beiden Theorien der Elasticität 26
P. Kramer. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes . . . 26
Ph. Gilbert. Les preuves mécaniques de la rotation de la terre . 26
B. Zuckermann. Zur altjüdischen Zeitrechnung 27

Capitel 2. Philosophie (Methodik, Pädagogik).

A. Philosophie.

W. Simerka. Die Kraft der Ueberzeugung 28
B. J. Gilman On propositions and syllogisms 28
C. S. Peirce. Remarks 28
B. J. Gilman. On propositions called „spurious" 29
A. Macfarlane. An analysis of relationship 29
Y. Villarceau. Essai philosophique sur „Sciene de l'ordre" . . . 29
B. N. Judson. Zero and Infinity 29
De V. Wood. Limits 29
S. Newcomb. On the doctrine of limits 29
†A. F. Igurbide. Investigaciones filosofico-matematicas sobre las contidades imaginarias 30
S. A. Sexe. Skul de des ikke lade sig finde 30
O. Simony. Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze . . 30
A. Ledieu. Du cycle du raisonnement 31
A. Ledieu. Sur la théorie générale des unités 31
Gilles. Die Einheit der Naturkräfte 31
D. Pirmez. De l'unité des forces de gravitation et d'inertie . . . 32

Seite
P. Mansion. Examen critique 32
Van Tricht. Examen critique 32
E. Rethwisch. Der Irrtum der Gravitationshypothese 33
A. Keindorff. Kritik der Kepler'schen Gesetze 34
R. Bresch. Der Chemismus, Magnetismus und Diamagnetismus im Lichte mehr-dimensionaler Raumanschauung 34
C. Krebs. Hvorvidt ere Axiomerne Erfaringssätninger 35
A. Meyer. I hvad mon äro axiomerna erfarenhetssatzer 35

B. Methodik, Pädagogik.

A. Schmitz. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien . 35
Eckl. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien 35
A. Weilenmann. Der geometrische Unterricht in Mittelschulen . . 36
J. Hoüel. Sur l'enseignement de la trigonométrie 37
Y. Villarceau. De la nécessité d'introduire certaines modifications dans l'enseignement de la mécanique 37

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

H. Berwald. Eqvationslära i sammandrag jemte exempelsamling . 38
L. Kronecker. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen 38
L. Kronecker. Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in ihre irreductibeln Factoren 44
L. Kronecker. Zur Theorie der Formen höherer Stufen 44
L. Kronecker. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen 45
F. J. Studnička. Analytischer Beweis eines Lehrsatzes von Bolzano 45
M. Mandl. Jede Gleichung des n^{ten} Grades hat genau n Wurzeln . 46
J. Hammond. Proof that an equation must have at least n roots . 46
L. Kronecker. Die Composition Abel'scher Gleichungen 46
L. Kronecker. Die cubischen Abel'schen Gleichungen des Bereiches $(\sqrt{-31})$ 46
L. Kronecker. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen 48
B. Igel. Ueber eine Klasse von Abel'schen Gleichungen 50
M. Weiss. Ueber einige Abel'sche Gleichungen vom sechsten Grade 50
V. Janni. Sul teorema di Sturm 50
G. J. Legebeke. Eene eigenschap van de de wortels eener afgeleide vergelijking 51
F. J. van den Berg. Over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleide 51
Ch. Hudson. On equal roots of equations 51
Le. P. Berloty. Sur les équations algébriques de la forme $(x^p - a^p)\,\psi(x) = 0$ 52
T. S. E. Dixon. A general algebraic method for the solution of equations 52
A. N. Miassojedoff. Ein Satz über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung 53
L. Gegenbauer. Ueber algebraische Gleichungen, die eine bestimmte Anzahl complexer Wurzeln besitzen 53
Laguerre. Sur la distribution, dans le plan, des racines d'une équation algébrique 54

Seite
A. Siebel. Untersuchungen über algebraische Gleichungen 55
J. P. Mott. On the solution of equations 55
K. V. Zenger. Auflösungen numerischer Gleichungen mit Hülfe von Logarithmen 55
M. K. Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades 55
A. Pánek. Bemerkung zur Auflösung einer Gleichung 55
Th. Sinram. Zur Gleichung dritten Grades 56
W. Ligowski. Zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades . . 56
R Hoppe. Reduction einer biquadratischen Gleichung auf eine kubische 56
Perrin. Nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré 56
S. R. Minich. Sulle equazioni di quinto grado 57
Th. Sinram. Zur Lösung von Gleichungen höheren Grades 57
Laguerre. Quelques équations transcendantes 57
Laguerre. Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière 57
Laguerre. Sur les fonctions du genre zéro et du genre un 57
V. Hioux. Racines communes à deux équations algébriques entières 58
Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben über specielle Gleichungen von Moret-Blanc, F. Borletti, H. Lez, S. Réalis, J. J. Sylyester, J. Hammond, G. Heppel, G. Turriff, W. J. C. Sharp, W. J. Constable, J. O'Regan, Matz, W. J. C. Miller, T. Woodcock, E. Rutter 59

Capitel 2. Theorie der Formen.

R. Dedekind. Ueber die Discriminante endlicher Körper 59
A. Brill. Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades 64
W. R W. Roberts. A geometrical representation of a system of two binary cubics 68
A. Cayley. Tables for the binary sextic 69
F. de Bruno. Quelques applications de la théorie des formes binaires aux fonctions elliptiques 69
C. Jordan. Rapport sur un mémoire de M C. Stéphanos 71
J. J. Sylvester. On the completion of a method of obtaining groundforms 72
J. J. Sylvester. On subinvariants 72
G. Peano. Sui sistemi di forme binarie di egual grado 74
G Peano. Un teorema sulle forme multiple 75
C. Le Paige. Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables 77
C. Le Paige. Sur les formes quadratiques à deux séries de variables 77
C. Le Paige. Sur la forme quadrilinéaire 77
E. Picard. Sur certaines formes quadratiques ternaires 79
E. Picard. Sur certaines formes quadratiques 79
P. Gordan. Ueber Büschel von Kegelschnitten 80
P. Gordan. Ueber eine ternäre biquadratische Form 80
P. Gordan. Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen 80
G. Battaglini. Sulle forme quaternarie bilineari 83
A. Capelli. Sul numero dei covarianti di grado dato per forme di qualsivoglia specie 84
G. Battaglini e F. Casorati. Relazione sull'una memoria di A. Capelli 86

Seite

J. J. Walker, T. R. Terry, Ch. Ladd, J. L. Kitchin, J. O'Regan, J. L. Mc. Kenzie, S. Marcks, E. W. Symons, G. Turriff, A. Cohen, E. Rutter, A. Cayley, W. J. C. Sharp, A. Mc. Murchy, T. Muir. Lösung von Aufgaben 87
C. Le Paige. Ueber die $2k$-elementige centrale Gruppe einer Involution k^{ter} Stufe und $(2k+1)^{ten}$ Grades 87
A. Cayley. On the 8-square imaginaries 87
J. J. Sylvester. A word on nonions 88
†C. S. Peirce. On a class of multiple algebras 89

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Ch. Biehler. Sur l'élimination 89
E. Netto. Substitutionentheorie 90
E. Schröder. Ueber die Substitutionen, die in eine gegebene Zahl von Cyklen zerfallen 96
W. Dyck. Gruppentheoretische Studien 97
F. Brioschi. Sur les fonctions de sept lettres 98
J. J. Sylvester. Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires 99
P. Mansion. Introduction à la théorie des déterminants 99
H. Kaiser. Die Anfangsgründe der Determinanten 99
E. Bardey. Zur Lehre von den Determinanten 100
J. Diekmann. Determinanten in der Schule 100
Gerlach. Determinanten in der Schule 100
†Th. Muir. A treatise on the theory of determinants 100
L. Klug. Entwickelung des Euler'schen Algorithmus 100
G. A. van Veltzer. On the transformation of determinants of equal value 101
Th. Muir. The law of extensible minors in determinants 101
Th. Muir. Transformations connecting general determinants with continuants 102
Chrystal. Note on Mr. Muir's transformation of a determinant into a continuant 102
Chrystal. On a special class of Sturmians 102
Th. Muir. On circulants of odd order 102
G. Torelli. Sui determinanti circolanti 103
J. J. Sylvester. On the properties of a split matrix 103
F. Caspary. Ueber die Umformung gewisser Determinanten 104
O. H. Mitchell. On determinants of powers 105
E. W. Davis. The maximum value of a certain determinant 105
†A. Puchta. Neuer Satz aus der Theorie der Determinanten . . . 105
W. Řehořovský. Ueber Borchardt's erzeugende Function 105
R. Scott. On some determinants 106
Walecki. Équation en s de degré m 106
A. Legoux. Sur une application d'un déterminant 107
Th. Muir. On a determinant formed by bording the product of two determinants 107
Th. Muir. On a symmetric determinant 108
Th. Muir. On the condensation of skew determinants 108
R. F. Scott. Notes on determinants 109
V. E. Serdobinsky. Zur Determinantentheorie 109
A. Sachse. Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten 110
N. Jadanza. Sopra un determinante gobbo 110

Seite
R. F. Scott. Some forms of cubic determinants 110
L. Kronecker. Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme . . 111
C. Runge. Die linearen Relationen zwischen den verschiedenen Subdeterminanten symmetrischer Systeme 112
C. Kostka. Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen 112
L. Crocchi. Sopra la corrispondenza tra i coefficienti di un' equazione algebrica e le funzioni simmetrische complete 113
J. Hammond. Calculation of symmetric functions 113
W. Řehořovský. Tafeln der symmetrischen Functionen der Wurzeln 114
W. P. Durfee. On symmetric functions 114
F. Franklin. On Crocchi's Theorem 114
J. J. Sylvester. On Crocchi's Theorem 114

Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

P. G. Lejeune-Dirichlet. Lezioni sulla teoria dei numeri . . . 115
E. Césaro. Formule d'arithmétique 115
L. Kronecker. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen 115
V. Bouniakowsky. Sur les propriétés d'une classe particulière de fractions décimales périodiques 116
K. Broda. Bildungs-Gesetz periodischer Brüche in bestimmten Zahlensystemen 116
G. S. Ely. Note on partitions 116
O. H. Mitchell. Note on partitions 117
J. J. Sylvester. On a question in partitions 117
†J. J. Sylvester. On a geometrical treatment of a theorem in numbers 117
Ed. Weyr. Perott's Beweis, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist 117
W. W. Johnson. Mr. Glaisher's enumeration of primes for the first nine millions 118
L. Oppermann. Om vor Kundskab om Primtallenes Mongde mellem givne Grändser 118
F. Studnička. Ueber Primzahlen 118
E. de Jonquières Formules pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné 118
R. Lipschitz. Sur une communication de M. de Jonquières . . . 119
E Lemoine. Décomposition d'un nombre premier N en ses puissances $n^{ièmes}$ maxima 119
J. Petersen. Om Primtal 119
Ed. Weyr. Ueber einen zahlentheoretischen Satz 120
A. P. Minin. Ueber Eigenschaften der Zahlen 120
D. André. Sur la divisibilité d'un certain quotient par les puissances d'une certaine factorielle 121
A. Cayley. A proof of Wilson's theorem 121
E. Catalan. Extrait d'une lettre 121
O. Schier. Potenzsummen rationaler Zahlen 121
K. Schwering. Ueber die fünften Potenzreste und die aus fünften Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen 122
N. V. Bugaeff. Einige Eigenschaften der Reste und der Zahlsummen 122
T. J. Stieltjes. Over het quadratische rest-karakter van het getal 2 122

Seite
L. Matthiessen. Eine antike Auflösung des sogenannten Restproblems . . . 122
Gerlach. Das Restproblem . . . 122
Pellet. Sur les résidus cubiques et biquadratiques . . . 123
T. J. Stieltjes. Bijdrage tot de theorie der derde-en vierde-machts resten . . . 123
F. Hofmann. Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste . . . 124
B. Stankewitsch. Zur Theorie der Congruenzen mit einer Veränderlichen . . . 124
N. V. Bugaeff. Die Lösung der Congruenzen 2ten Grades . . . 126
A. Migotti. Zur Theorie der Kreisteilung . . . 127
Schwering. Zur Theorie der algebraischen Functionen, welche von Jacobi $\psi(\alpha)$ genannt werden . . . 128
S. J. Baskakoff. Ueber eine Methode, Zahlidentitäten zu finden . 128
A. Berger. Applications de la fonction Γ à la théorie des nombres 128
David. Applications de la dérivation d'Arbogast . . . 129
Ch. Méray. Solution du problème général de l'analyse indéterminée 130
Moret-Blanc. Démonstration des propositions de M. Lionnet . . 130
W. Durfee. Some properties of the numerical solutions of $ax^2-y^2=-1$ . . . 131
F. Villicus. Ganzzahlige Verhätnisgruppen in der Alligationsrechnung . . . 131
J. Hermes. Gleichungen ersten und zweiten Grades schematisch aufgelöst in ganzen Zahlen . . . 131
Th. Pepin. Formation d'un carré en ajoutant un cube à un nombre donné 132
S. Günther. Specialfall der Pell'schen Gleichung . . . 132
S. Realis. Solution d'une question . . . 133
Th. Pepin. Nouveaux théorèmes sur une équation indéterminée . . 133
A. M. Korkine. Ueber die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n+y^n+z^n=0$ durch ganze Functionen zu genügen . . . 134
A. Cayley. On the standart solutions of a system of linear equations 134
H. Scheffler. Allgemeine Lösung eines aus dem Altertume stammenden Problemes Die magischen Figuren . . . 134
Th. Harmuth. Polydimensionale Zahlenfiguren . . . 138
Lehrsätze und Aufgaben aus der Zahlentheorie von Moret-Blanc, Lionnet, S. Marks, Th. Muir, H. L. Orchard, E. Rutter, G. Heppel, G. Eastwood, Morth, G. F. Walker, K. Gale, W. A. Whitworth, Sylvester, W. J. C. Sharp, C. Bickerdike, W. B. Grovo, B. Easton, E. Buck, W. W. Taylor . . . 138

Capitel 2. Theorie der Formen.

Poincaré. Sur une extension de la notion arithmétique de genre . 139
G. Battaglini e F. Brioschi. Relazione sulla memoria du Prof. R. de Paolis . . . 140
Hermes. Ein Algorithmus zur Behandlung quadratischer Formen . 140
H. Weber. Beweis eines Satzes . . . 141
Th. Pepin. Sur la classification des formes quadratiques binaires . 142
A. Berger. Sur une application des nombres des classes des formes quadratiques binaires pour un déterminant négatif . . . 143
G. L. Charve. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives . . . 145
E. W. Symons, J. O'Regan, R. Tucker, A. Martin. Solutions of a question . . . 146

Seite

Capitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

G. B. Marsano. Sul numero delle combinazioni a tre a tre dei successsivi intieri 1, 2, 3,... B 147
J. Bourget. Sur les permutations de n objets 147
J. Bourget. Sur un problème de permutations successives nommé battement de Monge 148
Sanat. Ueber Permutationen der Zahlen des dekadischen Systems 149
G. Heppel. Solution of two questions 149
C. F. Malmsten. Generaliserung af det s. k. „Femtonspelet“ (Boss puzzle) 150
H. M. Taylor und R. C. Rowe. On a geometrical theorem 150
Laisant. Sur la théorie des régions et des aspects 151
Perrin. Sur le problème des aspects 152
G. Hagen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung 153
J. Bertrand. Sur la théorie des épreuves répétées 155
Em. Barbier. Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face . . 156
†Weitere Lösungen von Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeit von Seitz, Matz, B. Easton, D. McAlister, McFarlane, S. Tebay, Ch. Ladd, W. A. Whitworth, J. O'Regan, W. H. Blythe, G. Heppel, E. Blackwood, K. Gale 156
A. Vogler. Grundzüge der Ausgleichungsrechnung 157
P. van Geer. Over het gebruik van determinanten by de methode der kleinste kwadraten 157
Th. Wittstein. Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate . . 157. 158
G. A. Maggi. Intorno ad alcune formole relative al calcolo degli errori d'osservazione 159
P. Harzer. Ueber die Wahrscheinlichkeit einen Cometen aufzufinden 159
T. W. Whrigt. On the computation of probable errors 160
E. L. de Forest. On an unsymmetrical probability curve 160
E. L. de Forest. Law of error in the position of a point in space 160
†Lösungen von Aufgaben über mittlere Werte von W. J. C. Sharp, J. L. Kitchin, C. Morgan, B. Easton, H. G. Day, S. Tebay, T. R. Terry, K. Gale, Seitz, D. Edwardes, Matz 161
W. Maximowitsch. Interpolation der impliciten Functionen . . . 161
R. S. Woodward. On the actual and probable values of interpolaled values 161
C. P. J. v. d. Berg. The theory of wages 162
A. Morgenbesser. Die mathematischen Grundlagen des gesammten Versicherungswesens 163
W. Sutton. Institute of actuaries. Textbook of the principles of interest 164
G. King. The theory of finance 164
G. F. Hardy. Method of approximating to the value of annuities . 165
M. N. Adler. Method of solving approximately questions in compound interest 166
G. F. Hardy. On the rate of interest in annuities certain 167
D. J. McG. McKenzie. Transformation of annuities and annuity values 168
C. J. Malmstén. Zur Theorie der Leibrenten 169

Seite

J. J. Sylvester, F. Franklin. On a logical problem connected with assecurances on joint lives 169
L. M. Meech. System and tables of life insurance 169
Wolf. Zur Invalidenfrage 172
W. Küttner. Die Activitätswahrscheinlichkeit 172
A. Amthor. Arten der Aussteuerversicherung 173
D. McAlister. On probability ad listerism 176
McFarlane. On probability and listerism 176
E. Césaro. Une question de probabilité 178
F. J. v. d. Berg. Over een meetkundig vraagstuk van kansberekening 178
A. Pánek. Geometrische Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung 179
Cavallin, D. Edwardes. Solutions of a question 179
†Lösungen von Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten von Matz, T. R. Terry, Mc. Farlane, G. F. Walker, H. Mc. Coll, L. Tanner, W. J. C. Miller, D. Edwardes, B. Easton, J. Hammond, Seitz, Ch. Ladd, Nash 179

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

O. Hölder. Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze . . . 180
T. J. Stieltjes jr. Over eenige theorema's omtrent oneindige reeksen 181
R. Mildner. Ableitung neuer unendlicher Reihen 182
J. Marchand. Développement d'une fonction en série 183
J. S. Hayes. Demonstration of Maclaurin's theorem 184
J. M. Rodrigues. Sobre a formula de Lagrange 184
T. J. Stieltjes jr. Over Lagrange's interpolatie-formule 185
H. Poincaré. Sur les séries trigonométriques 185
W. Veltmann. Die Fourier'sche Reihe 185
A. Harnack. Théorie de la série de Fourier 187
G. Halphén. Sur la série de Fourier 187
A. Harnack. Berichtigung 189
F. Lindemann. Das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen 189
M. David. Application de la dérivation d'Arbogast 189

Capitel 2. Besondere Reihen.

†O. Schier. Potenzsummen rationaler Zahlen 190
A. Zdrahal. Eigenschaft der Binomialcoefficienten 190
J. C. O'Neil de Medeiros. Sobre um problema de algebra elementar 190
H. J. Krantz. Solution d'une question 190
R. Rawson, R. Knowles. Solutions of a question 191
V. Jamet. Développement de arctang x en série convergente . . . 191
T. J. Stieltjes jr. Over een algorithmus 191
A. Sachse. Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten 191
M. A. Stern. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen 191
A. Berger. Elementära bevis för några formler i differenzkalkylen 192
G. F. Walker. On a certain inequality and a limit 192
J. Thomae. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe 193
G. Heppel, T. R. Terry. Solutions of a question 193
M. d'Ocagne. Sommation d'une série remarquable 194

Seite
E. Catalan. Sur un article des Nouvelles Annales 194
M. d'Ocagne. Développement des logarithmes et des exponentielles 195
McFarlane. Solution of a question 195
J. Cohn. Beweis einer Entwickelung einer Function der Länge und der Lage einer geraden Linie 196
Tanner, R. Harley. Solutions of a question 196
†W. J. C. Sharp, A. Mc. Murchy, A. Cohen, K. Gale, T. R. Terry, S. Marcks. Lösungen von Aufgaben über specielle Reihen 196

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

O. Schlömilch. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis 197
M. Pasch. Einleitung in die Differential- und Integralrechnung . . 197
C. Jordan. Cours d'analyse de l'École Polytechnique 200
P. Mansion. Cours d'analyse infinitésimal de l'École du génie civil 200
H. A. Lorentz. Leerboek der differentiaal- en integraalrekening . 201

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

T. J. Stieltjes jr. Eenige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke 202
W. W. Johnson. On certain symbolic relations 202
D. L. P. da Silva. Derivadas de ordem qualquer de y em ordem a x 203
G. Darboux. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables 203
M. Falk. Om derivator och differentialen af en funktion 204
P. Mansion. Méthode dite de Fermat pour la recherche des maxima et des minima 205
W. Walton. Method of finding maxima and minima of a function . 205
W. Walton. Determination of the maxima and minima of a function 205
A. Grünwald. Entwickelung der begrenzten Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index 206
A. V. Letnikoff. Untersuchungen über trigonometrische Functionen 206
A. Buchheim. Some applications of symbolic methods 207
M. S. Meyer, Matz. Solutions of a question 207
E. Busk, Matz. Solutions of a question 207
J. J. Walker. Solution of a question 207

Capitel 3. Integralrechnung.

P. du Bois-Reymond. Integrirbarkeit von Funktionen integrirbarer Funktionen 208
Ed. Weyr. Integration von rationalen Differentialausdrücken . . . 208
W. Kapteyn. Over den vorm van zekere differentiaalen 209
H. B. D. Solution d'une question 210
F. Borletti. Solution d'une question 211
S. Réalis. Quelques intégrales indéfinies 211
P. H. Philbrick. Integration of some general classes of trigonometric functions 211
D. L. P. da Silva. Sobre alguns integraes indefinidos 211
A. Steen. Om Anvendelsen af delvis Integration 212
J. Griffiths, Hadamard. Solutions of a question 212

Seite
R. Hoppe. Zwei reciproke Relationen einer Integralfunction . . . 212
H. Resal. Application d'un théorème de Poncelet au calcul approximatif des arcs de courbes planes 214
G. Pfeiffer. Formeln für den Inhalt der Kegelfläche 214
G. Orlow. Sur une intégrale double 215

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Selivanoff. Les intégrales définies uniformément convergentes . . 215
A. Dawidoff. Formule générale des intégrales définies 216
G. Dillner. Intégrales définies des fonctions d'une variable complexe 217
Laguerre. Quelques équations transcendantes 217
Laguerre. Détermination du genre d'une fonction transcendante entière 217
Laguerre. Sur les fonctions du genre zéro et du genre un 218
W. Gosiewski. Ueber stetige Functionen 218
R. Hoppe. Infinitärer Hauptwert und approximative Entwickelung 219
W. H. L. Russell. On certain definite integrals 220
W. Spottiswoode. Note on the above paper of Mr. Russell's . . 220
J. W. L. Glaisher. Expression for $\arg \operatorname{sn} a$ and $(\arg \operatorname{sn} a)^2$ as definite integrals 220
A. Steen. Om et bestemt Integral som diskontinuert Funktion . . 221
Wolstenholme, C. B. S Cavallin. Solutions of a question . . . 221
T. R. Terry, Matz. Solutions of a question 222
Wolstenholme. Two notes 222
A. Berger. Applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres 223
J. J. Thomson. Note on an integral 223
A. Winckler. Entwickelung einiger Ausdrücke in Reihen 224
J. Tannery. Sur les intégrales eulériennes 225
. Tannery. Rectification 225
A. Berger. En generalisation af några former i Gammafunktionens teorie 226
J. W. L. Glaisher. On certain definite integrals involving the exponential-integral 227
R Lipschitz. Sur une intégrale 228
C. B. S. Cavallin. Ett sätt att härleda och generalisere Legendre's formel $\int_0^{2\pi} p d\omega = L$ 228
J. W. L. Glaisher. Formulae for the rth integral of a Legendrian coefficient 229
A. Buchheim, Evans. Solutions of a question 229
A. J. Davidoff. Allgemeine Formel in der Theorie der bestimmten Integrale 230
P. Mansion. Sur les cubatures approchées 231
P. Mansion Sur les quadratures et les cubatures approchées . . 231
Ch. Frenzel. Die arithmetische Integration der Dämme und Einschnitte 232
H. de Lisleferme. Note d'Analyse géometrique, nebst Rapport von Mansion 232
B. Abdank-Abakanowicz. L'intégration mécanique 232
B. Abdank-Abakanowicz. Un nouvel intégromètre 233
†D. Edwardes, U. J. Kniseley, T. R. Terry, W. H. Blythe, B Easton, Nash, Ch. Ladd. Auswertungen bestimmter Integrale 233

Seite

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

†Nowotny. Die Lösungen der Differentialgleichungen 233
E. West. Exposé des méthodes en mathématiques 233
S. Lie. Gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten 234
L. Königsberger. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen 234
L. Königsberger. Ueber die Irreductibilität von Differentialgleichungen 240
L. Königsberger. Eigenschaften der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen . . . 241
L Fuchs. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen 242
L. Sauvage. Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes . . . 243
F. Casorati. Sulle equazioni differenziali lineari 244
E. Jürgens. Das Integral $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{y\,dz}{x-z}$ 245
J. Boussinesq. Les intégrales asymptotes des équations différentielles 247
F. Hočevar. Zur Integration einer Jacobi'schen Differentialgleichung 248
J. W. L. Glaisher. Examples illustrative of Cayley's theory of singular solutions 249
W. P. Workman. On tac-loci 249
H. M. Perry. On singular solutions 250
W. Heymann. Transformation einer Differentialgleichung 250
W. Heymann. Zur Integration der Differentialgleichungen 251
V. G. Imschenetzky. Erweiterung einer Euler'schen Methode . . 253
H. Poincaré. Sur les fonctions fuchsiennes 255
P. Appell. Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes 257
E. Goursat. Les intégrales algébriques des équations linéaires . . 258
Th. Pepin. Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre 259
E. Picard. Les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires 263
G. Darboux. Proposition relative aux équations linéaires 264
F. Brioschi. Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari 265
D. Besso. Alcune proprietà dell' equazione differenziale lineare non omogenea del second' ordine, nebst Bericht von F. Casorati, E. Beltrami 266
D. Besso. Proprietà dell' equazione differenziale lineare omogenea del second ordine, nebst Bericht von F. Casorati, E. Beltrami 266
D. Besso. Sul prodotto di più soluzioni particolari d'un equazione differenziale lineare omogenea, nebst Bericht von F. Casorati, E. Beltrami 268
D. Besso. Sopra una classe d'equazioni del sesto grado, nebst Bericht von F. Casorati, E. Beltrami 269
E. Beltrami, Razzaboni. Sopra una memoria del prof. D. Besso 270
J. C. Malet. On a class of invariants 270
A. H. Curtis, R. Rawson. Solutions of a question 271
E. Pfannenstiel. Bidrag till de lineära differential-eqvationernas teori 271
R. Rawson. Note on a transformation of Riccati's equation . . . 272
J. W. L. Glaisher. On Riccati's equation 272

Seite
A. E. Steinthal. On the solution of a differential equation . . . 274
A. Steen. Integration af en lineär Differentialligning 275
E. Mathieu. Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss 276
E. Goursat. Les fonctions hypergéométriques de deux variables . 277
G. Darboux. Sur une équation linéaire 278
F. Brioschi. Une application du théorème d'Abel 278
P. J. Hollman. Eenige toepassingen van de theorie der singuliere integralen bij differetiaal-vergelijkingen van de tweede ordre . . 279
S. Spitzer. Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen 280
G. v. Escherich. Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen 281
H. Poincaré. Une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires 282
H. Lemonnier. Conditions pour que deux équations différentielles linéaires aient p solutions communes 283
H. Poincaré. Sur les points singuliers des équations différentielles 284
H. Poincaré. L'intégration des équations différentielles par les séries 285
J. J. Sylvester. A certain integrable class of differential and finite difference equations 285
J. J. Sylvester. Theorie of simultaneous linear differential equations 285

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

B. Riemann. Partielle Differentialgleichungen 287
S. Lie. Untersuchungen über Differentialgleichungen I. II. . . . 287. 288
J. Petersen. Partielle Differentialligninger 289
L. Königsberger. Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen 289
E. Picard. Sur l'intégration, par les fonctions abéliennes de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre . . . 290
E. Picard. Classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes 291
M. Hamburger. Zur Theorie der Integration eines Systems von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen 292
G. Darboux. Sur le problème de Pfaff 294
†H. Lemonnier. Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre 298
G. Teixeira. L'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre 298
J. W. L. Glaisher. On a partial differential equation 299
G. Darboux. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles . . 299
P. Appel. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles 300
J. Boussinesq. Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions 301
J. Boussinesq. Sur l'intégration d'une équation 302
K. M. Peterson. Ueber Integration partieller Differentialgleichungen 303

Capitel 7. Variationsrechnung.

F. Fergola. Sopra una formola dal Sig. G. Erdmann 306
A. Livenzoff. Ueber Maxima und Minima der einfachen bestimmten Integrale 306
J. J. Walker. Solution of a question 307

Seite

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

P. du Bois-Reymond. Die allgemeine Functionentheorie 309
J. Hoüel. Généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique 312
H. Durège. Elemente der Theorie der Functionen 313
C. G. J. Jacobi. Gesammelte Werke. 314
†L. Saltel. Moyen d'étendre la théorie des imaginaires sans faire usage des imaginaires 317
P. Dziwiński. Richtungszahlen 318
P. Cazzaniga. Il calcolo dei simboli d'operazione 318
J. C. Glashan. Forms of Rolle's theorem 318
A. Cayley. Geometrical representation of an equation 319
A. Cayley. On associative imaginaries 319
†G. Plarr. Establishment of the elementary principles of quaternions 319
W. J. Stringham. Determination of finite quaternion groups . . . 320
H. Hankel. Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen 320
G. Cantor. Neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen 321
W. Veltmann. Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function 322
W. Veltmann. Zur Theorie der Punktmengen 322
H. Poincaré. Sur les transcendantes entières 323
P. Cazzaniga. Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti 324
K. Weierstrass. Recherches sur les fonctions $2r$-fois périodiques de r variables 325
G. Mittag-Leffler. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable 325
F. Casorati. Aggiunte a recenti lavori dei sigi. Weierstrass e Mittag-Leffler 327
F. Casorati. Sulle funzioni analitiche 328
S. Pincherle. Teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche 328
Ch. Hermite. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler 329
Hugoniot. Sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions 330
Hugoniot. Sur des fonctions d'une seule variable analogues aux polynômes de Legendre 330
P. Cazzaniga. Sopra una formola di Cauchy 331
P. Appell. Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique . . 332
P. Appell. Relation entre les résidues d'une fonction d'un point analytique 332
P. Appell. Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). 333
P. Appell. Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle 334
P. Appell. Sur lés fonctions uniformes doublement périodiques . . 334
G. Halphén. Sur une série pour développer les fonctions d'une variable 335
E. Picard. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables . . 335

Seite
E. Picard. Fonctions uniformes affectées de coupures 336
E. Goursat. Fonctions uniformes présentant des lacunes 336
O. Hölder. Beweis eines Satzes 337
H. Poincaré. Théorie des groupes fuchsiens 338
H. Poincaré. Sur les groupes kleinéens 344
H. Poincaré. Sur les fonctions fuchsiennes 344
H. Poincaré. Sur les fonctions uniformes, qui se reproduisent par des substitutions linéaires 344
F. Klein. Ueber eindeutige Functionen 345
A. Hurwitz. Ueber eine Reihe neuer Functionen 345
O. Rausenberger. Eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden 345
F. Schottky. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen 345
L. Fuchs. Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben 349
E. Picard. Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes 350
E. Picard. Sur un groupe de substitutions linéaires 350
H. Poincaré. Sur les groupes discontinus 350
R. Dedekind, H. Weber. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen 352
F. Klein. Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale 358
N. Herz. Beweis des Riemann'schen Satzes über algebraische Functionen 360
F. Casorati. Sopra il teorema di Jacobi 361
Ad. Schumann. Ein Beweis für ein Theorem von Liouville . . . 361
L. Gegenbauer. Ueber die doppelt-periodischen Functionen zweiter Art 362
O. Rausenberger. Zur Theorie der Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden 362
O. Rausenberger. Ueber periodische Functionen zweiter Gattung 363
Tchébychef. Ueber die Functionen, die für gewisse Werte der Variabeln wenig von Null abweichen 364
T. J. Stieltjes jr. Over de transformatie van eene periodieke functie 365
G. Ascoli. Una osservazione relativa ad un teorema contenuto in una mia Memoria 365
Laguerre. Sur la distribution dans le plan des racines d'une équation algébrique 366

Capitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

Perott. Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières . . . 366
St. Rychlicki. Beitrag zum Rationalmachen einer Summe von $2q^{\text{ten}}$ Wurzeln 366
Perott. Sur un théorème de Gauss 366
O. Dziobek. Ueber gewisse Functionen von sechs Variabeln . . . 367
G. Halphén. Sur une série d'Abel 367
H. A. Schwarz. Démonstration d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires 367
M. Lerch. Ueber den Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ 368

Seite
J. W. L. Glaisher. Une identité trigonométrique 368
S. Günther. Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie 368
A. Forti. Tafeln der hyperbolischen Functionen . . . . ! 369
F. Lindemann. Ueber die Ludolph'sche Zahl 369
F. Lindemann. Sur le rapport de la circonférence au diamètre . . 369
F. Lindemann. Ueber die Zahl π 369
A. Hurwitz. Eigenschaften der Dirichlet'schen Function
$F(x) = \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$ 371
A. Genocchi. Sur les fonctions de M. Prym et de M. Hermite . . 372
A. Berger. Generalisation af några formler i Gammafunktionens teori 373
E. Goursat. Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables 374
P. Appell. Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables 375

B Elliptische Functionen.

C. Formenti. Reduzione di integrali di funzioni algebriche ad integrali di funzioni razionali 375
G. A. Stuart. Reduction of integrals of a certain form 376
S. Günther. Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques 377
O. Rausenberger. Zur Theorie der elliptischen Functionen I. . . 378
C. Stolp. De elliptische integralen van de eerste soort 379
N. Herz. Beziehungen zwischen den Integralen der elliptischen Functionen 380
J. Thomae. Ueber specielle elliptische Functionen 380
O. Schlömilch. Ueber gewisse elliptische Integrale 381
J. Thomae. Elliptische Integrale zweiter Gattung 381
Hermite. Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce 382
A. Cayley. On a formula relating to the elliptic integral of the third kind 382
E. Goursat. Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce 383
A. Cayley. On Landen's theorem 384
J. Griffiths. Note on Professor Cayley's paper 384
J. Griffiths. Elementary analytical proof of Grave's and MacCullagh's theorems 384
P. A. MacMahon. Sur un résultat de calcul obtenu par M. Allégret 385
P. A MacMahon. Integration of an equation connected with elliptic functions 385
A. G. Greenhill. Note on a paper of Prof. Cayley 386
J. W. L. Glaisher. Proof of the addition equation for elliptic integrals of the second ordre 386
Much. Erklärung 387
O. Stolz. Zur Theorie der elliptischen Funktionen 387
K. Weierstrass. Zur Theorie der elliptischen Functionen 387
G. Frobenius, L. Stickelberger. Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen 388
G. Frobenius. Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art . . 389
Th. Craig. Some elliptic function formulae 390
M. M. U. Wilkinson. Formulae arising from the differentiation of elliptic functions 390
Faà de Bruno. Nouvelle série dans les fonctions elliptiques . . . 391

Seite

J. W. L. Glaisher. Theorem in elliptic functions 392

J. J. Walker. Proof of the addition theorem for elliptic integrals of the second kind 392

E. Novarese. Intorno ad alcune formole di Hermite per l'addizione delle funzioni ellittiche 393

E. Novarese. Intorno alla multiplicazione delle funzioni ellittiche 393

J. W. L. Glaisher. Certain formulae in elliptic functions 394

J. W. L. Glaisher. Method of deriving formulae in elliptic functions 395

M. M. U. Wilkinson. Some elliptic function formulae 395

W. W. Johnson. Systems of formulae for the sn, cn and dn of $u+v+w$ 396

J. W. L. Glaisher. Équations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques 396

M. M U. Wilkinson. On the addition equations for the elliptic and Θ-functions 396

W. W. Johnson. The spherical triangle proof of the addition equation in elliptic functions 396

O. Rausenberger. Zur Theorie der Modulfunctionen 397

W. W. Johnson. On the derivation of elliptic function formulae by transformations to the reciprocal and complementary modulus 397

Pocrovsky. Beziehungen zwischen den Moduln und ihren Complementären bei den Transformationen fünften Grades der elliptischen Functionen 398

E. H. Glaisher. Formulae for sn $8u$, cn $8u$, dn $8u$ in terms of sn u 398

G. S. Ely. The algebraic solution of the modular equation for the septic transformation 399

R. von Lilienthal. Ueber Schaaren sphärischer Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen sind 399

A. R. Forsyth. Porism of the in- and circum-scribed polygon . . 400

E. Fergola. Di alcune equazioni relative alla teoria delle funzioni ellittiche 400

D. Padeletti. Alcuni corollari di un teorema del Prof. Fergola . 401

N. Trudi. Notizie intorno ai corollari del prof. Padeletti 401

A. Cayley. Geometrical interpretation of certain formulae in elliptic functions 402

Ch. Hermite. Applications de la théorie des fonctions elliptiques . 402

C. Hyperelliptische und Abel'sche Functionen.

M. Ungar. Die Reduction Abel'scher Integrale auf Normalintegrale . 403

E. Picard. Réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques 403

†J. Hanel. Reduction hyperelliptischer Functionen auf elliptische . 403

J. C. Malet. On certain definite integrals 403

G. A. Pick. Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen 404

A. Cayley. Reduction of $\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$ to elliptic integrals 405

P. Appell. Sur un cas de réduction des fonctions Θ de deux variables 405

P. Appell. Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables 405

E. Picard. Sur les équations différentielles abéliennes dans le cas de réduction du nombre des périodes 406

A. R. Forsyth. A memoir on the theta-functions 407

Seite

A. R. Forsyth. On Abel's theorems and Abelian functions 408
A. Cayley. Note on Abel's theorems 408
R. C. Rowe. On Abel's theorem 409
A. Cayley. Addition to Mr. Rowe's Memoir 410
A. Cayley. A memoir on the Abelian and Theta-functions 411
P. Appell. Sur les fonctions abéliennes 411
A. R. Forsyth On a theorem of Jacobi 411
R. Rawson. Solutions of questions 411 412
N. Herz. Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale 413
O. Schlömilch. Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale 413
M. Krause. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 414
M. Krause. Multiplicationsgleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 414
M. Krause. Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation fünften Grades 415
K. Weierstrass. Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen . . . 415
Elliott. Propriétées et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ 416
K. A. Posse Ueber die ϑ-Function von zwei Veränderlichen . . 416
J. Thomae. Integrale zweiter Gattung 418
F. Prym. Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie 419
A. Krazer. Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel 419
A. Buchheim. Extension of certain theories relating to plane cubics to curves of any deficiency 428

D. Kugel- und verwandte Functionen.

†K. Henn. Kugelfunctionen 428
†M. Nicolas. Étude des fonctions de Fourier 429
E. Catalan. Sur les fonction X_n de Legendre 429
B. Hansted. Généralisation de la fonction X_n de Legendre . . . 430
G. Leonhardt. Integraleigenschaften der adjungirten Kegelfunctionen 430
L. Gegenbauer. Das Additionstheorem der Bessel'schen Functionen 432

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

G. Cantor. Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten . . . 433
E. Bertini. Sui sistemi lineari 433
V. Schlegel. Théorèmes de géométrie à n dimensions 434
R. Hoppe. Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen 435
R. Hoppe. Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie 435
R. Hoppe. Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen 436
K. Rudel. Vom Körper höherer Dimensionen 437
E. Study. Ueber Distanzrelationen 437

Seite
O. Stolz. Zur Geometrie der Alten 437
P. Cassani. I nuovi fondamenti della geometria 438
W. E. Story. Non-Euclidian trigonometry 439
H. Cox. Application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space 439
V. Schlegel. Geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre 443
Böklen. Ueber die Rechnung mit Vectoren 443

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

A. Cayley. Geometrical forms called trees 444
O. Simony. Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden entstehen 444
O. Simony. Eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie 444
O. Simony. Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze . . 444
O. Simony. Lösung einer Aufgabe 446
E. Hess. Polyeder-Kaleidoscope 447
J. Pitsch. Halbreguläre Stern-Polyeder 448

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

H. Köstler. Vorschule der Geometrie 448
C. F. Hertter. Zeichnende Geometrie 449
N. Fialkowski. Zeichnende Geometrie 449
W. Holl. Lehrbuch der Geometrie 450
M. Dangschat. Geometrie 451
J. H. Nissen. Elementarmathematik 451
K. Struve. Elemente der Mathematik 452
R. Heger. Leitfaden für den geometrischen Unterricht 453
H Schumann. Lehrbuch der Planimetrie 453
J. Ruefli. Lehrbuch der ebenen Geometrie 454
J. Henrici, P. Treutlein. Elementar-Geometrie 454
J. Casey. The first six books of the Elements of Euclid 455
J. O. Gandtner, K. J. Junghans. Aufgabensammlung 456
H. Lieber, F. v. Lühmann. Constructionsaufgaben 457
†G. Tarry. Propriétés générales de trois figures semblables . . . 458
J. Albers. Die Seitenproportionalen eines Dreiecks 458
E. Hain. Das gleichseitige Dreieck 458
A. Picart. Solution d'un problème de géométrie 459
E. Hain. Construction reciproker Punkte des Dreiecks 460
H. Schubert. Beweis des Feuerbach'schen Satzes 460
H. M. Taylor. On a six-point circle 461
R. C. Rowe. Note on Mr. Taylor's six-point circle 461
G. Heppel, L. A. Kittudge, W. J. C. Miller. Solution of a question 461
W. E. Heal. Solution of a problem 462
D. Edwardes, O. Morgan, G. F. Walker. Solutions of a question 462
A. Sachse. Eine Eigenschaft des vollständigen Vierecks 463
†D. Edwardes, G. Eastwood, J. O'Regan, G. Heppel, W. A. Whitworth, K. Gale, E. Buck, J. Young, Ch. Ladd, T. R. Terry, E. Rutter, G. M. Reeves, S. Constable, M. Baker, S. N. Willis, W. H. Blythe, W. B. Grove, R. Knowles. Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Dreieck und Viereck 463

Seite
E. Catalan. Question 463
F. Edler. Vervollständigung Steiner'scher Beweise 463
E. Rouché. Sur la méthode des isopérimètres 464
A. Schiappa Monteiro. Sobre a divisão em partes eguaes da distancia entre dois pontos e da circumferencia empregando o compasso ordinario 465
M. Baker. Alhazen's problem 465
Morel. Solution of a question 465
W. B. Grove, D. Eastwood, J. Young, M. Baker. Solutions of a question 465
S. Constable, B. Easton, Wolstenholme. Solutions of a question 466
Morel, T. R. Terry, G. Heppel. Solutions of a question . . . 466
H. Schubert. Zahl der Bilder bei einem Winkelspiegel 466
F. Nowosielski. Eigenschaften des Systems zweier oder mehrerer Kreise 467
Ch. Nehls. Graphische Rectification von Kreisbögen 467
†J. Hammond, B. Easton, Curtis, W. S. McCay, G. Eastwood, E. Rutter. Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis . 467
J. Hoüel. Sur l'enseignement de la trigonométrie 468
F. Bendt. Ebene und sphärische Trigonometrie 468
F. Reidt. Trigonometrische Analysis 468
V. J. Hübner. Neue Ableitung einiger Formeln 469
Scott, J. O'Regan. Solutions of a question 469
A. Cayley. On the formulae of trigonometry 469
Weill. Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers 470
L. A. Kittudge, J. O'Regan. Solutions of a question 470
†E. W. Symons, T. R. Terry, J. W. Russell, H. L. Orchard, D. Edwardes, A. Cohen, R. Knowles, Curtis. Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Trigonometrie 471
P. von Schäwen. Analogien zwischen dem sphärischen und dem ebenen Dreieck 471
P. von Schäwen. Die seitenhalbirenden Transversalen des sphärischen Dreiecks 472
F. Hoza. Bemerkung zur sphärischen Trigonometrie 473
†W. H. H. Hudson, R. Tucker, Ch. Ladd, E. W. Symons, T. R. Terry, A. McMurphy, B. Easton, J. J. Walker. Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie 473
G. F. Walker. Two constructions for drawing spheres to touch four given spheres 473
J. M. Jeffery. On theorems relating to the regular polyhedra . . 474
C. Gusserow. Die Inhaltsermittelung der Körper aus ihren Projectionen 474
†F. Hromádko. Berechnung des kubischen Inhalts eines schiefen Prismas 474
M. C. Paraira. Over de figuur, welke ontstaat, wanneer men op de sijden van een driehoek parallenrogrammen beschrijft 475
M. C. Paraira. Een stereometrisch analogon van het theorema van Pappus 475
G. Dostor. Volumes et surfaces de deux corps de révolution . . 470
†F. Morley, G. Turriff, E. W. Symons, A. L. Selby, E. Rutter, W. J. Sharp. Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Stereometrie 476
Th. Liebisch. Geometrische Krystallographie 476
†Websky. Ueber eine Methode, einen Normalenbogen zu bestimmen 478

Seite

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

G. Veronese. Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni . . 478
F. Tilšer. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie 479
A. Mannheim. Premiers éléments de la géométrie descriptive . . 479
A. Schmidt Elemente der darstellenden Geometrie 480
J. Menger. Geometrische Formenlehre 480
J. Menger. Lehrbuch der darstellenden Geometrie 480
F. Smolik. Elemente der darstellenden Geometrie 480
W. H. Behse. Die darstellende Geometrie 481
G A. V. Peschka. Darstellende und projective Geometrie 481
†G. A. V. Peschka. Cotirte Projectionsmethode 482
†G. Niemann. Handbuch der Linearperspective 483
†J. Choura. Unterricht in der darstellenden Geometrie 483
†W. Binder. Die Centralprojection als Hülfsconstruction der Orthogonalprojection 482
D. Tessari. Applicazioni della geometria descrittiva 483
J. Vonderlinn. Geometrische Beleuchtungsconstructionen 484
W. Fiedler. Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden 485
G. Hauck. Perspectivische Studien 487
C. Reuschle. Die Deckelemente 489
W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen III, IV, V, nebst Bemerkungen zu V. 489
W. Fiedler. Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln 490
W. Fiedler. Cyklographie 492
E. Lebon. Solution d'une question de géométrie descriptive . . . 492
M. Petzold. Constructive Lösung einer Aufgabe 493
Leudesdorf. Solution of a question 493
E. Rouché. Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une surface de révolution du second ordre 493
M. J. Caron. L'intersection d'une surface de révolution du second ordre 493
E. Lebon. Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second ordre 493
V. Jarolímek. Projection der Durchdringungscurve zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung auf die Ebenen der beiden Drehungsaxen 494
Laguière. Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore 495
J. Tesař. Kinematische Bestimmung der Contour einer windschiefen Schraubenfläche 495
O. Möllinger. Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojectionen . . . 495
F. E. Scheller. Theorie der geographischen Netze 496
F. Hofmann. Zur Theorie der stereographischen Projection . . . 497

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

L. Cremona. Elemente der projectivischen Geometrie 497
M. Pasch. Vorlesungen über neuere Geometrie 498
J. Wenck. Die synthetische Geometrie der Ebene 499
A. V. Peschka. Darstellende und projective Geometrie 500

Seite
W. Fiedler. Cyklographie 500
W. Fiedler. Zu den Elementen der Geometrie der Lage 506
†G. Battaglini. Sopra una memoria del Prof. R. de Paolis . . . 506
W. W. Johnson. New notation for anharmonic ratios 506
M. Pasch. Ueber projective Punktreihen 507
†V. Jerábek. Construction von conjugirten und senkrechten Strahlen 507
O. Schlömilch. Zwei projectivische Sätze 507
A. Sachse. Beweis der vorigen Sätze 508
Em. Weyr. Ueber cyklische Projectivität 508
H. Schubert. Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems 509
R. Sturm Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften 509
S. Kantor. Bemerkungen dazu 514
M. Allé. Zur Theorie der Doppelverhältnisse 514
S. Kantor. Allgemeinste lineare Systeme linearer Transformationen 515
H. Schubert. Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformation der Ebene 515
P. H. Schoute. Deux cas particuliers de la transformation birationelle 519
P. H. Schoute. Over een paar met elkaar samenhangende involutorische birationeele transformaties 520
A. Ramisch. Ueber sich in einem Punkte schneidende coordinirte Linien 521
C. Stéphanos. Relation qui existe entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes binaires biquadratiques 521

B. Besondere ebene Gebilde.

A. Milinowski. Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte 522
B. Schöffler Synthetische Geometrie der Curven zweiter Ordnung 535
M. N. Vaněček. Die Transversalen in vollständigen Vielecken und Vielseiten 526
B. Alvord. The intersection of circles and the intersection of spheres 526
F. Da Ponte Horta. Algumas propriedades das conicas 527
A. Schiappa Monteiro. Génération d'une conique au moyen du cercle 527
C. Hossfeld. Construction des Kegelschnitts aus fünf Curvenelementen 528
O. Dziobek. Zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks 528
H. Dufau. Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique . . . 529
F. Gräfe. Ueber das Pascal'sche, resp. Brianchon'sche Sechseck . 529
E. Brassinne. Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal 530
G. Tarry. Relation générale entre sept points quelconques d'une section conique 530
A. Schumann. Wechselbeziehung zwischen einem Satze von Chasles und von Steiner 531
C. Pelz. Zum Normalenproblem der Kegelschnitte 532
H. G. Zeuthen. Bevis for en Konstruktion af Chasles 532
A. Mannheim Construire les axes d'une certaine ellipse 532
G. Halphén. Sur un critérium relatif à la théorie des sections coniques 532
G. Bruno. Sulle coniche che passano per tre punti dati e toccano due rette date 533

Seite
H. Schröter. Geometrischer Satz 533
Anonyme. Composition mathématique 533
Z Reggio. Alcune ricerche sulle coniche 534
A. Brill. Ueber das Polvierseit 534
J. Streissler. Conctruction der gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte 535
L. Kotanyi. Construction algebraischer Ausdrücke mit Hülfe von Involutionen auf Kegelschnitten 536
Weill. De l'involution de plusieurs points sur une conique 537
Gerbaldi. Sui gruppi di sei coniche in involuzione 537
F. Bergmann. Kegelschnittbüschel-Constructionen 538
F. Hofmann. Théorème relatif à un certain réseau de quatre sections coniques 539
†Genese, A. McMurphy, Ch. Ladd, F. Budd, W. Roberts, W. J. C. Sharp, J. L. Kitchin, Ch. A. Scott, J. Young, M. S. Meyer, K. Gale, T. Woodcock, U. H. Lowry, G. F. Walker, Townsend, Droz, A. M. Martin, B. Easton, D. Edwardes, R Knowles. Kegelschnitte in synthetischer Behandlung 539
O. Zimmmermann. Aufgaben und Lehrsätze über Kegelschnitte . 539
H. Drasch. Zur synthetischen Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung 540
R. A. Roberts. On polygons circumscribed about a cuspidal cubic 540
C. Le Paige. Sur l'involution biquadratique du 3me rang 540
A. Ameseder. Geometrische Untersuchungen der ebenen Curven vierter Ordnung 541
Laguerre. Sur les hypercycles 641
G Darboux. Sur une classe de courbes unicursales 542
G. Darboux. Une propriété du cercle 543
E. Mahler. Zur Theorie der Kegelschnitte 544
E. Mahler. Zur Theorie der Curven grader Ordnung 544
Stoll. Zur Tangentenconstruction der Astroide 545
G. Bellermann. Ueber Rouletten 545
Chr. Wiener. Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven 546

C. Besondere räumliche Gebilde.

Th. Reye. Das Problem der Configurationen 546
A. Victor. Die harmonische Configuration 24_4 547
H. Schröter. Cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen 548
A. Schumann. Eine allgemeine Beziehung zwischen fünf Punkten des Raumes 548
H. Thieme. Zur Geometrie des Tetraeders 549
H. Vogt. Die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren . . 550
G. Bruno. Sui quadrilateri sghembi circoscritti ad una quadrica . . 551
J. Cardinaal. Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung . . 551
F. Graefe. Erweiterung eines Satzes von Hesse 552
G. A. Bordiga. Teoremi sulle quadriche analoghi a quello di Pascal nelle coniche 552
A. Rasche. Untersuchung gewisser Flächen zweiten Grades . . . 552
O. Rupp. Ueber die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln 553
A. Mannheim. Détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice 554

Seite
G. V. Peschka. Neue Eigenschaften der Normalenflächen 555
A. Adler. Strictionslinien der Regelflächen 558
†H. Thieme. Zur Construction des Polarsystems einer Fläche dritter Ordnung 558
L. Geisenheimer. Ueber den Mittelpunkt der Raumcurven dritter Ordnung 558
A. Hurwitz. Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung 559
G. v. Escherich. Die Construction der algebraischen Flächen . . 560
G. v. Escherich. Die Construction der algebraischen Curven und Flächen 560
Th. Reye. Ueber das Strahlensystem zweiter Klasse sechster Ordnung von der ersten Art 561
W. Stahl. Das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse 562
W. Stahl. Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades 563
F. Schur. Eine besondere Klasse von Flächen vierter Ordnung . . 564
H. Schröter. Eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species . . . 566
A. Adler. Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art 568
E. Weyr. Sulle curve gobbe razionali 569
Em. Weyr. Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve 570
Em. Weyr. Sur les surfaces d'involution, nebst Rapport von F. Folie 570

D. Abzählende Geometrie.

H. Schubert. Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems 571
H. Krey. Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten . 572
O. Tognoli. Sulla teoria della involuzione 574
C. F. E. Björling. Om algebraiska rymdkurvors singulariteter . . 575
C. F. E. Björling. Modelle von Raumcurven 576
J. S. Vaneček. Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure 576
J. S. Vaneček. Sur un mode de transformation des figures dans l'espace 577
J. Möller. Ueber die Transformation einer gewundenen Curve durch sphärische Inversion 577
R. Sturm. Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln 578
Schoute. Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques 579
J. M. Lovén. Om plana algebraiska kurvors rektifiabilitet 579
K. Bobek. Der geometrische Ort der Inflexionspunkte eines Curvenbüschels 580
G. Halphén. Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles 580

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Coordinaten.

H. Picquet. Traité de géométrie analytique 582
G. Veronese. Dei principali metodi in geometria 582
W. Fiedler. Allgemeine Transformation der Coordinaten 583
Borletti. Sulla trasformazione delle coordinate nello spazio . . . 585
W. J. C. Sharp, G. M. Reeves. Solution of a question 585

Seite
E. Hain. Formeln für die Rechnung mit trimetrischen Punktcoordinaten . . . 585
H. W. L. Tanner. The coordinates of a plane curve in space . . 585
E. Mathieu. Sur les coordonnées curvilignes 586
A. Cayley. On curvilinear coordinates 587
P. Barbarin. Sur les coordonnées bipolaires 588
G. Leonhardt. Grundzüge einer Dipolargeometrie 588
H. Cox. On systems of circles and bicircular quartics 588
H. Cox. Application of quaternions 589
Hamilton. Elemente der Quaternionen 590
D. Padeletti. Principii della teoria dei quaternioni 594
G. J. Mounier. Eene byzondere eigenschap der quaternionen . . . 594
C. S. Peirce. On the relative forms of quaternions 594
J. J. Walker. Solution of two questions 595
F. Graeve. Sätze über abwickelbare Flächen 595
D. Padeletti. Su un calcolo nella teoria delle dinami analogo da quello dei quaternioni 595
Seydler. Zur Theorie der complanaren Biquaternionen 596

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

W. Jocknick. Sifferexempel till plana koordinatgeometrien 597
H. G. Zeuthen. Om stationäre kurver i el System 597
P. Gilbert Exercices d'analyse infinitésimale 598

B. Theorie der algebraischen Curven.

E. Holst. Et Par synthetiske Methoder isor til Brug ved Studiat af metriske Egenskaber 598
E. Holst. Zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Curven 600
E. Holst. Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes 600
F. Lindemann. Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini 601
J. S. Vaneček. Sur l'inversion générale 602
Genese, Ch. Ladd. Solutions of a question 602
C. Le Paige. Die $2k$-elementige neutrale Gruppe einer Involution . 602
C. Le Paige. Représentation géométrique de deux transformations uniformes 602
C. Le Paige. Transformations géométriques uniformes, nebst Rapport von F. Folie 602
Weill. Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale 603
P. Gordan. Ueber Bündel von Kegelschnitten 603
W. H. L. Russell. Certain geometrical theorems 603
W. Spottiswoode. Note on Mr. Russell's paper 604
H. J. Rink. Applications géométriques simples du théorème d'Abel 604
F. Folie, C. Le Paige. Mémoire sur les courbes du 3me ordre . 604
C. Le Paige. Essai de géométrie du 3me ordre 605
C. Le Paige. Les courbes du 3me ordre, nebst Rapport von F. Folie 605
R. A. Roberts. On tangents to a cubic forming a pencil in involution 606
J. J. Walker. On the covariant locus of the vertex of a pencil of tangents on a cubic in involution 606

Seite
F. d'Arcais. Teoremi sulle curve piane del terzo ordine 606
E. W. Davis. On binodal quartics 607

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

W. E Story. On a system of conchordal conics 607
W. E. Story. Analytical proof of some properties of binodal quartics 607
W. Abendroth. Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene 608
A. Wiegand. Analytische Geometrie 609
Ad Hochheim. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene 609
R. A. Roberts. Examples and problems on conics 610
X. Antomari. Relation entre les distances mutuelles de quatre points situés sur un même cercle et de cinq points situés sur une même sphère 610
A. Sykora. Enveloppe einer Geraden 611
E. Hunyady. Zusatz zu einer früheren Abhandlung 612
Wolstenholme. Solution of a question 613
C. de Polignac. Solution of a question 613
R. W. Genese. On linear syzygetic relations between the coefficients of ternary quadrics 613
W. J. C. Sharp. Solution of a question 614
M. Pasch. Zur Kegelschnittstheorie 615
Weill. De l'involution de plusieurs points sur une conique 615
X. Antomari. Deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques 618
Townsend, E. W. Symons, G. F. Walker, Ch. Ladd, R. E. Riley, D. Edwardes, W. J. C. Sharp, Genese, Malet, G. Heppel, Matz. Aufgaben über Kegelschnitte im Allgemeinen in analytischer Behandlung 618
E. W. Symons, R. Knowles. Solutions of a question 619
E. W, Symons, T. R. Terry, E. Rutter, G. F. Hopkins, G. F. Walker, A. H. Curtis, S. Marks, J. S. Jenkins, R. Knowles, Wolstenholme. Aufgaben über die Parabel in analytischer Behandlung 619
J. Hammond, B. Easton. Solutions of a question 619
H. G. Dawson, E. Rutter. Solutions of a question 619
E. J. Nanson. On the geometry of conics 620
Schoute. Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères . 620
Wolstenholme. Solution of a question 620
T W. Openshaw, G F. Walker, N. Sarkar, J. R. Wilson, R. Knowles, W. J. C. Sharp, C. Taylor, E. Haigh, A. L. Selby, E. Rutter, Wolstenholme, F. Budd, S. Tebay, Matz, J. O'Regan. Aufgaben über Ellipse und Hyperbel in analytischer Behandlung 621

D. Andere specielle Curven.

W. E. Story. Analytical proof of some properties of binodal quartics 621
H. Brocard. Interprétation de l'équation caractéristique de diverses courbes 621
Moret-Blanc. Solution d'une question 621
C. O. Boije of Gennas. Remarkable property belonging to some cubics 621

Seite
A. Mannheim. Théorèmes de géométrie 622
M. Greiner. Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt 622
E. Dorlet. Solution d'une question 623
M. Greiner. Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar oder eines Büschels . 624
Barbarin. La droite de Simson 625
W. J. C. Sharp, W. J. C. Miller. Solutions of a question . . . 625
A. McIntosh. Solution of a question 625
R. A. Roberts, G. F. Walker, Matz, W. J. C. Sharp, J. L. McKenzie, A. McIntosh, T. Woodcock. Aufgaben und Sätze über Curven dritter Ordnung 625
A. H. Curtis. Geometrical proof that the caustic by reflexion of a cardioid produced by rays from its cusp is an epicycloid . . . 626
J. Pleyl. Zur Cardioide 626
P. A. MacMahon. Thè cassinian 626
Townsend, J. J. Walker. Solutions of a question 626
H. G. Zeuthen Om mekanisk Konstruktion af Descartes' Ovaler 627
Wolstenholme. Complete determination of the real foci and of the vector equation of the pedal of a given ellipse 628
Wolstenholme. Determination of the foci of the pedal of a given parabola 629
H. Hart. On the linear vectorial equation of the central pedal of a conic 630
H. M. Jeffery. On certain quartic curves 630
E. Mahler. Ueber eine Curve vierter Ordnung 631
Stammer. Geometrischer Ort der Punkte, von welchen aus zwei feste Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen 631
Rusch. Beitrag zur Trisection 632
W. Hillhouse. A new curve for the trisection of an angle 632
P. V. Jensen. Analytisk Fremstilling af Kurves beskrevne ved en bevägelig Trestangsforbindelse 633
H. Hart. The evolute of the symmetrical bicircular quartics 633
A. Cayley. Solution of a question 633
Townsend. On the atriphthaloid and atriphthalid of Dr Haughton 633
R. Tucker. The radial of an ellipse 634
Moret-Blanc. Solution d'une question 634
E. W. Symons, C. H. Swift. Solutions of a question 635
E. W. Symons, G. W. Walker. Question 635
Anthony, C. Morgan, J. Young, E. W. Symons, H. Hayash, E. Rutter, G. F. Walker, J. H. Turrell, Wolstenholme, Genese, T. Woodcock, R. Knowles, W. B. Grove, Ch. Ladd, W. J. C. Miller, D. Edwardes. G. M. Reeves, Townsend, Nash, A. H. Curtis. Aufgaben über geometrische Oerter 635
H. Résal. Applications du théorème de Savary 635
C. B. S. Cavallin. Ett geometrisk medalvärde 636
E. Habich. Sur les roulettes 637
†H. M. Jeffery. On a tangential property of regular hypocycloids and epicycloids 637
†H. M. Jeffery. On the rectifiable spherical epicycloid 637
Minchin. Solution of a question 637
D. V. Wood. Solution of a problem 367
E. Césaro. Sur la tractrice 637
E. W. Symons, J. Hanmond. Solution of a question 638
W. Besant, W. J. C. Sharp, C. Morgan, D. Edwardes. Aufgaben über Kreisevolvente und transcendente Curven 638

Seite

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

Th. Craig. Certain metrical properties of surfaces 638
Th. Craig. On areas of corresponding surfaces 639
A. Picart Sur les paraboloïdes du second ordre osculateurs aux surfaces 640
B. Seidelin. Om Konstruction af Tangenter til Róringskurven . . 640
P. Mansion. Principe fondamental relatif au contact de deux surfaces qui ont une génératrice commune, nebst Rapport von E. Catalan 641
S. Lie. Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten 641
S. Lie Bestimmung aller Flächen, die durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden 642
Chomé. Propriété de surfaces gauches 643
O. Böklen. Ueber die Krümmung der Flächen 644
De Salvert. Mémoire sur les ombilics coniques, nebst Rapport von C Jordan 645
R. Lipschitz. Ueber die Bestimmung von Oberflächen 650
L. Bianchi. Sulle superficie a curvatura costante positiva 652
R. Hoppe. Bestimmung einer Fläche durch die eine ihrer zwei Mittelpunktsflächen 653
F. August. Ueber Flächen mit gegebener Mittelpunktsfläche . . . 656
R Hoppe. Zur Flächentheorie 659
R. Hoppe Das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugirten Tangenten auf positiv gekrümmter Fläche 659
J. Weingarten. Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen 661
G. Darboux Représentation sphérique des surfaces 662
H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle 666
T. Craig. A geometrical theorem 667
S. A Christensen. Vindskjäve Kurvers Polarflade 667
S. Lie. Bestimmung von Raumcurven 668
A. H. Curtis. Solution of a question 668
A. J. C. Allen. Notes on solid geometry 668

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

A. Cayley. Determination of the order of a surface 669
W. L. Tanner, Ch. Ladd. Solution of a question 669
M. Nöther. Zur Theorie der algebraischen Raumcurven 669
Weill. Sur certains polygones 675

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

Ch. Brisse. Application des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en S 676
Ch. Brisse. Réduction de l'équation générale des surfaces du second ordre en coordonnées obliques 680
A. J. C. Allen. The general equation of the second degree referred to tetrahedral coordinates 682
G. F. Walker, Ch. Ladd. Solutions of a question 685
A. Mannheim. Sur les surfaces homofocales du second ordre . . 685

Seite

A. Mannheim. Sur les centres de courbure principaux des surfaces homofocales du second ordre 686
O. Staude. Fadenconstruction des Ellipsoides 686
O. Staude. Geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid 686
A. McMurchy, Ch. Ladd, J. Hammond, Matz. Solutions of questions 688
Moret-Blanc. Solution d'une question 688
G. Pfeiffer. Formeln für den Inhalt der Kegelfläche 689
W. J. C. Sharp, M. S. Meyer, W. H. Blythe, Curtis, J. Hammond. Aufgaben über Flächen zweiter Ordnung 689
A. v. Braunmühl. Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades 689
Battaglini e Cremona. Sopra una memoria del Prof. de Paolis 691

D. Andere specielle Raumgebilde.

L. Brill. Nachtrag zum Catalog mathematischer Modelle 691
E. Hunyady. Geometrischer Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelfläche zweiten Grades 692
J. Vályi. Die Flächen, deren sämmtliche Normalen eine Kugelfläche berühren 692
Th. Craig. The counter-pedal surface of the ellipsoid, with a note 693
T. Craig. On the parallel surface to the ellipsoid 694
O. Böklen. Die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle 694
Abonné. Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde . . 696
E. Picard. Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres 697
J. Hammond, G. Eastwood. Solutions of a question 699
W. Spottiswoode. On the polar planes of four quadrics 699
L. de la Rive. Étude sur la projection des angles 699
S. Kantor. Bemerkung zu einer Abhandlung von Durège 700
U. Masoni. Sopra alcune curve del quarto ordine 701
H. M. Jeffery. On spherical curves of the fourth class 703
H. M. Jeffery. On spherical cycloidal and trochoidal curves . . . 703
B. Easton, D. Edwardes. Solutions of a question 704
C. Henry. Solution d'une question 704
A. Enneper. Flächen mit besonderen Meridiancurven 705
A. Enneper. Zur Theorie der Flächen 706
A. Ribaucour. Étude des elassoïdes 708

Capitel 4. Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme.)

W. Fiedler. Projective Verbindung der Gebiete höherer Stufen . . 712
G. Battaglini. Sui connessi ternarii di 1° ordine e di 1^a classe . 713
A. Weiler. Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen 713
Genty. Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre 714

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

F. Aschieri. La trasformazione quadratica doppia di spazio . . . 715

Seite
E. Bertini. Costruzioni geometriche della trasformazione univoca di 3° ordine . . . 719
M. Nöther. Algebraische Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich selbst zulassen. Nachtrag 719
A. Cayley. On two cases of the quadric transformation between two planes . . . 721
Piazza. Sulla corrispondenze (1,2) ed (1,3) . . . 721
G. Peano. Formazioni invariantive delle corrispondenze 721
Laguerre. Transformation par semi-droites réciproques 722
J. S. Vaneček. Sur l'inversion générale . . . 723
†L. Certo. Lo spazio delle omologie affini di un piano 723

B. Conforme Abbildung.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Ph. Gilbert. Cours de mécanique analitique . . . 724
A. Seydler. Einleitung in die theoretische Physik 724
Laplace. Oeuvres complètes . . . 726
Ledieu. La théorie vibratoire de la matière . . . 727

Capitel 2. Kinematik.

C. Stéphanos. Sur les propriétés métriques . . . 727
G. Halphén. Sur la théorie du déplacement . . . 728
G. Gautero. Del movimento di una superficie . . . 729
E. Habich. Théorème de cinématique . . . 729
F. Schiffner. Die Schraubenregelfläche . . . 730
†M. d'Ocagne. Étude sur un mode de détermination des courbes planes . . . 730
V. Liguine. Sur les systèmes articulés de Peaucellier, Hart et Kempe . . . 730
H Hart. Quaternion proof of the triple generation of three-bar-motion . . . 731
L. Janse. Stoomverdeelingssysteem van Gebr. Sulzer 731

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

J. Petersen. Statik fester Körper . . . 731
G. B. Marsano. Dimostrazione del parallelogrammo delle forze . . 732
E Brassinne. Manière directe de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier . . . 732
E. Wenzel. Zurückführung der schiefen Ebene auf den Hebel . . 733
G. Bardelli. Sui sistemi variati di forze . . . 733
J. J. Sylvester. On mechanical involution . . . 734
A. Legoux. Stabilité de l'équilibre d'un point matériel 735
A. Laisant. Propriétés des centres de gravité . . . 736
E. Laquière. Sur le théorème de M. Laisant . . . 736
E Laquière Sur un théorème de Pappus . . . 736
V. Schlegel. Sur le théorème de M. Laisant . . . 736
G. Jung. Alcuni teoremi baricentrici . . . 737

Seite
H. Résal. Correspondance 738
H. Résal. Formules approchées relatives à l'équilibre d'une position de chaîne 738
Gawbey. Solution d'une question de mécanique 739
M. Azzarelli. Momenti d'inerzia delle linee, superficie e volumi . . 739
E. Brassinne. Balance d'oscillation employée pour le calcul des moments d'inertie 740
G. Jung. Alcuni teoremi sulle forme degeneri dell' ellissoido del Culmann 740
F. Siacci. Gli assi statici di un sistema di forma invariabile . . . 740
A. de St.-Germain. Sur les équations de l'équilibre astatique . . 741
N. Tc. Michaelis. Brugbalken van de tweede orde 741
K. Stelzel. Grundzüge der graphischen Statik 741
G. Battaglini. Relazione sulla memoria del sig Gebbia 745

B. Hydrostatik.

O. Kuntze. Untersuchungen über die Veränderungen der Axenverhältnisse, Schwerkräfte und der Rotationsgeschwindigkeiten homogener flüssiger Gleichgewichtsfiguren 745

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

A. Fuhrmann. Aufgaben aus der analytischen Mechanik 746
E. Brassinne. Questions de mécanique rationnelle 746
E. Brassinne. Nouvelle manière d'employer le principe de la moindre action 747
E. Brassinne. Sur un passage de la „mécanique analytique“ . . . 747
E. Brassinne. Méthode générale pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux et aux moments d'inertie 747
M. Lévy. Extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité 748
G. Morera. Una formola di meccanica analitica 749
C. Lagrange. Exposition critique de la méthode de Wronski, nebst Rapport von F. Folie, G. v. d. Mensbrugghe 749
A. A. Curtis. Notes on central forces 750
H. G. Zeuthen. Sätninger om Punkts Bevägelse 750
J. Morrison. Integration of the general equations of motion . . . 751
G. Dillner. Om integration af differentialeqvationerna in n-kropparproblemet 751
Gascheau. Cas singulier du mouvement d'un point matériel . . . 751
Gascheau. Explication de deux paradoxes apparents 751
P. Bachmann. Bewegung eines Punktes 752
A. G. Greenhill. Motion of a projectile in a resisting medium . . 753
M. d'Ocagne. Sur le pendule 753
Th. v. Oppolzer. Zur Ermittelung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen 753
H. Résal. Sur la courbe synchrone de la cycloide 754
H. Résal. Propriétés mécaniques de la lemniscate 755
P. v. Geer. Over de beweging van stelpels 755
Gambey. Solution d'une question de mécanique 757
Böklen. Aufhängungspunkte und Axen für isochrone Schwingungen eines Körpers 757
R. Lipschitz. Sur le pendule 759

Seite

J. Bertrand. La loi de déviation du pendule de Foucault 760
Hatt. La loi de déviation du pendule de Foucault 760
H. Résal. L'influence de la rotation de la terre sur le mouvement du pendule 761
Ph. Gilbert. Preuves mécaniques de la rotation de la terre . . . 762
Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif, nebst Rapport von C. Jordan 762
Despeyrous. Équations différentielles du mouvement d'un corps solide 769
F. A. Jarleton. Some deductions of Mc Cullagh's „lectures on rotation" 769
W. Hess. Das Problem der Rotation 771
A. G. Greenhill. The steady motion of a solid of revolution . . . 772
H. Léauté. Sur les solides d'égale résistance 772
J. Grossmann. Zur Theorie der Reglage 773

B. Hydrodynamik.

R. Reiff. Principien der neueren Hydrodynamik 774
R. Townsend. On a property in the theory of the irrotational strain of an incompressible lamina in the plane of its mass 775
J. J. Thomson. On the vibrations of a vector ring in a perfect fluid 776
A. G. Grennhill. On the rotation of a liquid ellipsoid about an axis 777
H. Lamb. Forces experienced by a solid moving in an infinite mass of liquid 778
A. Schülke. Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressibeln Flüssigkeit 779
De Saint-Venant. Des mouvements des diverses parties d'un certain liquide 779
J. Boussinesq. Intégration de certaines équations aux dérivées partielles 781
J. Boussinesq. Équations différentielles du mouvement de certaines ondes 781
J. Boussinesq. Sur les ondes que fait naître l'émersion d'un cylindre solide 781
A. G. Greenhill. On the flow of viscous liquid in a pipe 784
M. Margules. Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit 784
M. Margules. Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder 784
M. Margules. Bewegung zäher Flüssigkeiten 786
L. Grossmann. Bestimmung der inneren Reibungsconstanten von Gasen und Flüssigkeiten 786
Th. S. Schmidt. Innere Reibung von Flüssigkeiten nach der Methode von Maxwell 787
G. J. Michaelis. Over bewegingen van vloeistoffen 788
H. Lamb. Oscillations of a viscous spheroid 789
A. Oberbeck. Bewegungen der Luft an der Erdoberfläche 791
Sprung. Zur Theorie der atmosphärischen Wirbel 793
G. Schmidt. Analogie zwischen elektrischen und Wasserströmen . 794

Capitel 5. Potentialtheorie.

E. Beltrami. Sul potenziale magnetico 796
Tonelli. Sopra la funzione potenziale in uno spazio di *n* dimensioni 797

Seite
F. Angelitti. Sull' attrazione secondo una potenza intera qualunque della distanza . . . 797
J. Boussinesq. Sur un potentiel à quatre variables . . . 798
†P. Opitz. Sätze über Anziehung . . . 798
E. J. Nanson On the potential of a uniform spherical shell . . . 798
H. Résal. Détermination du niveau potentiel de l'ellipsoide . . . 798
De Saint-Germain. Extrait d'une lettre . . . 798
St. Glaser. Ellipsoidische Flächenbelegungen . . . 799
W. M. Hicks. On toroidal functions . . . 799

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

G. J. Michaelis. Ueber die Theorie der elastischen Nachwirkung. 801
L. Sohncke. Ableitung des Grundgesetzes der Krystallographie . 801

B. Elasticitätstheorie etc.

A. Castigliano. Una proprietà dei sistemi elastici . . . 802
W. J. C. Sharp. On the invariants of a certain orthogonal transformation . . . 802
R. R. Webb. Stress and strain in cylindrical and polar coordinates 805
J. Boussinesq. Les déplacements qui sont calculables à la manière d'une attraction newtonienne . . . 805
J. Boussinesq. Équilibre d'élasticité d'un solide limité par un plan 806
J. Boussinesq. Sur la transmission d'une pression oblique . . . 806
H. Hertz. Berührung fester elastischer Körper . . . 807
G. H. Darwin. On the stresses caused in the interior of the earth by the weights of continents and mountains . . . 809
R. R. Webb. On the equilibrium of a bent plate . . . 809
L. Rayleigh On the infinitesimal bending of surfaces of revolution 810
W. Voigt. Formeln für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen . . . 811
W. Voigt. Volumen- und Winkeländerung krystallisirter Körper bei all- oder einseitigem Druck . . . 813
W. Voigt. Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe 813
L. Boltzmann. Experimente über den Stoss von Cylindern . . . 815
Sebert et Hugoniot. Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques . . . 815
Sebert et Hugoniot. Sur le choc longitudinal d'une tige élastique 815
Sebert et Hugoniot. Sur le vibrations longitudinales des verges élastiques . . . 815
De Saint-Venant. Du choc longitudinal d'une barre élastique libre . . . 817
De Saint-Venant. Solution en termes finis et simples, du problème du choc longitudinal . . . 817
J. Boussinesq. Résistance d'une barre prismatique au choc transversal et au choc longitudinal . . . 818
J. Boussinesq. Sur le choc d'une plaque élastique plane . . . 818
H. Résal. Un point de la théorie mathématique des effets du jeu de billard . . . 820
H. Résal. Question de principe de la théorie du choc des corps . 820
H. Résal. Sur le choc des corps imparfaitement élastiques . . . 820

Seite
H. Résal. Du choc de deux sphères 820
H. Résal. Du choc de deux billes 820
H. Résal. De l'effet d'un coup de queue incliné sur une bille . . . 820
H. Résal. Remarques sur la théorie des chocs 820
H. Lamb. On the vibrations of an elastic sphere 823
M. Da T. P. Vianna. Influencia das cargas un movimento sobre as rigas rectas 824
Tresca. Théorie de la résistance des étoffes tissées à l'extension 824
H. Léauté. Sur l'application de la résistence des matériaux aux pièces des machines 825

C. Capillaität.

P. Volkmann. Molecularanziehung von Flüssigkeiten auf einander 825
G. v. d. Mensbrugghe. Interprétation théorique de l'effet produit par une couche mince d'huile, répandue à la surface de la mer, pour calmer les flots 826

Capitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

W. Matzka. Kritische Berechnungen der musikalischen Töne . . . 827
E. Beltrami. Sulla teoria della scala diatonica 828
Schnell. Harmonische Teilung und consonirender Dreiklang . . . 828

B. Theoretische Optik.

A. Beer. Einleitung in die höhere Optik 828
E. Lecher. Ausstrahlung und Absorption 829
G. Kirchhoff Zur Theorie der Lichtstrahlen 829
J. Fröhlich. Ueber die Intensität des gebeugten Lichtes 833
H. Struve. Fresnel's Interferenzerscheinungen 834
A. Lindstedt. Zur Theorie der Fresnel'schen Integrale 836
H. Struve. Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben 836
H. Struve. Zur Theorie der Diffraction an Fernröhren 836
J. Delsaux. Sur une propriélé de la diffraclion des ondes planes . 838
W. König. Elliptische Polarisation des reflectirt gebeugten Lichtes 838
Gouy. Sur la propagation des ondes lumineuses 838
E. Lommel. Theorie der elliptischen Doppelbrechung 841
E. Ketteler. Bemerkungen zu Arbeiten der Herren Lommel, Glazebrook und Mathieu 842
E. Lommel. Zur Theorie des Lichtes 842
W. Voigt. Bemerkungen zu H. Lommel's Theorie der Doppelbrechung etc. 843
E. Ketteler. Theorie der circular- und elliptisch - polarisirenden Mittel 844
A. Wüllner. Zur Dispersion farblos durchsichtiger Medien 846
R. F. Glazebrook. On the refraction of polarised light at the surface of a uniaxal crystal 847
R. F. Glazebrook. Equation connected with the electromagnetic theory of light 847
A. C. v. Rijn van Alkemade. De elliptische polarisatie bij de terugkaatsing van het licht door doorschynende middenstoffen . 848
E. Lippich. Ueber polaristrobometrische Methoden 849
A. Michelson. Sur le mouvement relatif de la terre et de l'éther . 850
F. Boas. Ein Beweis des Talbot'schen Satzes 850

Seite

C. Geometrische Optik.

F. Hoffmann. Ueber Linienpaare mit optischen Eigenschaften . . 851
J. Morawetz. Reflexion und Refraction des Lichtes an Curven und Flächen 851
F. Kessler. Minimum der Zeit bei der Brechung des Lichtes . . 852
F. Kessler. Minimum der Rotation des Lichtstrahles 852
F. Kessler Minimum der Ablenkung eines Lichtstrahles 852
H. Hammerl. Ueber Regenbogen 853
J. Delsaux. Sur la théorie de l'arc en ciel 853
K. Moser. Grundformeln der Dioptrik 853
F. Kessler. Ersatz eines centrischen Systems brechender Kugelflächen 853
K. W. Zenger. Berechnung des Endomersions-Objectivs für Fernrohr- und Mikroskopobjective 854
K. W. Zenger. Dioptrische Studien 854
F. Meisel. Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel 855

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

A. Maxwell Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus . . . 856
G. Wiedemann. Die Lehre von der Elektricität 857
R. Clausius. Die verschiedenen Masssysteme zur Messung elektrischer und magnetischer Grössen 857
H Helmholtz. Absolute Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen 857
R. Clausius. Zusammenhang zwischen den Einheiten der Elektricität und des Magnetismus 857
P. Volkmann Zum absoluten Maasssystem 859
A. Ledieu. Objections d'ordre mécanique à la théorie actuelle de l'électricité 854
A. Ledieu. Conception rationnelle de la nature 859
C. Decharme. Réponse à une note de M. Ledieu 859
A. Ledieu. Réponse aux objections de M. Decharme 859
C. Decharme. Réponse à M. Ledieu 859
C. Decharme. Expériences hydrodynamiques 860
H. A. Lorentz. De grondformules der electrodynamica 861
M. Lévy. Mouvement d'un système de deux particules de matière pondérable électrisées 861
H. Résal. Théorie de l'électrostatique 862
R. Clausius. Formule générale relative à l'électrisation par influence 862
Croullebois. Conséquences du principe de Gauss en électrostatique 862
T. Machai. Théorèmes d'électricité 862
E. Beltrami. Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizati . . 863
A. G. Greenhill. On functional images in Cartesians 864
W. D. Niven. A method of approximating to the solution of electrostatic problems 865
R. Colley. Die Existenz einer diëlektrischen Polarisation in Elektrolyten 865
J. Klemenčič. Capacität eines Plattencondensators 866
E. Budde. Mechanische Grundlagen der Gesetze von Ohm und Joule 866
R. Colley. Ueber die in einem geschlossenen Stromkreise geleistete Arbeit äusserer Kräfte 867

Seite

G. Lippmann. Sur la théorie des couches doubles de M. Helmholtz . . . 867
A. König. Beziehungen zwischen der galvanischen Polarisation und der Oberflächenspannung des Quecksilbers . . . 868
C. Hildebrand. Ueber die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene . . . 868
W. Voigt. Theorie der elektrochemischen Experimente des H. Guébhard . . . 869
E. Mach. A. Guébhard's Darstellung der Aequipotentialcurven . . 869
H. Meyer. Die von Guébhard vorgeschlagene Methode der Darstellung äquipotentialer Linien . . . 869
L. Ditscheiner. Die Guébhard'schen Ringe . . . 870
A. Witkowski. Einfluss der Deformation auf die elektrische Leitungsfähigkeit . . . 871
C. Dieterici. Ueber Messung kleiner elektrischer Widerstände . . 872
E. Dorn. Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass . . . 873
F. Kohlrausch. Messung der Windungsfläche einer Drahtspule auf galvanischem Wege . . . 874
H. Weber. Der Rotationsinductor . . . 874
E. Dorn. Zur Multiplications- und Zurückwerfungsmethode 875
M. Brillouin. Comparaison des coëfficients d'induction 877
A. Oberbeck. Ueber die Phasenunterschiede elektrischer Schwingungen . . . 877
A. Oberbeck. Ueber elektrische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Phasen . . . 877
M. Deprez. Des actions électriques dans les systèmes conducteurs semblables . . . 879
M. Deprez. Transport de la force aux grandes distances 879
M. Deprez. Nouvelles expressions du travail et du rendement économique des moteurs électriques . . . 879
M. Lévy. Solution pratique du problème du transport de la force à de grandes distances . . . 880
M. Lévy. Sur la relation entre la force électromotrice d'une machine électrodynamique et sa vitesse de rotation . . . 880
M. Deprez. Sur les moteurs électriques . . . 880
M. Lévy. Sur une communication de M. Deprez . . . 880
G. Basso. Sopra un caso particolare d'equilibrio per un solenoide . . . 881
F. Kohlrausch. Absolute Messungen mittels bifilarer Aufhängung . . . 881
J. Stefan. Ueber die magnetische Schirmwirkung des Eisens . . . 882
J. Stefan. Die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes . . . 883
M. Abria. Sur les unités de Gauss . . . 884
A. Wassmuth. Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung . . . 884
A. Wassmuth. Ueber den inneren Zusammenhang einer Anzahl von elektromagnetischen Erscheinungen . . . 884
A. Wassmuth. Ueber elektromagnetische Tragkraft . . . 885
G. Jung. Sul pseudofoco del paraboloide e sul centro magnetico . 885
Quet. Sur les forces d'induction que le soleil développe dans les corps par sa rotation . . . 886
G. Ricci. Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti . . . 886

Seite

Capitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

E. A. Rowland. Relazione critica sulle varie determinazioni dell' equivalente meccanico della caloria 887
E. H. Amagat. Sur une forme nouvelle de la relation $F(v, p, t) = 0$ 888
E. H. Amagat. Sur la relation $\varphi(v, p, t)$ relative aux gaz 888
G. Lippmann. Expressions générales de la température absolue . 890
A Walter. Ueber die molecular-kinetischen Gesetze der Verdampfungswärme 892
G. Schmidt. Ueber die innere Pressung und die Energie überhitzter Dämpfe 895
J. Stefan. Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken 897
H. Helmholtz. Thermodynamik chemischer Vorgänge 897
A. Wassmuth. Ueber die specifische Wärme des stark magnetisirten Eisens 897
A. Wassmuth. Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang des Magnetisirens 899
A. Ritter. Ueber die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper 900

B. Gastheorie.

A. Ledieu. Sur la théorie cinétique des gaz 902
J W. Häussler Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie . . . 903
H. A. Lorentz. Over de bewegingen, die onder den invloed der zwaartekracht in eene gasmasse optreden 904
E. Warburg und L. v. Babo. Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichtigkeit bei flüssigen Körpern 905
L. Boltzmann. Zur Theorie der Gasdiffusion 907
K. Waitz. Ueber die Diffusion der Gase 907
V. Hausmaninger. Ueber die Veränderlichkeit der Diffusionscoefficienten zwischen Kohlensäure und Luft 908

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

A. Dronke. Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung 909
H. Résal. Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier 909
H. Lagarde. Recherches analytiques sur la méthode de M. Thoulet 909
H Lagarde. De l'évaluation de la conductibilité thermique par la mesure des temps pendant l'état variable 909
E. Lecher. Ueber Ausstrahlung und Absorption 910

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

Ch. M. Schols. Le calcul de la distance et de l'azimut au moyen de la longitude et de la latitude 912
E. Adan. Quelques mots sur une méthode de détermination de la latitude 913
F. Folie. Un mot encore sur la détermination de la latitude . . . 913

Seite

F. J. van den Berg. Over de onderlinge af wijking van den grooten cirkelboog 913
A. Hall. The density of the earth 913
Helmert. Einfluss der Lothablenkung auf Nivellements 913
A. Vogler. Die Grundzüge der Ausgleichungsrechnung 914
Zajíček. Lehrbuch der praktischen Messkunst 914
G. de Bernardinis. Sulla livellazione geometrica 914
O. Schreiber. Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz 914
Jordan. Teilung eines Vierecks 915
Jordan. Bemerkung zur Rectification eines Meridianbogens 915
A. Schell. Der Einschneide-Transporteur von Victor von Reitzner 915
Dorna. Relazione sopra una memoria del prof. Jadanza 915
Jadanza. Alcuni problemi di Geodesia 915
Ch. M. Schols. Studien over kaartprojectien 915

Capitel 2. Astronomie

J. C. Houzeau et A. Lancaster. Bibliographie générale de l'astronomie. II 916
J. C. Houzeau. Annonce bibliographique 916
J. C. Houzeau. Vademecum de l'astronomie 916
J. Thirion. Comptes rendus 917
K. Schelle. Lehrgang der populären Astronomie 917
F. J. Studnička. Mathematische Geographie 917
K. Israel-Holtzwart. Abriss der mathematischen Geographie . . 917
K. Israel-Holtzwart. Elemente der sphärischen Astronomie . . 917
J. Magenberg. Aufgaben der sphärischen Astronomie 918
C. Israel. Gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit und der Schiefe der Ekliptik 918
C. Israel. Astronomische Anwendung eines Satzes der Transversalenlehre 918
C. Israel. Gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit, Ekliptik, Schiefe und geographischen Breite 918
E. Collignon. Résolution graphique de certains problèmes de cosmographie 918
L. Janse. Oplossing eener prijsvraag 919
Ch. Rouget. Observations astronomiques sans mesure d'angles . . 919
N. Herz. Zur Berechnung der scheinbaren Sternörter 919
Th. von Oppolzer. Lehrbuch der Bahnbestimmung der Cometen und Planeten. I 919
K. Israel-Holtzwart. Elementare Darstellung der Gauss'schen Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnelemente 920
De Gasparis. Coordinate eliocentriche in funzione dell' anomalia media 920
De Gasparis. Serie fra anomalia e raggio vettore 920
De Gasparis. Prima approssimazione di un orbita con 5 dati . . 920
De Gasparis. Sur la théorie du mouvement des planètes 920
De Gasparis. Sur le problème de Kepler 920
J. Morrison. On the compensation of the eccentric anomaly . . . 920
Ch. V. Zenger. On the solution of Kepler's problem 921
J. C. Adams. On Newton's solution of Kepler's problem 921
R. Radau. Remarques concernant le problème de Kepler 921
Ch. V. Zenger. Solution rapide du problème de Kepler 922
Ch. V. Zenger. Tables pour calculer l'anomalie vraie 922

Seite
Ch V. Zenger. Solution du problème de Kepler pour des excentricités considérables 922
Stieltjes. Sur un théorème de M. Tisserand 923
Harzer. Neue Methode, die negativen und ungraden Potenzen der Entfernungen der Himmelskörper zu entwickeln 923
Scheibner. Ueber einige Arbeiten C. G. J. Jacobi's auf dem Gebiete der Störungstheorie 924
R. Radau. Sur un point de la théorie des perturbations 924
F. Tisserand. Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes 925
Gyldén. Sur la solution du problème des trois corps 925
Gyldén. Annäherungsmethode im Problem der drei Körper 925
Gyldén. Ueber die absoluten Elemente der Planetenbahnen 926
Lindstedt. Eine für die Störungstheorie wichtige Differentialgleichung 926
Lindstedt. Bemerkungen zur Integration einer gewissen Differentialgleichung 927
Gyldén. Erwiderung auf die Bemerkungen Lindstedt's 927
Bäcklund Zur Integration einer Differentialgleichung 927
Weiler. Bemerkung zu einem Aufsatze in No. 2383 928
T. N. Thiele. Ueber Prof. Gyldén's intermediäre Bahnen 928
Weiler. Nachträge zu der Abhandlung: Das Problem der drei Körper 928
O. Callandreau. Sur la détermination des variations séculaires et des éléments moyens des orbites 929
E Nieven. Note on a term in the perturbations of the action of Mars 929
G. W. Hill. Review of the „theory of the moons motion deduced from the law of universal gravitation“ by John N. Stockwell . 929
J. N. Stockwell. On Mr. Hill's review of the theory of moons motion 929
P. Lehmann. Tafeln zur Berechnung der Mondphasen 929
Th. v. Oppolzer. Syzygientafeln für den Mond nebst ausführlicher Anweisung für den Gebrauch derselben 930
Bäcklund. Ueber Störungen durch ein widerstehendes Mittel . . 930
Th. v. Oppolzer. Lösung des Kometenproblems 930
N. Herz. Zur Theorie der Bahnbestimmung eines Kometen 930
N. Herz. Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geometrischen Beobachtungen 931
Th. v. Oppolzer. Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen beim Cometenproblem 931
Gyldén. Ueber die von dem Maltheserritter d'Angos im Jahre 1784 mitgeteilte Cometenentdeckung 931
F. Folie. Sur un criterium astronomique certain de l'existence d'une couche fluide à l'intérieur de l'écorce terrestre 932
F. Folie. Existence et grandeur de la précession et de la nutation diurne, dans l'hypothèse d'une terre solide 932
C. Rozé. Der termes à courte période dans le mouvement de rotation de la Terre. Extrait par l'auteur 932
Glauser. Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten 932
Pechüle. Sur la favorabilité des stations relativement à l'ensemble des mesures micrométriques à faire pendant le passage de Vénus 923
Perry. Sur la future observation du passage de Vénus à Madagascar 933
Lehmann-Filhés. Kritischer Beitrag zur Geschichte der meteorischen Astronomie 933

Seite
G. Geelmuyden. Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale 933
Kerber. Refractionstheorie auf geometrischer Grundlage 934
Harzer. Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre 934
W. Meyer. Ueber die Strahlenbrechung im Innern eines Cometen . 934
Ceraski. Ueber die Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs 935

Anhang.

Haller von Hallerstein. Lehrbuch der Elementar-Mathematik . 936
Grex. Lehrbuch der Mathematik 936
Ad. Hochheim. Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra an höheren Lehranstalten 937
A. Büttner. Die Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra. Nebst einem Anhange, enthaltend Logarithmentafeln für die Zahlen von 1 bis 1000 937
F. Wallentin. Lehrbuch der Arithmetik für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen 938
H. C. E. Martus.. Mathematische Aufgaben 938
S. Dickstein. Die Geometrie in der Schule. I. 938
L. W. Meech. Complementary division 938
S. Dickstein. Ueber Cubikwurzelausziehung 938
A. Jurgielewicz. Der Unterricht im Rechnen 938
A. Jurgielewicz. Ueber den mathematischen Unterricht in den Töchterschulen 939
J. Henrici. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln . . 939
E. Becker. Logarithmisch - trigonometrisches Handbuch auf fünf Decimalen 939
J. G. Böhm. Kleines logarithmisch-trigonometrisches Handbuch . . 939
Th. Wittstein. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln . 939
W. C. Wittwer. Grundzüge der mathematischen Chemie 939

L

Verzeichnis

der Herren, welche für den vierzehnten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

A.	Herr	Prof. August in Berlin.
B.	-	Prof. Bruns in Leipzig.
Cly.	-	Prof. Cayley in Cambridge.
Csy.	-	Prof. Casey in Dublin.
Dk.	-	Prof. Dyck in München.
Dn.	-	Dickstein in Warschau.
E.	-	Prof. G. Eneström in Stockholm.
G.	-	Prof. v. Geer in Leiden.
Glr.	-	Prof. Glaisher in Cambridge.
Gm.	-	Dr. Gram in Kopenhagen.
Gr.	-	Prof. Günther in Ansbach.
H.	-	Prof. Hoppe in Berlin.
Hr.	-	Dr. Hamburger in Berlin.
H. St.	-	Prof H. Stahl in Aachen.
Hz.	-	Dr. Hurwitz in Königsberg i. P.
Jn.	-	Prof. W. Johnson in Annapolis U. S.
Kr.	-	Dr. S. Kantor in Prag.
L.	-	Prof. Lie in Christiania.
Ls.	-	Lazarus in Hamburg.
M.	-	Dr. F. Müller in Berlin.
Mi.	-	Dr. Michaelis in Berlin.
Mn.	-	Prof. Mansion in Gent.
My.	Herr	Dr. F. Meyer in Tübingen.
Mz.	-	Dr. Maynz in Ludwigslust.
No.	-	Prof. Netto in Berlin.
O.	-	Dr. Ohrtmann in Berlin.
Ok.	-	Prof. Oberbeck in Halle a. S.
Rg.	-	Prof. Rodenberg in Hannover.
Rn.	-	Dr. Rohn in Leipzig.
Rs.	-	Dr. Rosochatius in Berlin.
Sbt.	-	Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg.	-	Dr. Schlegel in Waren.
Schn.	-	Prof. Schumann in Berlin.
Scht.	-	Dr. Schubert in Hamburg.
Sn.	-	Dr. Simon in Berlin.
St.	-	Prof. Stolz in Innsbruck.
Std.	-	Prof. Studnička in Prag.
T.	-	Dr. Toeplitz in Breslau.
Tx.	-	Prof. Teixeira in Coimbra.
Ty.	-	Prof. Tichomandritzky in Petersburg.
V.	-	Prof. Voss in München.
Wn.	-	Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St.	-	Prof. W. Stahl in Aachen.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. Max Henoch, Berlin W, Victoriastr. 29.

Dr. Carl Ohrtmann

geboren am 15. November 1839 zu Berlin,
gestorben am 22. April 1885 zu Berlin.

Kurz vor Vollendung dieses Bandes wurde uns zu unserem grossen Schmerze unser lieber Freund, der Oberlehrer Dr. Carl Ohrtmann, nach langen schweren Leiden durch den Tod entrissen.

Auf dem Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Berlin durch Professor Schellbach für die mathematischen Wissenschaften gewonnen, studirte Carl Ohrtmann von 1859 bis 1862 zu Berlin, Heidelberg und Göttingen, wurde 1863 Mitglied des unter Schellbach's Leitung stehenden mathematisch-pädagogischen Seminars und 1866 Lehrer der Mathematik am Königlichen Realgymnasium zu Berlin. Bei seinen weiteren mathematischen Studien vermisste er lebhaft ein Hülfsmittel, das die Jünger der Mathematik in den Stand setzte, sich wenigstens einen allgemeinen Ueberblick über das Fortschreiten ihrer Wissenschaft zu verschaffen. Ihm war es vorbehalten, diese Lücke in der mathematischen Litteratur auszufüllen.

Im Jahre 1869 begann Carl Ohrtmann die ersten Vorarbeiten zur Begründung des „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik“, das nach dem Muster der von der hiesigen Physikalischen Gesellschaft herausgegebenen „Fortschritte der Physik“ eine Uebersicht über alle neuen Erscheinungen auf dem umfangreichen Gebiete der mathematischen Wissenschaften zu geben bestimmt war. „Nicht weil er sich für den Fähigsten zur Herausgabe desselben hielt“, wie er in dem Vorworte zum ersten Bande bescheiden hervorhebt, sondern weil er durchdrungen war von der Unentbehrlichkeit eines solchen Werkes, machte er sich an die Ausführung seines Planes. Die stets wachsenden Schwierigkeiten, welche ein solches Unternehmen mit sich bringt, schreckten ihn nicht zurück. Unterstützt von einer erfreulichen

Zahl von Berufsgenossen, welche er für seine Idee zu begeistern wusste, und ermutigt durch den wohlwollenden Rat wissenschaftlicher Autoritäten, sammelte er mit unermüdlichem Fleisse Journalabhandlungen und selbständige Werke mathematischen Inhalts, ordnete sie nach den einzelnen Disciplinen und verteilte sie unter die Mitarbeiter, deren Berichte dann in systematischer Reihenfolge gedruckt wurden. Im Februar 1871 erschien der erste Band, welcher die Litteratur des Jahres 1868 umfasst.

Um das angefangene Werk fortzusetzen und immermehr in einer der Wissenschaft würdigen Weise zu vervollkommnen, opferte Ohrtmann alle Kräfte und alle Zeit, welche ihm seine amtliche Thätigkeit übrig liess. Es war ihm vergönnt, 15 Jahrgänge fertig zu stellen, die jetzt in 14 Bänden erschienen sind. Auch der XV. Band (Jahrgang 1883) wurde von ihm fast bis zum Druck gefördert, Band XVI vorbereitet.

Selbst auf dem schmerzensreichen Krankenlager, auf das er vor fast einem Jahre geworfen wurde, arbeitete Ohrtmann an dem Jahrbuche unermüdlich weiter. In der Beschäftigung mit dieser seiner Schöpfung fand sein Geist Trost und Erhebung, wenn der gebrechliche Körper den schweren Leiden zu erliegen drohte. Mit inniger Freude erfüllte ihn auf seinem Sterbebette die Nachricht, dass es uns, die wir fünfzehn Jahre hindurch mit ihm an der Redaktion des Jahrbuches gemeinschaftlich gearbeitet haben, gelungen war, durch Hinzuziehung neuer Kräfte die Gewähr für das Fortbestehen seines Unternehmens zu erhöhen.

In dem „Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik" gründete Carl Ohrtmann sich ein schönes ewiges Denkmal und verpflichtete alle Jünger der Wissenschaft zu bleibendem Danke. Wir aber halten es für eine heilige Pflicht der Freundschaft, sein Andenken auch dadurch zu ehren, dass wir ferner nach Kräften an dem mit ihm begonnenen Werke fortarbeiten.

Berlin, den 27. April 1885.

Felix Müller. Albert Wangerin.

Bemerkung.

In Folge einer längeren Krankheit des Herausgebers ist trotz aufopferndster Unterstützung eine Verzögerung im Erscheinen des 14. Bandes nicht zu vermeiden gewesen. Auch haben sich trotz grösster Sorgfalt mancherlei Auslassungen und Unzuträglichkeiten eingeschlichen. Seitens der Redaction wird Alles geschehen, um diese Mängel noch nachträglich im folgenden Bande auszugleichen. Wir richten indes an die Herren Fachgenossen die ergebene Bitte, uns durch Mitteilung von etwa bemerkten Mängeln unterstützen zu wollen. Die Verzögerung im Erscheinen wird sich nur auf den 14. Band erstrecken, da alle Schritte getan sind, um den Druck des 15. Bandes zur gewohnten Zeit beginnen und beenden zu können.

Wir benutzen die Gelegenheit zur Wiederholung der Bitte an die Herren Fachgenossen, uns durch rechtzeitige Uebersendung von Separatabzügen ihrer Arbeiten, namentlich Programmen und in nicht speciell mathematischen Zeitschriften erscheinende Arbeiten zu unterstützen.

O.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

TH. v. OPPOLZER. Note über eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsternis. Wien. Ber. LXXXVI. 790-794.

Fragment 74 in Bergk's Ausgabe des Archilochos enthält die offenbar auf Autopsie beruhende Beschreibung einer Sonnenfinsternis. Gestützt auf seine bekannten Syzygientafeln untersuchte nun der Verfasser alle Phänomene dieser Art, welche in die ungefähre Lebenszeit des Dichters (700—640 v. Chr.) fallen, und fand, dass eine am 6. April 647 stattgehabte Finsternis in der Tat ganz gut den Angaben des Bruchstückes entspricht. Thasos, wo sich Archilochos in seinen letzten Lebensjahren aufhielt, gehörte der Zone an, innerhalb welcher die Verfinsterung total gesehen wurde. Allerdings aber begann dieselbe schon am Vormittag, während aus den Dichterworten geschlossen werden kann — nicht muss —, der Beginn sei auf eine Nachmittagstunde gefallen. Gr.

A. Riecke. Pythagoras. Zeit- und Lebensbild aus dem alten Griechenland. Leipzig, Berlin. Spamer.

Das vorliegende Buch will ein Lebensbild des Pythagoras geben. Der Verfasser beruft sich als Quellen seines Buches auf Herodot, Diodoros, Strabon, Diogenes Laertios, Dikaiarchos etc. Die Hauptsache aber hat doch wol die Phantasie des Verfassers hinzugetan. Dagegen aber, dass ein solches Phantasiegebilde als Lebensbild dargeboten wird, muss denn doch von Seiten der Wissenschaft Protest erhoben werden. Als Roman mag es gelten, aber bei der Prätension, mit der der Verfasser in einem Vorwort für seine Arbeit eintritt, kann das Erscheinen des Buches nur bedauert werden. O.

P. Tannery. Seconde note sur le système astronomique d'Eudoxe. Bord. Mém. (2) V. 129-149.

Das lange in seinem eigentlichen Wesen verkannte Planetensystem des Eudoxos ist bekanntlich von Schiaparelli geistreich reconstruirt worden. Jedem Wandelstern sind concentrische Sphären in solcher Anzal zugeteilt, dass, indem jede dieser Kugelflächen einer ihr speciell vorgeschriebenen Bewegung huldigt, durch das Zusammenwirken all' dieser Impulse der Planet die tatsächlich beobachtete Bahncurve (Hippopeda) beschreiben muss. Für die eigentlichen Planeten nun hat Henri Martin in seiner 1881 erschienenen Schrift „Mémoire sur les hypothèses astronomiques d'Eudoxe, de Calippe et d'Aristote" Schiaparelli's Theorie angenommen, für Mond und Sonne dagegen stellt er neue Hypothesen auf. Herr Tannery tritt gegen seinen Landsmann und zu Gunsten des Mailänder Astronomen in die Schranken. Er weist nach, dass Eudoxos ein wahrhaft hervorragender Astronom war, der nur in der Leugnung der solaren Eigenbewegung einen schwereren Fehler beging, obwol er geneigt ist, die Beobachtungshilfsmittel des Ersteren auf ein sehr niedriges Niveau herabzusetzen. Auch die Pole der Merkur- und Venussphäre fasst Martin anders auf, als Herrn Tannery zufolge die Handschriften gestatten. Gr.

P. Tannery. Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules. Bord. Mém. (2) V. 211-237.

Bretschneider's Interpretation jenes Stückes aus dem Commentar des Simplicius zur aristotelischen Physik, welches von den älteren Bemühungen um die Quadratur des Kreises handelt, hat sich in neuerer Zeit mehr und mehr als ungenügend herausgestellt. Philologen, welche sich später mit den betreffenden Stellen zu beschäftigen hatten, liessen aus naheliegenden Gründen die sachliche Seite unberührt, und erst der Engländer Allman ging über Bretschneider hinaus, indem er den in die Darstellung des Simplicius eingeflochtenen Urtext des Eudemos herzustellen bemüht war. Er gelangte auch zu einem für's Erste befriedigenden Resultate, doch blieben Herrn Tannery noch manche der Aufklärung bedürftige Punkte übrig, und ein Gleiches galt ihm für die Restitution, welche zwei um die Geschichte der exacten Wissenschaften hochverdiente deutsche Altertumsforcher, Diels und Usener, ihrerseits in Vorschlag gebracht hatten. Der Verfasser geht bezüglich des Eudemos von der an anderem Orte näher begründeten Annahme aus, die geschichtlichen Arbeiten desselben seien im Altertum fast gänzlich vernachlässigt worden. Proklos und alle Autoren, die nach dem vierten Jahrhundert unserer Aera lebten, hätten dieselben aus zweiter Hand gekannt, und speciell Simplicius wie Eutokios hätten lediglich aus der „κηρια“ betitelten Compilation eines gewissen Sporos geschöpft. Weiter erhalten wir den griechischen Text in neuer Recension, soweit er von der hippokratischen Kreisquadratur durch Möndchen handelt, und eine genaue französische Uebersetzung desselben, begleitet von einer Reihe scharfsinniger Noten, aus denen jetzt mit ziemlicher Gewissheit erhellt, welches Mass geometrischen Wissens etwa dem Hippokrates von Chios zuzuschreiben ist. Auch führt Herr Tannery noch trigonometrisch den Nachweis, dass Hankel im Unrecht war, wenn er behauptete, die Monde des Hippokrates seien die einzigen quadrirbaren, welche man mit Lineal und Zirkel zu verzeichnen im Stande sei. Gr.

H. G. ZEUTHEN. Fra Mathematikens Historie II-III.
Zeuthen T. (4) VI. 97-101.

Im ersten dieser beiden Aufsätze bemerkt der Verfasser, dass schon Euklid im neunten Stücke (Satz 35) der Elemente einen vollständigen Beweis der Summationsformel einer geometrischen Reihe geliefert hat, was meist, wie es scheint, übersehen worden ist.

In der zweiten Note giebt der von Apollonius im ersten Buche seiner Kegelschnittslehre geführte Beweis des Satzes 34 dem Verfasser Anlass zur folgenden Bemerkung. Wie Chasles gezeigt hat, ist es höchst wahrscheinlich, dass Euklid's Porismen vorzugsweise diejenigen Transversalensätze enthalten haben, welche jetzt die Grundlage der metrischen Behandlung der projectivischen Geometrie bilden. Ist dies der Fall, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass Euklid diese Sätze in seinem ebenfalls verloren gegangenen Werke über die Kegelschnitte verwendet hat, und es ist dann natürlich, dass Apollonius, welcher die beiden erwähnten Werke von Euklid kannte, in seinem eigenen grossen Werke über die Kegelschnitte viele der Beweise von Euklid aufgenommen hat. Daraus erklärt es sich, dass man bei Apollonius Beweise findet, welche sich in ihrer Anlage auf diese Sätze stützen, obgleich er sie kaum als so bekannt voraussetzen durfte, dass er sich mit einer Verweisung auf Euklid hätte begnügen können. Als einen solchen betrachtet Herr Zeuthen den Beweis des erwähnten Satzes Stück I. 34. Gm.

P. TANNERY. Aristarque de Samos. Bord. Mém. (2) V. 237-258.

Eine sehr dankenswerte Studie über die wichtigste astronomische Leistung des Aristarchos. Der Verfasser erinnert daran, dass selbst Anaxagoras, obgleich er über die Verfinsterungen und Mondphasen sich so ziemlich klar war, die Himmelskörper noch immer für platte Scheiben hielt, dass also im V. vorchristlichen Jahrhundert von wissenschaftlicher Sternkunde noch kaum die Rede sein konnte. Demokrit erkannte die Sphäricität von Mond

und Sonne, allein erst Philipp der Opuntier brach vollständig mit den Phantasmen der pythagoräischen Schule. Diesem Philipp wünscht der Verfasser in der Geschichte eine ehrenvollere Stelle eingeräumt zu wissen, als er sie bisher inne hatte. Aristarch's Verdienst gipfelt nämlich seiner Ansicht zufolge in seiner bekannten Anticipation des coppernicanischen Weltsystems, wogegen die schöne Methode, die Distanz der Erde von der Sonne zu bestimmen, in eine ältere Zeit hinaufreichen und entweder von Eudoxos oder auch von dem genannten Philippos herrühren soll. Eine wenig beachtete aristotelische Stelle spricht allerdings dafür, dass der Grundgedanke dieses Verfahrens ein höheres Alter besitzen muss. Das als Bestandteil des „μικρὸς ἀστρονομούμενος“ auf uns gekommene Buch des Aristarch wird im Einzelnen durchgesprochen; es kommen darin auch mathematische Sätze von Bedeutung vor. So wusste der Autor z. B., dass, für $\alpha < 90°$, der Bruch $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ mit wachsendem α kleiner, dagegen $\frac{\tang\alpha}{\alpha}$ mit wachsendem α grösser wird. Ebenso scheint ihm die Relation

$$\frac{43}{37} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6}}$$

bekannt gewesen zu sein. „C'est une preuve incontestable de l'emploi“, so drückt sich Tannery bei dieser Gelegenheit aus, „chez les anciens d'un procédé de calcul dont la théorie appartient sans conteste aux modernes, mais dont les premières applications sont trop simples pour ne pas avoir une origine très-reculée.“ Um so mehr wundert es uns, dass nicht auch auf die bei Aristarch erstmalig vorkommende merkwürdige Näherung

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} = \frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

ausdrücklich aufmerksam gemacht wurde. Anhangsweise verbreitet sich der Verfasser noch über andere Zahlen, welche das Altertum für die wichtigste Linearconstante der Astronomie aufstellte, namentlich über einen sehr merkwürdigen Passus in der

Ketzerpolemik des heiligen Hippolyt, von welcher die Geschichtschreiber bis dahin keine Notiz genommen hatten. Gr.

P. Tannery. Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède. Bord. Mém. (2) V. 49-63.

Pappos richtet im vierten Buche seiner „mathematischen Sammlung" einen leisen Tadel sowol gegen Apollonios wie gegen Archimedes, weil beide die Methoden, welche zur Auflösung „ebener" und „körperlicher" Probleme dienen, nicht scharf genug aus einander gehalten hätten. Man war sich bislang nicht völlig klar über den Sinn dieser Worte des Commentators. Der Verfasser aber unternimmt es, deren Sinn wenigstens bezüglich des Zweitgenannten aufzudecken, indem er bezüglich des Apollonios sich begnügt, die Hypothese von Hultsch zurückzuweisen. In der 18ten Proposition seiner Schrift über die Schneckenlinien beweist Archimedes, dass eine an die Spirale gelegte Tangente eine im Pol senkrecht zur Axe errichtete Gerade so schneiden kann, dass das abgeschnittene Stück dieser Senkrechten dem Umfange des ersten Erzeugungskreises gleich ist, und stützt seinen Beweis auf das folgende Lemma: Hat man in einem Kreise vom Mittelpunkt O eine Sehne AB, und ist $\angle AOB = \varphi$, so kann man durch O eine die Sehne in E, die Peripherie in D und eine in A an den Kreis gelegte Tangente in F schneidende Sekante so ziehen, dass

$$\frac{ED}{AF} < \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

werde. Dieses Lemma aber gewinnt er wiederum nur durch eine Construction, welche ohne Zuhülfenahme von Kegelschnitten nicht zu leisten ist, mithin also unter die körperlichen Aufgaben des Pappos zu rechnen ist. Herr Tannery zeigt aber, dass und wie der Beweis auch mit ganz elementaren Hülfsmitteln geführt werden kann, und bestätigt damit die Richtigkeit des erhobenen Vorwurfes insofern, als allerdings Archimedes nicht grade immer die nächsten Wege betrat, die ihn zum gewünschten Ziele führen mussten. Gr.

P. TANNERY. Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus. Darb. Bull. (2) VI. 99-108.

Proklos citirt in seinem Commentar zum ersten Buch der „Elemente" sechsmal den Heron Alexandrinus, einmal als Mechaniker, in den übrigen Fällen dagegen als Geometer. Herr Tannery legt sich nun die Frage vor, woher wohl diese Citate stammen mögen: ob aus einem uns unbekannten Euklid-Commentar des Heron oder aus anderen Schriften desselben? Henri Martin hat sich für die Möglichkeit eines Werkes ersterer Art entschieden. Mit Recht bemerkt der Verfasser, dass Proklos das heronische Original gar nicht gekannt, sondern selbst wieder seine Nachrichten nur aus zweiter Hand, durch Porphyrios und Pappos empfangen zu haben scheine. Alles in Allem ist aus den Worten des Proklos kein Anhalt dafür zu gewinnen, dass Heron die Elemente mit Noten versehen habe, wohl aber, dass derselbe, wofür auch andere Anzeichen sprechen, ein selbständiges Lehrbüchlein für geometrische Praktiker verfasste. Ihr entstammen vielleicht einige Angaben aus dem Geschichtswerke des Eudemos, welche Proklos gelegentlich verwertet, während ihm das Original selbst unbekannt geblieben sein dürfte. Jenes Theorem, welches in den Lehrbüchern als „Lehrsatz des Pappos" aufgeführt zu werden pflegt, ist unser Verfasser geneigt, dem Heron zuzuschreiben. Gr.

B. SEPP. Zu Posidonius Rhodius. Bair. Bl. XVIII. 397-399.

Dieser stoische Philosoph spielt auch in der Geschichte der exacten Wissenschaften eine gewisse Rolle, namentlich wegen seines auf richtigen Ideen beruhenden Versuches, den Umfang der Erde zu bestimmen. Seine Personaldaten waren bisher nur unvollkommen bekannt. Der Verfasser sucht hier wahrscheinlich zu machen, dass derselbe 128 v. Chr. geboren und 44 v. Chr. gestorben sei. An seinem grossartigen Versuch einer allgemeinen Kosmographie habe er die letzten sechs Jahre seines Lebens gearbeitet. Gr.

WINTERBERG. Der Tractat Franco's von Lüttich: „De quadratura circuli.“ Abh. z. G. d. M. IV. 135-190.

Beschreibung, Inhaltsangabe und Abdruck des Manuscriptes aus der Vaticanischen Bibliothek, siehe Cantor, Gesch. der Math. I. 649-650. O.

E. NARDUCCI. Intorno a due trattati inediti d'Abaco. Bonc. Bull. XV. 111-135.

Due trattati inediti d'Abaco. Bonc. Bull. XV. 135-162.

E. NARDUCCI. Notizia di due trattati d'Abaco manoscritti del secolo XII. Rom. Acc. L. (3) IV. 324-326.

Nachdem der Verfasser erwähnt hat, dass durch die Veröffentlichungen von Chasles, Treutlein, Friedlein und besonders durch Boncompagni's treffliche Ausgabe des Atelhart'schen Abakus unsere Kenntnis mittelalterlicher Zähl- und Rechnungsweisen eine ziemlich vollständige geworden sei, giebt er Aufschluss über zwei neue Abakus-Traktate, welche ihn seine bibliothekarischen Studien haben auffinden lassen. Der eine führt den Titel: „Turchilius, Reguncule super Abacum“, der andere ist anonym. Einer detaillirten Jnhaltsanalyse der bezüglichen Handschriften folgt die textuelle Wiedergabe der beiden Rechenbücher. Dass das erstere derselben angelsächsischen Ursprungs sei, ist so gut wie gewiss, indem der bezügliche Codex u. a. auch eine Strichrose aufweist, in welchem die Windnamen lateinisch und altenglisch sich geschrieben finden. Den Namen des Schriftstellers glaubt Herr Narducci übrigens auf einen dänischen Stamm zurückführen zu sollen. Gr.

M. STEINSCHNEIDER. Supplément à la notice sur les tables astronomiques attribuées à Pierre III. d'Aragon (Bulletino, T. XIII., pag. 413-436, Luglio 1880). Bonc. Bull. XV. 170-174.

In der Abhandlung, welche die Ueberschrift nennt, war Herr Steinschneider zu dem Ergebnis gekommen, dass der in der Vorrede des Tafelwerkes erwähnte König Peter IV. von Aragonien (1336-1387), und dass der als Jakob Carsi bezeichnete Mathematiker mit dem bekannteren Jakob Carsono eine und dieselbe Person sei. Kürzlich nun veröffentlichte Balaguer y Merino, Mitglied der katalonischen Akademie, eine Abhandlung, durch welche Steinschneider's Resultat die wünschenswerteste Bestätigung erfährt. Um 1360 liess nämlich eben jener König durch einen gewissen Dalmacus Planes, dessen Name gleichfalls in der Vorrede vorkommt, eine astronomische Schrift ausarbeiten. Der Artikel Balaguer's wird im spanischen Originaltexte abgedruckt.

Gr.

H. Suter. Eine bis jetzt unbekannte Schrift des Nic. Oresme. Schlömilch Z. XXVII. Hl. A. 121-125.

Die Stiftsbibliothek zu St. Gallen enthält einen Katalog zu der aristotelischen Meteorologie, welcher den hervorragendsten Mathematiker des XIV. Jahrhunderts, Nikolaus D'Oresme, zum Verfasser hat. Es geht u. A. daraus hervor, dass dieser Mann von der pythagoräischen Doctrin einer Erdumdrehung Kenntnis hatte, sich aber aus den bekannten Gründen dagegen entschied. Auch hielt er, der gewaltige Gegner der „Astrologia judiciaria“, noch ruhig fest an der Irrlehre von der unheilvollen Bedeutung einer Kometenerscheinung. Gr.

J. P. Gram. Le triparty de Nicolas Chuquet. En Lærebog i Arithmetik og Algebra fra 1484. Zeuthen T. (4) VI. 126-138.

Eine Analyse der erwähnten Arbeit, welche im XIII. u. XIV. Bande des „Bulletino di bibliografia“ etc. von Boncompagni veröffentlicht worden ist, s. F. d. M. XIII. 1881. p. 8. Gm.

O. Z. Bianco. Note biografiche intorno a Giovan Francesco Peverone matematico Cuneese. Torino Att. XVII. 320-324.

Der Abhandlung, welche auch als Sonderabdruck im Verlage von H. Löscher in Turin erschienen ist, entnehmen wir die folgenden Daten. Johann Franz Peverone ward 1509 in Cuneo geboren; sein zweiter Name scheint nicht ganz festzustehen, da er an anderer Stelle auch Johann Baptist genannt wird. Er bekleidete in seiner Vaterstadt höhere bürgerliche Aemter, kämpfte auch mit den Waffen für dieselbe, verlegte aber bald darauf seinen Wohnsitz nach Mailand, wo er im Alter von fünfzig Jahren verstarb. Ein Lehrbuch der Arithmetik und ein eben solches der Geometrie bezeugten ebenso wie seine reiche Hinterlassenschaft mathematischer Instrumente Peverone's Neigung für seine Lieblingswissenschaft. Leider aber erfahren wir von dem Inhalte der genannten Bücher nichts Näheres, indem sich der Verfasser begnügt, auf die bezüglichen Angaben eines Riccardi, Libri, Todhunter, Gourand und Boncompagni hinzuweisen. Gr.

J. Perott. Sur une arithmétique espagnole du 16[me] siècle. Bonc. Bull. XV. 163-170.

Von der Arithmetik des Predigermönches Juan de Ortega existiren sieben Auflagen, welche der Verfasser mit bibliographischer Genauigkeit beschreibt. Die italienische Ausgabe von 1515 ist dadurch merkwürdig, dass in ihr zur Ausziehung der Quadratwurzel die bereits den Arabern bekannte Näherungsformel

$$\sqrt{a} = E(\sqrt{a}) + \frac{a - [E(\sqrt{a})]^2}{2E(\sqrt{a}) + 1}$$

verwendet wird, unter $E(\sqrt{a})$ die grösste in $\sqrt{a}$ steckende Zahl verstanden. Im Uebrigen aber scheint sich Ortega bei der Wurzelausziehung eines Verfahrens bedient zu haben, welches auf die ganzzahlige Auflösung der (Pell'schen) Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

hinauslief. Er schiene, wenn Perott's Vermutung richtig ist, somit zur Herstellung von Näherungen, wie

$$\sqrt{128} = 11 + \frac{16}{51}, \quad \sqrt{756} = 27 + \frac{109}{220} \cdots$$

bereits über einen kettenbruchartigen Algorithmus verfügt zu haben. Gr.

E. WIEDEMANN. Sulla storia delle scienze naturali presso gli Arabi. Bonc Bull. XIV. 718-720.

Die von Dr. Sparagna übersetzte Arbeit beschäftigt sich mit einem auf der Leipziger Stadtbibliothek befindlichen Manuscripte des Jahja ibn Muhammed al Gâffarî (1511) über merkwürdige Naturproducte. Es handelt sich in den mitgeteilten Stellen um die Bestimmung des specifischen Gewichtes von Edelsteinen und Metallen, zu welchem Zwecke Al Khazînî in seiner „Weisheitswage“ einen eigenen Apparat angab. Eine vergleichende Tabelle zeigt uns, dass die arabischen Physiker gar nicht so ungenau verfuhren; für Blei z. B. fanden drei verschiedene Experimentatoren des Mittelalters die Werte 11,29; 11,35; 11,32, während heutzutage 11,35 als Durchschnittswert angenommen zu werden pflegt. Gr.

A. LINDHAGEN. Nicolai Coppernici de hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus. Stockh. Handl. VI. Nr. 12.

Coppernicus' kleine Schrift: „De hypotesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus“ ist zum ersten Mal von M. Curtze in „Inedita Coppernicana“ (Leipzig 1878, p. 5-17) nach einer leider etwas unvollständigen Wiener Handschrift herausgegeben. Eine andere vollständige Handschrift desselben „Commentariolus“ ist von Herrn Lindhagen in einem, der Bibliothek der Schwedischen Akademie der Wissenschaften gehörigen Exemplare von Coppernicus „De revolutionibus orbium coelestium“ (Basel 1566) aufgefunden und hier veröffentlicht. In der Ein-

leitung sagt der Herausgeber, dass die Handschrift wahrscheinlich um das Jahr 1600 in der Schweiz oder im nördlichen Italien geschrieben ist. G. E.

S. GÜNTHER. Peter und Philipp Apian, zwei deutsche Mathematiker und Kartographen. Ein Beitrag zur Gelehrten-Geschichte des XVI. Jahrhunderts. Prag. Abh. 1882.

Die umfangreiche, 134 Quartseiten umfassende Abhandlung giebt eine eingehende, alle Richtungen erschöpfende Darstellung des Lebens und der wissenschaftlichen Leistungen der beiden bekannten Gelehrten. Peter Apian ist geboren in Leisnig (Herzogtum Sachsen). Er studirte in Leipzig und Wien und verbrachte den grössten Teil seines Lebens an der Universität Ingolstadt, wo er am 21. Juli 1552 starb. Sein Sohn Philipp ist geboren am 14. September 1531 zu Ingolstadt. Er wurde nach seinen Studien und Reisen Nachfolger des Vaters in Ingolstadt, aber im Jahre 1569 seines Amtes der religiösen Verhältnisse wegen entsetzt. Er folgte einer Berufung nach Tübingen. Aber auch diese Stellung musste er 1583 aufgeben, da er sich weigerte die Concordienformel zu unterschreiben. Er starb am 12. November 1589. O.

A. FAVARO. Intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero. Bonc. Bull. XV 1-48.

In seinen bekannten verdienstlichen „Notizen zur Kulturgeschichte der Schweiz“ (Nr. 330) sagt Rudolf Wolf: „Ich hatte 1862 in meinen Biographieen eine ganz kurze Notiz über einen freiburgischen Mathematiker Bartholomée Souvey oder Soverus gegeben, aber sie war meinem Gedächtnisse total entschwunden, als mich Professor Favaro in Padua zu Anfang vorigen Jahres, d. h. volle zwanzig Jahre später, nach diesem Manne fragte, und auch die auf meine Bitte hin durch Herrn Professor Buman in Freiburg in den dortigen Archiven veranlassten Nachforschungen

waren von so dürftigem Erfolge, dass ich Herrn Favaro nur einige wenige Anhaltspunkte mitteilen konnte. Um so freudiger war ich überrascht, als ich von Letzterem die volle funfzig Quartseiten füllende Abhandlung „Intorno etc.“ erhielt und die Masse von Notizen und Belegen kennen lernte, welche der gelehrte Verfasser zu sammeln und zu einer ziemlich vollständigen Biographie des sozusagen vergessenen Mannes zu verarbeiten wusste“... Mit diesen Worten einer Autorität auf dem Gebiete der mathematisch-geschichtlichen Forschung dürfte der Allgemeincharakter von Herrn Favaro's Abhandlung zur Genüge gekennzeichnet sein. Souvey ward um 1577 zu Corbières im Kanton Freiburg geboren, studirte in letzterer Stadt und im Collegium Borromeum zu Mailand, war, nachdem er in den Jesuitenorden eingetreten, folgeweise Lehrer in Turin und Rom und erhielt 1624 als zweiter Nachfolger Galilei's die mathematische Professur an der Universität Padua. Am 23. Juli 1629 ist er daselbst verstorben. Sein bereits im II. Bande von Kästner's „Geschichte der Mathematik“ besprochenes Hauptwerk heisst: „Curvi ac recti proportio, Patavii 1629.“ In demselben findet man mehrere damals neue oder doch ganz wenig bekannte Lehrsätze über Kreisbögen und trigonometrische Linien, wie z. B. den folgenden:

$$\left(\frac{\text{chord}\,\alpha}{\text{tang}\,\alpha}\right)^2 = \frac{2}{\sec^2\alpha + \sec\alpha}.$$

In die höhere Geometrie jener Zeit geht Souvey ziemlich tief ein und setzt seinen Lesern namentlich im Sinne des Pappos den Unterschied zwischen linearen, ebenen und körperlichen Problemen correct auseinander. Die Kegelschnitte sowol wie die bekannteren transcendenten Curven lässt er durch Bewegung entstehen; überhaupt zeigt er sich in der Curvenlehre gut beschlagen, obgleich es ihm selbstverständlich nicht gelingt, zu dem ihm vorschwebenden Endziele, der Kreisquadratur, durchzudringen. Ein Anhang des genannten Buches ist den gelehrten Streitigkeiten des Autors mit Gloriosi über die Natur der Kometen gewidmet. Lange nach Souvey's Tode wurde sein Name wieder in die Discussion gezogen durch seinen wohlbekannten Ordensgenossen Paul Guldin, der, allerdings mit Unrecht, die Behauptung auf-

stellte, Cavalieri habe die Grundidee seiner trefflichen „Geometria indivisibilium“ teils dem Kepler, teils dem Soverus entnommen. Letzterer hinterliess ausgearbeitete Manuscripte in grosser Anzahl, von denen manche, wie die Bemerkungen zum „Novum Organon“ des Francis Bacon, einen erheblichen zeitgeschichtlichen Wert besessen haben oder noch besitzen mögen.

Gr.

Ch. Henry. Sur les deux plus anciens traités français d'algorisme et de géométrie. Bonc. Bull. XV. 49-71.

Beschrieben ist hier ein Algorismus der Bibliothek von St. Genovefa zu Paris, der keinen bestimmten Autor hat und der Zeit Philipp's des Kühnen entstammt. Chasles hatte sich vergeblich bemüht, den Codex aufzufinden. Die arithmetische Abhandlung, welche Herr Henry veröffentlicht, ist nur ganz kurz; ihr folgt aber eine geometrische, in welcher die wichtigsten planimetrischen Rechnungsaufgaben sammt der Lösung in bestimmten Zahlen zusammengestellt sind. Die Angaben des Herausgebers hätten gewaltig vermehrt werden müssen, wenn der schwierige altfranzösische Text leichtverständlich werden sollte.

Gr.

Mouchez. Discours. C. R. XCV. 399-402.

Rede, die bei der Enthüllung des Fermat-Denkmals in Beaumont-de-Lomagne am 20. August 1882 gehalten worden ist. Näher eingegangen auf Fermat's Verdienste um die Mathematik wird nicht. O.

P. Fermat. Manuscrits inédits, extraits par M. E. Lucas.

Magische Quadrate auf 196 Seiten und magische Würfel auf 64 Seiten. Mn.

A. FAVARO. Sul carteggio Galileiano, testè edito dal Marchese Giuseppe Campori. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 551-571.

Besprechung der im Titel angegebenen Publication und Angabe der Briefe, nach Jahren und Namen geordnet.

O.

A. FAVARO. Intorno ad un episodio non ancora chiarito del processo di Galilei. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 715-740.

Die Note bespricht den Umstand, dass die Unterschriften dreier Cardinäle, die doch in dem Galilei verurteilenden Tribunal sassen, unter dem Urteil selbst fehlen. O.

A. FAVARO. Intorno ad una nuova edizione delle opere di Galilei. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 83-132.

Die Notiz bespricht alles das, was bei einer neuen Gesammtausgabe der Werke Galilei's zu beachten wäre.

O.

G. CAMPORI. Carteggio Galileiano con note ed appendici. Modena. Società tipografica.

Kaum einer der hervorragenden Männer, durch welche unsere Methode der Naturforschung in die jetzt von ihr eingeschlagenen Pfade gelenkt wurde, hat so allgemein die Aufmerksamkeit weiterer Kreise auf sich gezogen, wie Galileo Galilei, dessen tragische Schicksale ihm stets noch ein besonderes Relief verliehen. So konnte man denn, zumal als Albèri's treffliche Gesammtausgabe erschienen war, die Erwartung hegen, dass für die Kenntnis der Lebensumstände und Leistungen des grossen Mannes alles Mögliche geschehen, alles vorhandene Material verwertet worden sei. Diese Erwartung trog jedoch; Professor

Favaro in Padua hat im Verlaufe der letzten Jahre eine ganze Anzahl kleinerer und grösserer Aufsätze über Galilei veröffentlicht, aus denen hervorging, dass noch ein sehr reichhaltiger Stoff zu bewältigen sei, auch stellt derselbe eine Gesammtausgabe Galilei'scher Werke und Correspondenzen in Aussicht, welche diejenige Albèri's vollständig in den Hintergrund zu drängen bestimmt sein dürfte. Gleichwol wird in Fachkreisen wol allgemeines Staunen geherrscht haben, als man die Nachricht von dem grossartigen Werke des Marchese Campori erhielt, in welchem ungefähr 650 an Galilei gerichtete Briefe, grösstenteils zum ersten Male, veröffentlicht und mit den nötigen Erläuterungen versehen wurden. Dieser kostbare Schatz ruhte bisher ungehoben im Hausarchive der mit der Familie des grossen Physikers weitläufig verwandten Geschlechtes Tosi-Galilei, sechs starke Bände erfüllend, und aus der Hinterlassenschaft des letzten Trägers dieses Namens gelangten sie durch Vermittelung des Buchhändlers Dotti in die Hände des gegenwärtigen Herausgebers. Derselbe hat sich jedoch, wie schon bemerkt, nicht darauf beschränkt, die einzelnen Schriftstücke einfach abdrucken zu lassen; er hat vielmehr zahlreiche Briefe noch hinzugefügt, welche bisher unbenutzt auf der Nationalbibliothek zu Florenz lagen, hat jedem einzelnen Stücke eine genaue Inhaltsübersicht beigegeben und vor das Ganze eine sehr verdienstliche „Cronologia Galileiana“ gestellt.

Detaillirte Mitteilungen über den Inhalt der Briefschaften zu geben, ist an diesem Orte nicht wol möglich; es sei in dieser Beziehung nur verwiesen auf die Referate, welche über das Campori'sche Werk von einem Ungenannten in der „Wissenschaftl. Beilage zur Allg. Zeitung“, von Favaro in Vol. VIII. der „Atti“ des venetianischen Institutes, von M. Cantor in Jahrg. 28, Heft 1 der „Zeitschr. f. Math. und Physik“ und von dem Unterzeichneten im Jahrg. 17, Hft. 3 der „Vierteljahrsschr. der astron. Gesellsch.“ erstattet worden sind. Nur einiger Hauptmomente sei auch hier kurze Erwähnung getan. Von Briefen Sagredo's, des vertrauten Freundes Galilei's, kannte man bislang nur 26, während uns hier deren 59 geliefert werden; dieselben sind allerdings mehr in kulturhistorischer Beziehung und auch deshalb wichtig, weil aus

ihnen manche Streiflichter auf die persönlichen nahen Beziehungen beider Männer fallen: doch interessiren auch sonst Sagredo's Versuche mit dem Magneten und die von letzterem angeregte langgedehnte Discussion der Frage, ob wirklich bei Erdumsegelungen, wie der des „Magaglianes“, ein Tag gewonnen oder verloren werden könne. Weitere 59 Briefe entfallen auf den freisinnigen Mönch Micanzio, der in der Geschichte von Galilei's Bemühungen um Herstellung einer Pendeluhr mehrfach genannt wird. Derselbe macht aus seinem Skepticismus in gewissen Glaubensfragen kein Hehl und spielt auch den Mittelsmann, wenn es sich darum handelt, Galilei'sche Manuscripte im Auslande unter die Presse zu bringen. Für die Geschichte der Mathematik sind von Bedeutung einzelne Briefe des bekannten Jesuiten Bonaventura Cavalieri, der über eine zur Herausgabe vorbereitete sphärische Trigonometrie Mitteilungen macht, und u. A., zweifellos ganz unabhängig von Albert Girard, den richtigen Ausdruck für den Flächeninhalt eines Kugeldreieckes angiebt. Zur Personalgeschichte Galilei's verzeichnen wir die noch von Wohlwollen und anscheinend aufrichtiger Verehrung getragenen Zuschriften des Pater Scheiner, der damals (1615) also noch nicht zum offenen Feinde geworden sein konnte, obwohl zwei Jahre früher bereits zwischen ihm und Galilei ein ziemlich hitziger Prioritätsstreit anlässlich der Entdeckung der Sonnenflecke ausgefochten worden war. Niccolini, der toscanische Geschäftsträger bei der Curie, und seine hochherzige Gattin Caterina erscheinen ebenfalls unter den Briefstellern, und man ersieht, mit welchem Eifer namentlich die Letztere sich bestrebte, das traurige Loos des gelehrten Landsmannes einigermassen zu mildern. Dem Werke folgen sechs sehr inhaltreiche Noten. Die erste derselben stellt gemäss dem noch vorhandenen, nach allen Regeln der Astrologie gefertigten Horoscope fest, dass Galilei am 15. Februar 1564 das Licht der Welt erblickte, die zweite und dritte bringen neue Nachrichten über Kindheit und Studiengang desselben, die vierte beschäftigt sich mit einem das Fernrohr betreffenden Schreiben des Grafen Fontanelli, die fünfte handelt von Galilei's Arbeiten zu Gunsten der Bestimmung der Meereslänge, die sechste endlich bespricht

Galilei's Stellung zur Sterndeuterei. Den Schluss bildet das im Notariatsarchiv zu Florenz aufbewahrte Testament Galilei's und der Wiederabdruck einer von Venturi im Jahre 1820 der Modenesischen Akademie eingereichten Denkschrift, in welcher nachgewiesen wird, dass das unter dem Namen „Celatone" bekannt gewordene Werkzeug nicht, wie man vermutet hatte, ein Binoculartelescop gewesen sei. Govi und Favaro sprechen sich in gleichem Sinne aus. Gr.

A. Genocchi. Presentazione di un volume „Correspondance inédite de Lagrange et D'Alembert." Torino, Atti XVII. 531-533.

Bericht über den Inhalt des 13ten Bandes der Werke von Lagrange bei Gelegenheit der Uebergabe desselben an die Pariser Akademie. O.

S. Günther. Il carteggio tra Gauss e Sofia Germain. Traduzione dal Tedesco dell' A. Sparagna. Bonc. Bull. XV. 174-175.

Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 19.

David. Notice sur les oeuvres de Cauchy. Toul. Mém. (8) IV. 178-201.

Der Verfasser ist der Meinung, dass Cauchy's Verdienste gegenüber denen von Gauss und Jacobi zu sehr in Vergessenheit geraten sind. Er unternimmt es daher, die Arbeiten und Leistungen Cauchy's in's Gedächtnis zurückzurufen, indem er eine Analyse seiner Arbeiten, speciell derer aus dem Gebiete der Functionentheorie giebt. O.

Jacob Steiner. Gesammelte Werke. Herausgegeben von K. Weierstrass. Bd. II. Berlin. G. Reimer.

Fortsetzung und Schluss der im vorigen Bande der F. d. M. p. 22 besprochenen Ausgabe der Werke Steiner's. Sie enthält die übrigen Arbeiten des berühmten Geometers. Zu bemerken ist nur, dass zwei der Arbeiten: „Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum überhaupt", welche bisher nur in französischer Sprache publicirt waren, nach dem ursprünglichen deutschen Originalmanuscript veröffentlicht sind. In Steiner's Nachlass hat sich ausser Zusätzen und Berichtigungen nichts Bemerkenswertes gefunden. O.

Faye, Laboulaye. Discours. C. R. XCV. 467-471.

Reden bei dem Begräbnis von Liouville am 11. September. O.

G. Bauer. Gedächtnisrede auf Otto Hesse. Münch. Abh. 1882.

Ludwig Otto Hesse ist geboren am 22. April 1811 zu Königsberg in Preussen. 1832 bezog er die Königsberger Universität zu jener Zeit, wo Königsberg seine mathematische Glanzperiode feierte, gekennzeichnet durch die Namen Jacobi, Bessel, Richelot und F. Neumann. 1840 promovirte er mit der Arbeit „Ueber die Oberflächen zweiten Grades" und habilitirte sich kurz darauf. Zehn Jahre dauerte es, bis er endlich als ordentlicher Professor nach Halle kam. Von dort siedelte er 1856 nach Heidelberg und 1868 nach München an das neugegründete Polytechnicum über. Er starb am 4. August 1874.

Die vorliegende Gedächtnisrede enthält indess mehr, als einen trocknen Nachruf. Sie giebt eine Analyse der Arbeiten des bekannten Mathematikers. Der Verfasser hat es dabei verstanden, an die Schilderung der Leistungen der einzelnen Persönlichkeit eine in kürzesten Zügen gehaltene Darstellung der Geometrie überhaupt zu knüpfen. Die Darstellung des Verfassers characterisirt die Etappen der Entwickelung der Geometrie durch die Namen Euklid, Descartes, Monge, Poncelet, Steiner, Chasles, Plücker.

Besonders hervorgehoben wird überall der Zusammenhang zwischen der Entwickelung der Geometrie und der Algebra. Durch diese allgemeinen Beziehungen werden vielfach sonst schwer zu übersehende Zusammenhänge zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik gewonnen. O.

L. Tetmajer. Ueber Culmann's bleibende Leistungen. Zürich. Meyer u. Zell.

A. Favaro. Della vita e degli scritti di Carlo Culmann. Ven. Ist. Att. (5) VIII. 715-740.

Schilderung des Lebens und der Leistungen des bekannten Mathematikers. O.

D. Turazza. Commemorazione di Giusto Bellavitis. Ven. Ist. Atti (5) VIII. 395-422.

Nachruf für Bellavitis. Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 23-24. O.

D. Bierens de Haan. Bibliographie Néerlandaise historico-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16e, 17e et 18e siècles, sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications. Bonc. Bull. XIV. 519-630, 677-718, 1881; XV. 225-312, 355-438.

Der Inhalt dieser Arbeit ist aus dem Titel völlig ersichtlich. Die Arbeiten sind alphabetisch nach den Namen der Autoren geordnet und mit allen Notizen versehen, welche von Interesse sein können. O.

P. Riccardi. Nota statistica di storia matematica. Modena, Mem. XX. 299-310.

Die Arbeit enthält eine Zusammenstellung statistischer Notizen über das Leben und die Arbeiten italienischer Mathematiker. Referent kann den Nutzen der mühsamen Arbeit nicht verstehen. Historisch wird nichts gefördert, und die Einteilung der berücksichtigten Männer in Mathematiker 1ter, 2ter, 3ter, 4ter Klasse wird mit nichts motivirt. (Genannt wird nur die erste Klasse Archimed, Galilei, Lagrange.) O.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

P. DE LAGARDE. Woher stammt das x der Mathematiker? Gött. N. 1882. 409-413.

Der Verfasser zeigt, dass der Gebrauch des x durch die arabische Uebersetzung des Wortes cosa, nämlich $x$ei entstanden ist, und teilt einen Brief von Herrn Menge in Mainz mit, worin dieser zu erklären sucht, wie der Gebrauch des Wortes $x$ei aus dem bei Diophant gebräuchlichen ἀριϑμος entstanden sei.

O.

S. GÜNTHER. Sur la dépendance entre certaines méthodes d'extraction de la racine carrée et l'algorithme des fractions continues. Bord. Mém. (2) V. 91-107.

Um gewisse im Altertum vorkommende Näherungswerte von Quadratwurzeln zu erklären, haben Mollweide und Alexejeff Berechnungsmethoden angegeben, welche keine weiteren arithmetischen Vorkenntnisse voraussetzen, als solche, die bereits zur Zeit des Archimedes bekannt sein konnten. In der vorliegenden Note aber wird gezeigt, dass beide Verfahrungsweisen doch nur versteckte Kettenbruch-Algorithmen involviren. Gr.

S. GÜNTHER. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. Abh. z. G. d. M. IV. 1-134.

Der Verfasser hat die Untersuchungen wieder aufgenommen, über die bereits im Bande XI. 1879. dieses Jahrbuches p. 37-38 berichtet worden ist. Er beschränkt sich in dieser Arbeit auf quadratische Irrationalitäten, zieht dafür aber auch alle anderen Methoden als Kettenbruchentwickelungen, in den Kreis seiner Untersuchung. Gemäss dem Ziele der Untersuchung zerfällt die Abhandlung in drei Capitel, in deren erstem das Material aus dem Altertum gesammelt wird. Das zweite Capitel (p. 51-100) ist der Ableitung der antiken Quadratwurzeln durch offene oder versteckte Kettenbruch-Algorithmen gewidmet und das 3te (101-129) der Ableitung derselben durch Entwickelung in Bruchreihen. Auf die Untersuchuug selbst näher einzugehen, erlaubt der hier gestattete Raum nicht. Referent muss sich daher begnügen, die wesentlichsten Ergebnisse anzuführen. Die Alten gingen bei der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln durchgängig von der Relation $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$ aus und brachten dann in fast empirischer Weise Verbesserungen an. Von der so gewonnenen ersten Annäherung aus gewann man methodisch durch Betrachtungen ähnlich denen, die bei der Auflösung der Pell'schen Gleichung gebraucht werden, weitere Näherungswerte. Ein Kettenbruchverfahren, welches mit dem jetzigen Aehnlichkeit hätte, existirte ebenso wenig, wie die Auflösung in eine Bruchreihe. Nur bei den Indern, Arabern und Juden des frühen Mittelalters finden sich die Näherungswerte der Entwickelung

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm b:2a \pm b:2a \dots.$$

O.

F. SCHLEPPS. Die Logarithmen. Leipzig. Scholtz.

Das Buch will in möglichst einfacher und elementarer Weise den Begriff und das Wesen der Logarithmen auch dem grossen Publicum zugänglich machen. Der Verfasser entwickelt daher zunächst in einer Einleitung eine Geschichte der Logarithmen. Seine Behauptung, Jost Bürgis sei als der Entdecker anzusehen, wird vielfach beanstandet werden. Dann giebt er die einfachsten Sätze und Anwendungen der Logarithmen. O.

KIESSLING. Ueber die Entwickelung des Imaginären in der Analysis. Hamb. Mitt. 1882. 24-26.

Aus dem vorliegenden kurzen Auszuge ergiebt sich, dass Herr Kiessling zunächst die Versuche der italienischen Algebraiker (Girardet) zur Benutzung des Imaginären erwähnt. Er schildert dann die Entwickelung des Algorithmus imaginärer Zahlen und ihrer Anwendung von Euler bis Riemann. O.

F. HULTSCH. Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate. Schlömilch Z. XXVII. Hl. A. 42-60.

Die Veröffentlichung von Dupuis': „Le nombre géométrique de Platon; interprétation nouvelle" (Paris 1881) gab auch Herrn Hultsch Veranlassung, mit den Ansichten nicht mehr zurückzuhalten, welche er sich bereits vor längerer Zeit über dieses viel umstrittene Problem gebildet hatte. Für ihn ist diese Zahl gleich

$$3600^2 = 2^8.3^4.5^4 = 3^4.4^4.5^4 = 700.2700.\sqrt{7-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{7-\frac{1}{7}}.$$

Als eine wesentliche Stütze dieser Hypothese darf man es betrachten, dass sie nur mit den Zahlen 3, 4, 5 operirt, welche als Seitenmasszahlen des einfachsten pythagoräischen Dreieckes in der älteren Mathematik eine so gewichtige Rolle spielten. Zudem lassen sich gewisse grosse Zeitperioden der antiken Astronomie (das grosse platonische Jahr u. s. w.) zu der genannten Zahl in eine ganz ungezwungene Beziehung setzen. Gr.

O. STOLZ. Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Innsbr. Ber. XII.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1.

E. MAHLER. Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Schlömilch Z. XXVII. Hl. A. 207-210.

Herr Cantor hatte gelegentlich einmal gebeten, nach der

Stelle des Talmud zu forschen, auf der die orientalische Annahme $\pi = 3$ beruhe. Dies geschieht in der vorliegenden Notiz.

O.

M. Baker. Alhazen's problem. Its bibliography and an extension of the problem. Sylv., Am. J. IV. 327-332.

Alhazen's Problem ist folgendes: „Von zwei Punkten in der Ebene eines Kreises sollen Linien gezogen werden, welche sich in einem Punkte der Peripherie schneiden und gleiche Winkel mit der im Schnittpunkt gezogenen Tangente bilden.“ Die vorliegende Arbeit giebt ein Verzeichnis der Mathematiker, welche sich mit diesem Problem beschäftigt haben, und überträgt dasselbe im zweiten Teil auf die Kugel. O.

E. Gelcich. Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie. Mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi Patrizier Rogusaer. Aus dem Jahre 1630. Abh. z. G. d. M. IV. 191-232.

Das Werk des Ghetaldi, welches den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bildet, heisst: „De resolutione et compositione mathematicis. Libri quinque. Opus posthumum. Roma. Ex typographia reverendae camerae apostolicae. MDCXXX.“ Der Verfasser giebt zunächst nähere Nachrichten über Ghetaldi's Person und Leben. Dem folgt eine genaue Analyse des oben citirten Werkes. Der Verfasser bespricht nun kritisirend die Autoren, welche in Folge desselben Ghetaldi für den Entdecker der analytischen Geometrie ausgegeben haben, und lässt dann einen Ueberblick über frühere Anwendungen der Algebra auf die Geometrie folgen. Er kommt schliesslich zu dem Resultate, dass das Verdienst des Ghetaldi gegenüber Oresme und Anderen darin bestehe, dass er die Anwendung der Algebra auf die Geometrie zuerst zum Gegenstand eines besonderen Studiums gemacht habe. Der letze Abschnitt enthält noch Einiges über Descartes, worüber

auch in der Arbeit von Kramer (siehe p. 26) ausführlich gesprochen ist. O.

V. LIGUINE. Liste des travaux sur les ovales de Descartes. Darb. Bull. (2) VI. 40-49.

Der Titel bezeichnet den Inhalt. O.

F. ROSENBERGER. Die Geschichte der Physik in Grundzügen mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte. Erster Teil. Geschichte der Physik im Altertum und im Mittelalter. Braunschweig. Vieweg u. Sohn.

Der vorliegende erste Band des Werkes zerfällt in zwei Teile. Der erste ist der Geschichte der Physik im Altertum gewidmet und besteht aus drei Abschnitten. I. Von 600—300 vor Chr. Physik als reine Naturphilosophie. II. Von 300 vor bis 150 nach Chr. Periode der mathematischen Physik. III. Von 150 bis 700. Periode des Untergangs der alten Physik. Der zweite Teil behandelt wieder in drei Abschnitten das Mittelalter. I. 700-1150. Periode der arabischen Physik. II. 1150 bis 1500. Christliche Periode der mittelalterlichen Physik. III. 1500 bis 1600. Uebergangsperiode der mittelalterlichen Physik. Jeder Abschnitt hat an der Spitze eine allgemeine Charakteristik der Periode. Dieser folgt dann die Darstellung der Leistungen, geordnet nach den Männern. Am Schluss findet sich eine synchronistische Tabelle der Physik, Mathematik, Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften mit der allgemeinen Geschichte. O.

K. LASSWITZ. Die Lehre von den Elementen während des Ueberganges von der scholastischen Physik zur Corpusculartheorie. Pr. Gotha.

Lasswitz schildert, wie sich die Theorie der Elemente von den ersten Anfängen des Kampfes gegen die aristotelisch-scholastische Physik bis auf Galilei unter Einfluss des humanistischen Gedankenkreises und der naturwissenschaftlichen Bestrebungen entwickelte. Die so entstandene Naturphilosophie sucht noch den Sitz des gestaltenden Lebens in der Materie selbst und führt auch bei ihren bedeutendsten Vertretern, Nicolaus v. Cusa, Paracelsus, v. Helmont etc. noch nicht zu einer exacten Naturforschung. Erst als die Natur vom Einfluss des Bewustseins emancipicirt und der quantitative Masstab angelegt wurde, gelangte man zur methodischen Naturforschung. Mi.

JÄRISCH. Die beiden Theorien der Elasticität in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Hamb. Mitt. 1882. 18.

Aus dem vorliegenden kurzen Bericht über den Vortrag ergiebt sich, dass Herr Järisch die Theorien von Navier, Laplace, Poisson, Cauchy und Lamé in den Bereich seiner Besprechung gezogen hat. O.

P. KRAMER. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes. Abh. z. G. d. M. IV. 235-278.

Der Verfasser sucht nachzuweisen, dass die von Poggendorff und vielen Anderen ausgesprochene Ansicht, Descartes habe die Entdeckung von Snellius gekannt und in unberechtigter Weise sich zugeschrieben, nicht einwandsfrei ist. Er nimmt die Frage daher nochmals auf und kommt zu dem Resultate, dass ebensoviele Gründe für die selbständige Entdeckung des Gesetzes durch Descartes sprächen, wie dagegen. O.

PH. GILBERT. Les preuves mécaniques de la rotation de la terre. Rev. d. qu. sc. XI. 353-393.

Historisch-kritische Abhandlung. I. Pythagoras, Philolaus, Heraclit, Elephantus, Aristarch, Seleucus, Nicolaus de Cusa,

Copernicus, Galilei, Newton. II.-III. Versuche von Benzenberg und Reich. Beobachtung der Abweichung eines aus gewisser Höhe fallenden Körpers von der Vertikalen. Diese Experimente beweisen, trotz des richtigen Princips, das ihnen zu Grunde liegt, nichts, weil die beobachteten Abweichungen zu sehr von der mittleren abweichen. IV. Bei dem Foucault'schen Pendel ist es praktisch unmöglich, die Wirkung der Torsion des Fadens zu schätzen. V. Das Gyroscop von Foucault. VI. Das Barygyroscop von Gilbert. Mn. (O.).

B. ZUCKERMANN. Materialien zur Entwickelung der altjüdischen Zeitrechnung. Breslau. Preuss u. Jünger.

Die Juden der biblischen Periode behalfen sich mit ziemlich einfachen chronologischen Normen. Sie rechneten den bürgerlichen Tag von Sonnenuntergang bis Sonnenuntergang, die Nacht von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang, sie teilten den Tag in die vier Zeiten Abend, Mitternacht, Morgen und Mittag, sie teilten ebenso die Nacht in vier „Wachen", auch kannten sie den Unterschied zwischen dem vollständigen Monat von 30 und dem unvollständigen Monat von 29 Tagen. Der Monatsanfang wurde strenge nach dem Sichtbarwerden der Mondsichel bemessen, und immer wieder knüpfte die Zeitrechnung an die empirische Constatirung dieser Erscheinung an, wiewohl eigentliche Gelehrte, wie Rabbi Gamaliel, die Frist auch theoretisch vorauszubestimmen gelehrt hatten. Das orthodoxe Judentum hielt daran fest, dass der Monatsanfang durch ein contradiktorisches Zeugenverhör vor einem zu diesem Zwecke niedergesetzten Gerichtshofe festgestellt werden musste. Ueber die Art und Weise dieser höchst wundersamen Procedur macht uns der Verfasser auf Grund eingehenden Talmud-Studiums nähere Mitteilungen, die selbstverständlich mehr auf sittengeschichtliches, als auf mathematisch-historisches Interesse Anspruch erheben können. Bemerkenswert dürfte wohl die folgende Stelle des Gesetzbuches sein: „Sagen die Zeugen: Wir haben die Mondsichel im Fluss oder durch ein Glas oder in den Wolken gesehen, so gilt ein solches Zeugnis nichts." Was für

eine Art von „Glas" mögen die hebräischen Juristen dabei wohl im Sinne gehabt haben? Weiter wird erörtert, unter welchen Umständen die Heiligung des neuen Mondes stattfand, wie der Beschluss des Synedriums den auswärtigen Glaubensgenossen kundgetan ward, wie endlich für die Einschaltung eines Monates teils agrarische, teils astronomische, teils auch endlich socialpolitische Momente in Betracht zu kommen hatten. Zum Schluss endlich erfahren wir, wie die aus solchen rigorosen Bestimmungen entfliessenden Uebelstände, welche auch von wissenschaftlicher gesinnten Rabbinern, wie Bar-Kappara, nicht zu heben waren, den allmäligen Uebergang zum festen Kalender erzwangen. Die Vorarbeiten zu einem solchen lieferte Mar Samuel, der sich dadurch allerdings die orthodoxe Partei verfeindete. Religionsgeschichtliche und mathematische Noten beschliessen die interessante Schrift. Gr.

Capitel 2.

Philosophie.

A. Philosophie.

W. Šimerka. Die Kraft der Ueberzeugung. Cas. XI. 75-111. (Böhmisch).

Diese auch in den Sitzungsberichten der philosophisch-historischen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien erschienene Abhandlung will als „ein mathematisch-philosophischer Versuch" gelten, die verschiedenen Grade der Ueberzeugung, der Wahrscheinlichkeit analog, zu begründen und ziffermässig auszudrücken. Std.

B. J. Gilman. On propositions and syllogisms. J. Hopkins Circ. 1882. 240.

C. S. Peirce. Remarks. J. Hopkins Circ. 1882. 240.

Gilman behandelt die Logik aus sechs Grundformen des Urteils. Er leitet aus den Grundformen 48 verschiedene Urteile ab und bespricht die sich daran anschliessende Syllogistik. Peirce fügt die Syllogistik zweier Urteilsformen der gewöhnlichen Logik unter Anwendung der „Algebra of relatives“ hinzu. Mi.

B. J. GILMAN. On propositions called „spurious“. J. Hopkins Circ. 1882. 241.

Gilman bespricht die von De Morgan „Spurious“ genannten Bastardsätze unter Anwendung der „Algebra of relatives“ von Peirce. Mi.

A. MACFARLANE. An analysis of relationship. Ed. Times XXXVI. 78-107.

Der Artikel enthält einen Auszug aus mehreren Berichten über eine Analysis der Relationsbegriffe, in specieller Anwendung auf die Verwandtschaftsverhältnisse des Menschen. In der Tat lassen sich zur Fixirung der complicirten verwandtschaftlichen Beziehungen logisch-mathematische Formeln vortrefflich verwenden. Mi.

Y. VILLARCEAU. Essai philosophique sur „Science de l'ordre“. C. R. XCIV. 1008-1013.

Villarceau will zeigen, wie man durch ein einfaches philosophisches Raisonnement zu der „Science de l'ordre“ gelangen kann. Mi.

C. N. JUDSON. Zero and Infinity. Anal. IX. 9-11.

DE V. WOOD. Limits. Anal. IX. 79-81.

S. NEWCOMB. Remarks on the doctrine of limits. Anal. IX. 114-119.

Controverse über die Definition der Grenze. Jn. (O.).

A. F. Igurbide. Investigaciones filosofico-matematicas sobre las contidades imaginarias. I. Valencia. M. Alufre 1881. 8°.

S. A. Sexe. Skul de des ikke lade sig finde et reellt mathematisk Udtryk, der kunde overtage de imaginaere Stórrelsers Rolle eller gjóre samme Tjen este som disse Stórrelser. Lie Arch. VII. 115-154.

Der Verfasser sucht das Imaginaire zu vermeiden, resp. durch reelle mathematische Ausdrücke zu ersetzen.

L.

O. Simony. Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. Wien. Anz. 1882 96-97.

Die Notiz giebt einen Bericht über den ersten Teil einer Abhandlung Simony's, in der speciell diejenigen Erscheinungen untersucht werden, die ein biegsamer Ring von kreisförmigem Querschnitte zeigt, falls man einen den Ring bis zur Mittellinie durchsetzenden längs der letzteren in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt. Die Abhandlung, die eine Reihe auf specielle Experimente gestützter mathematischer Erfahrungssätze als Resultat liefert, ist eine Fortsetzung der interessanten topologischen Untersuchungen Simony's. Derselbe hat schon in einer 1881 in III. Aufl. erschienenen Schrift das Problem, in einen unverdrehten biegsamen Ring ohne Ausführung eines Querschnittes einen Knoten zu machen, in der klarsten und anschaulichsten Weise behandelt, auch die Beziehungen dieses Problems zur Theorie des vier-dimensionalen Raumes erörtert und die Bedenken, die einer Hypothese der wirklichen Existenz eines vier-dimensionalen Raumes entgegenstehen, scharf und bestimmt hervorgehoben.

Mi.

A. Ledieu. Du cycle du raisonnement. C. R. XCIV. 1442-1446.

Unter dem „cycle du raisonnement" versteht Ledieu ein logisches Verfahren, welches die Beobachtung oder das Experiment a priori, die Deduktion, die Induktion und das Experiment oder die Beobachtung a posteriori in sich fasst. Nur die vollständige Anwendung dieses Kreises von Operationen führt, nach Ledieu's Urteil, zur Ableitung solcher Begriffe und Hypothesen, wie sie z. B. der Mechanik zu Grunde liegen. Mi.

A. Ledieu. Considérations sur la théorie générale des unités. C. R. XCV. 1328-1332.

Ledieu bespricht die Grundlagen einer formalen Metrologie: die theoretische Aufstellung der Maasseinheiten, die Verbindung der Maasseinheiten unter einander, die Gewinnung von Normalmaassen etc. Mi.

Gilles. Die Einheit der Naturkräfte. Bair. Bl. XVIII. 283-292.

Dieser Aufsatz enthält im Wesentlichen eine eingehende Kritik der bekannten Schrift von Schmitz-Dumont: „Die Einheit der Naturkräfte". Der rechnungsmässige Nachweis dafür, dass die Grundannahme jenes Buches, abstossende Kräfte, die dem Newton'schen Gesetze des umgekehrten Quadrates der Entfernung gehorchen, selbst die einfacheren Fälle nicht genügend erkläre, wird von Herrn Gilles in ähnlicher Weise geführt, wie dies auch von Isenkrahe (Schlömilch Z.) und von Lasswitz (Gött. gel. Anzeigen) getan worden ist. Der Verfasser, der schon früher die Newton'sche Gravitation als die Quelle aller und jeder Kraftäusserungen im Weltall aufzuzeigen bestrebt war, spricht sich im Gegensatz zu den würfelförmig angeordneten Kraftcentren Schmitz-Dumont's für eine reihenförmige Lagerung der Atome aus und sucht diese seine Auffassung analytisch zu rechtfertigen. Gr.

D. Pirmez. De l'unité des forces de gravitation et d'inertie. Bruxelles. Bruyland-Christophe. 1881. 8°.

P. Mansion. Examen critique. Rev. de l'Instr. XXV. 126-141.

Van Tricht. Examen critique. Rev. d. quest. sc. XII. 249-280.

Herr Mansion hat das Buch vom Standpunkte der reinen Mechanik und Herr Tricht von dem der physikalischen Mechanik einer Kritik unterzogen. Das Buch giebt eine geschickte Auffrischung Aristotelischer Gedanken über die Bewegung, und Lagrange'scher über die Gravitation. Der Inhalt des Buches ist folgender. Teil I. 1) Es giebt in der Natur Körper, welche sich wechselseitig anziehen oder wenigstens anzuziehen scheinen. 2) Es ist nicht zu verstehen, dass zwei Körper, die eine gewisse Entfernung von einander haben, auf einander anziehend durch das Nichts oder gewissermassen durch seine Vermittelung wirken. 3) Ihre Anziehung würde auch unbegreiflich sein, wenn sie in einem nicht widerstehenden Mittel wäre, darunter ein Mittel verstanden, welches keine Wirkung auf die Bewegungen des darin befindlichen Körpers ausübte. 4) Die Körper können also nur indirect anziehend auf einander wirken durch diese Vermittelung, oder besser durch die Wirkung eines widerstehenden Mittels, in dem sie sich befinden. Dieses Mittel wird Aether genannt. 5) Wenn ein Körper einen Impuls erhält, bewegt er sich in einer gewissen Richtung und mit einer gewissen Geschwindigkeit, wenn nicht andere Impulse diese Geschwindigkeit und diese Richtung ändern. 6) Der ursprüngliche Impuls, die Ursache der Bewegung beim Beginn, kann keine Wirkung haben, wenn er aufgehört hat, denn eine nicht existirende Ursache kann nicht wirken. 7) Wenn nicht andere Impulse die gleichförmige Bewegung des Körpers in gerader Linie verändern, so kann die wirkliche Bewegung desselben nur herrühren von dem ätherischen Mittel, in dem sich alle Körper befinden.

Teil II. 8) Hypothese: Die ponderablen Körper haben keine eigene Tätigkeit und befinden sich in einem Aethermeere, dessen Atome mit Bewegungen in allen Richtungen begabt sind.

9) Ein einzelner Körper wird in diesem Mittel in Folge der von allen Seiten kommenden Stösse in Ruhe bleiben. Sind zwei Körper da, so werden sie sich gegenseitig Schutz gewähren. Jeder Körper wird durch den andern gegen die von dieser Seite kommenden Stösse geschützt. Aus dieser gegenseitigen Deckung folgt, dass die Körper nicht an allen Seiten dieselbe Menge von Stössen erhalten, und zwar wird dieses Minus in der Verbindungsgeraden liegen. Jeder Körper wird also gegen den andern hingetrieben durch die Differenz der Stösse, welche sich so ergiebt. Es entsteht also in Folge des Aethers eine scheinbare Anziehung jedes Körpers nach dem andern. 10) Es lässt sich leicht nachweisen, dass diese Anziehung proportional den Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung erfolgt.

11) Hat einmal für einen ponderablen Körper eine Bewegung unter dem Einfluss eines momentanen Impulses begonnen, so wird sie in demselben Sinne und in gleichförmiger Art fortfahren, weil die Bewegung des Körpers in dem umgebenden Aether eine Unterbrechung des bestehenden Gleichgewichts hervorgebracht hat.

Teil III. 12) Die Annahme dieses Aethers giebt die Möglichkeit, viele Erscheinungen der Dynamik und theoretischen Physik zu erklären. 13) Diese Theorie stimmt überein mit der Metaphysik, welche die Existenz eines höchsten Wesens beweist.

Mn. (O.).

E. Rethwisch. Der Irrtum der Gravitationshypothese. Freiburg i. Br. Kiepert.

Rethwisch nimmt für alle grossen Bewegungen im Weltraume und auf der Erde eine gemeinsame Quelle an. Eine Wirkung in die Ferne ist physikalisch unmöglich. Eine allgemeine Anziehung der Körper findet nicht statt. Bewegung lässt sich nur aus Bewegung ableiten. Die Axendrehung ist die Quelle aller Entwickelung. Der Fall der Körper auf der Erde ist eine Folge der Axendrehung, durch welche alle Teile der Erde nach innen gerissen werden. Der Verfasser schliesst seine Schrift „in dem

Bewustsein, die Welt des Stoffes und die Welt der Gedanken von dem Alp der Schwerkraft befreit zu haben, und in dem freudigen Gefühl, dass der Sturz der märchenhaften Gravitation noch einem der Zeitgenossen gelingen dürfte." Mi.

A. Keindorff. Kritik der drei Kepler'schen Gesetze. Neuhaldensleben. Eyrund.

Keindorff, der eine kritische Beleuchtung der theoretischen Entwickelung der Kepler'schen Gesetze geben will, behauptet z. B., bei der Ableitung des ersten Kepler'schen Gesetzes sei übersehen: „dass der Planet sich fast stets (nur in zwei Punkten auf der ganzen Bahn nicht — im Perihel und Aphel) auf einer schiefen Ebene bewegt." Er bezweifelt die Richtigkeit der Schlüsse der Differentialrechnung, ja redet sogar von Flunkereien in der Mathematik! Er glaubt behaupten zu können, dass die ganze höhere Analysis unter groben Missgriffen mehr oder minder zu leiden habe. Er will mit seiner Schrift den Anstoss zu einer Kritik der ganzen Mathematik geben und versäumt nicht, im Vorworte hervorzuheben, dass seine Abhandlung volle Aufmerksamkeit verdiene. Mi.

R. Bresch. Der Chemismus, Magnetismus und Diamagnetismus im Lichte mehr-dimensionaler Raumanschauung. Leipzig. Bresch.

Bresch, der für Homoeopathie, Odlehre, Spiritismus etc. eine Lanze bricht, stellt S. 50 die Hypothese auf: „dass unsere dreidimensionale Welt, so weit sie aus ponderabler Materie zusammengesetzt ist, aus drei-dimensional geordneten mehr-dimensionalen Atomen besteht." Auf dieser Hypothese beruht seine Erklärung der diamagnetischen Abstossung. Mi.

C. KREBS. Hvorvidt ere Axiomerne Erfaringssätninger. Zeuthen T. (4) VI. 81-95.

AD. MEYER. I hvad mon äro axiomerna erfarenhetssatzer. Zeuthen T. (4) VI. 113-118.

Der Verfasser der ersten dieser beiden Aufsätze spricht, nachdem er die Betrachtungen von verschiedenen Philosophen (Kant, Locke, Mill u. a.) referirt hat, als seine eigene Auffassung die aus, dass die Axiome allein aus der Erfahrung herrühren. Gegen diese Anschauung polemisirt Herr Meyer, wesentlich von dem Standpunkte Kant's ausgehend. Der Streit dreht sich nicht nur um die mathematischen, sondern vielmehr um die allgemein logischen Axiome. In einer beigefügten Note führt Herr Zeuthen die Frage auf die rein mathematischen Axiome zurück, und bespricht insbesondere die von Euklid aufgestellten geometrischen Axiome, um die Aufmerksamkeit auf das in mathematischer Rücksicht Wesentliche hinzuleiten.

Gm.

B. Methodik, Pädagogik.

A. SCHMITZ. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien. Bair. Bl. XVIII. 90-96.

ECKL. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien. Bair. Bl. XVIII. 448-457.

Erörterungen über das Mass des Lehrstoffes in der Mathematik, die allerdings nur für die Lehrer der bairischen Studienanstalten, für diese aber ein nicht zu unterschätzendes Interesse haben. Der Ansicht des Herrn Eckl, die Mathematik sei minder um ihrer selbst willen, als zur Ausbildung des Denkvermögens zu pflegen und daher z. B. die sphärische Trigonometrie aus dem Pensum zu streichen, werden hoffentlich Wenige beipflichten, während Herr Schmitz, der eher für Erweiterung eintritt, mehr Anhänger finden dürfte. Referent weiss, dass nord-

deutsche Collegen grade in der Aufnahme des genannten Faches einen Vorzug des bairischen Lehrprogrammes erblicken. Auf Grund eigener Erfahrungen können wir übrigens den von beiden Autoren ihren Betrachtungen zu Grunde gelegten Satz („Es ist eine alljährlich sich wiederholende Klage, dass die Kenntnisse der Absolventen humanistischer Gymnasien in der Mathematik sehr gering sind, weit geringer als in den philologischen Fächern") als in dieser Allgemeinheit falsch und irreführend bezeichnen.

Gr.

A. Weilenmann. Der geometrische Unterricht in Mittelschulen. Pr. Zürich.

Der Verfasser betrachtet die Geometrie als ein Kunstwerk, welches der Lehrer vor den Augen der Schüler aufführt. Die Schönheit des Baues erscheint als einziges Interesse. Dieser Gedanke ist zunächst in der Einleitung sehr hervortretend ausgesprochen; doch lässt dieselbe, indem sie von Unterrichtsreform gemäss den neueren Fortschritten der Methode handelt, die pädagogisch didaktischen Gesichtspunkte im Verlaufe der Schrift als selbstverständlich erwarten. Dass letztere gänzlich fehlen, zeigt die dann folgende Skizze des Lehrgangs. Diese entwickelt die Steiner'sche Geometrie ohne jede Vorbereitung, nachdem sie Punkt, Gerade, Richtung, Winkel etc. als Grundbegriffe vorausgesetzt hat, beginnend mit den Gebilden in allgemeinster Form und Zusammensetzung, das Unendliche als Dogma einführend. Nicht blos (wie die Einleitung sagt) die Unterscheidung von Planimetrie und Stereometrie, sondern das ganze Princip der Synthese ist beiseite geworfen; denn zur isolirten Betrachtung der einfachen Figuren wird nicht die geringste Gelegenheit geboten; mit dem gesammten Gebiet der euklidischen Sätze würde der Schüler bei einem solchen Unterricht unbekannt bleiben. Er lernt also nicht Geometrie nach verschiedener Methode, sondern es werden ihm andere Gegenstände vorgeführt, ohne Rücksicht auf das, was er dadurch lernt.

H.

J. Hoüel. Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie. Bord. Mém. (2) V. 197-208

Siehe F. d. M. VII. 1875. p. 322.

Yvon Villarceau. De la nécessité d'introduire certaines modifications dans l'enseignement de la mécanique, et d'en bannir certains problèmes, par exemple: le mouvement du corps solide des géomètres. C. R. XCV. 1321-1327.

Der Verfasser verlangt eine exactere Gestaltung der Lehre der Mechanik im Unterricht. Nach einigen Hinweisungen auf Desideraten, die nur wenig characterisirt, noch weniger begründet werden und wol nur zur Einleitung und Motivirung dienen, entwickelt er die Grundzüge eines seinen Anforderungen entsprechenden Lehrgangs. Dieser unterscheidet sich nicht derart von dem gewöhnlichen, dass bestimmte Fragen für die Methode daraus deutlich hervorgingen. Erst am Schlusse kommt ein wesentliches Problem der Lehrmethode zur Sprache, welches wol als der Kernpunkt des Aufsatzes anzusehen ist. Die Annahme starrer Körper schliesst offenbar die Entstehung innerer Kräfte (Spannungen) aus. Daher stehen alle Bewegungen starrer Körper, welche zur Herstellung des Gleichgewichts innere Kräfte erfordern, mit den Grundsätzen der Mechanik im Widerspruch, wie hier am Beispiel der Rotation gezeigt wird. Das gewöhnliche Verfahren, die innern Kräfte nach Erfordernis hypothetisch einzuführen, ihre Entstehung als physikalische Frage beiseite zu lassen, bleibt unerwähnt. Der Verfasser geht so zu Werke, dass er die Bewegung eines Körperelements in Translation und Rotation zerlegt und die kleinen Radialtranslationen erst vernachlässigt, nachdem das Princip der Flächen hergeleitet ist. Im Ganzen scheint er die Idealisirung der Probleme vom Unterricht fern halten zu wollen und auf den Connex der Begriffe mit der rohen Beobachtung Wert zu legen. H.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen).

HJ. BERWALD. Eqvationslära i sammandrag jemte exempelsamling. Stockholm.

Elementare Darstellung der Theorie der Gleichungen, mit Benutzung allgemein bekannter Arbeiten von Bertrand, Todhunter u. A. E.

L. KRONECKER. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Festschrift. Berlin. Reimer. Kronecker J. XCII. 1-123.

Ein durch die Grössen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... gebildeter „Rationalitätsbereich" ($\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ...) umfasst alle rationalen Functionen der $\mathfrak{R}$ mit ganzzahligen Coefficienten; für algebraische Betrachtungen reicht es aus, die $\mathfrak{R}$ als Variable anzunehmen, bis auf Ein Element, welches eine algebraische Function der übrigen wird. Sind alle $\mathfrak{R}$ Variable, oder existirt nur ein $\mathfrak{R}' = 1$, dann ist der Bereich ein „natürlich abgegrenzter." Jede Wurzel einer irreductiblen Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten

dem $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, heisst eine „algebraische Function n^{ter} Ordnung der $\mathfrak{R}$"; die n Wurzeln derselben Gleichung sind „conjugirte algebraische Functionen". Adjungirt man den $\mathfrak{R}$ eine solche Wurzel $\mathfrak{G}'$, so bildet $(\mathfrak{G}', \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ „den Bereich der Gattung $\mathfrak{G}'$". Ein jeder Bereich $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots; \mathfrak{R}', \ldots)$ kann durch $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ dargestellt werden, wenn $\mathfrak{G}$ eine passend gewählte Function der $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots$ ist. Erst mit der Fixirung des Rationalitätsbereiches wird die Frage nach der Zerlegbarkeit ganzer Functionen zu einer bestimmten und mit ihr der Begriff von Reductibilität und Irreductibilität; diese Begriffe erhalten einen fassbaren Untergrund durch die Angabe einer Methode, welche mit den einfachsten Hülfsmitteln entscheiden lehrt, ob eine Function in einem gegebenen Bereiche irreductibel ist, bezw. wie ihre irreductiblen Teiler zu finden sind. Eine Grösse x heisst eine „ganze algebraische Function der $\mathfrak{R}$", wenn sie einer Gleichung genügt, welche zum höchsten Coefficienten 1 hat, während die anderen ganze, ganzzahlige Functionen der $\mathfrak{R}$ sind. Ein Fundamentalsatz der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen ist der, dass es eine endliche Anzahl von ganzen algebraischen Grössen $x', x'', x''', \ldots x^{(n+m)}$ giebt, durch welche alle ganzen algebraischen Grössen der Gattung in der Form

$$\varphi'.x' + \varphi''.x'' + \cdots + \varphi^{(n+m)}.x^{(n+m)}$$

darstellbar sind, wo die φ ganze, ganzzahlige Functionen der $\mathfrak{R}$ bedeuten; ein solches System $x', x'', \ldots$ heisst ein „Fundamentalsystem der Gattung". In besonderen Fällen kann $m = 0$ werden, so z. B. in einem natürlich abgegrenzten Bereiche $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ für alle Gattungen, die durch irgend eine rationale Function der n Wurzeln der Gleichung

$$x^n + \mathfrak{R}'x^{n-1} + \mathfrak{R}''x^{n-2} + \cdots = 0$$

repräsentirt werden. Der Inbegriff aller Discriminanten von je n Elementen eines Fundamentalsystems bildet einen Complex von Invarianten derart, dass Alles ihnen Gemeinsame auch für die Discriminante von je n Functionen der Gattung gilt. Für $m = 0$ erhält man nur eine, „die Discriminante der Gattung"; sie ist demnach ein gemeinsamer Teiler aller Discriminanten der Functionen der Gattung, und der grösste gemeinsame Teiler aller dieser

teilt die $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{te}}$ Potenz der Gattungsdiscriminante. Für die Weiterführung der Theorie ist die Behandlung eines Systems von Gleichungen mit ihren Discriminanten und Resolventen nötig; eins der Hauptresultate dieser kurz mitgeteilten principiellen Untersuchung ist, dass eine Reihe von Teilresolventen $F_k = 0$ auftritt, wobei die Resolvente k^{ter} Stufe $F_k = 0$ ein System von k Gleichungen vertritt, und dass der gesammte Inhalt jedes Teilers der Resolvente eines Gleichungssystems für n Grössen durch ein System von nur $n+1$ Gleichungen dargestellt, also auch jedes System von beliebig vielen Gleichungen durch ein solches von nur $n+1$ Gleichungen ersetzt werden kann. Von dem hierdurch erlangten Gesichtspunkte aus lässt sich die wahre Stellung der Galois'schen Theorie erkennen. Die Betrachtung der Resolvente des durch eine algebraische Gleichung vertretenen Gleichungssystems zeigt, wie Galois von einer speciellen Gleichung ausgehend zu allgemeinen Functionen von n unbestimmten Grössen gelangt, welche die Eigenschaft haben, bei gewissen Permutationen derselben ihren Wert zu behalten. Diese „Gruppe der Substitutionen" liefert die für die algebraischen Fragen einzig wesentlichen Eigenschaften. Die für eine solche Gruppe unveränderlichen Functionen bilden eine „Gattung von Functionen der $x_1, x_2, \ldots x_n$". Je nachdem durch die Adjungirung einer Gattung $\mathfrak{g}$ die ursprüngliche Gleichung zerfällt oder nicht, ist die Gattung eine „eigentliche" oder eine „uneigentliche". Durch den erweiterten Bereich $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n, \mathfrak{g})$ der Gleichung

$$x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0$$

wird, falls $\mathfrak{g}$ eine eigentliche Gattung ist, eine „Classe" von algebraischen Functionen definirt, derart, dass alle diejenigen Gleichungen in eine Classe gehören, bei welchen die einer bestimmten Gattung $\mathfrak{g}$ angehörigen Functionen der Wurzeln zugleich dem festgesetzten Rationalitätsbereiche angehören. Diese Gattung heisst „Affect-Gattung" der Gleichung. Jeder irreductible Teil eines Gleichungssystems, welches n conjugirte algebraische Grössen definirt, kann durch $n+1$ Gleichungen und auch im Allgemeinen durch nicht weniger dargestellt werden, welche in die Form

$$\mathfrak{g}(x_1, x_2, \dots x_n) = c_0, \quad \mathfrak{f}_k(x_1, x_2, \dots x_n) = c_k \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

gebracht werden können. Das Fundamentalsystem für die Galois'sche Gattung der Ordnung $n!$ kann durch die $n!$ Elemente $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_{n-1}^{h_{n-1}}$ gegeben werden, wo

$$h_k = 0, 1, \dots, n-k; \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

ist; dass man bei dem Fundamentalsystem aber auch gebrochene Zahlcoefficienten zu, so kann man jene $n!$ Elemente bei der Gattung $\mathfrak{g}$ von der Ordnung r auf $\varrho = n! : r$ reduciren. Aus der Bemerkung, dass für irgend welche Werte von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots$, für die nur nicht die Discriminante der Gleichung verschwindet, sich stets Functionen der Gattung $\mathfrak{g}$ bestimmen lassen, deren sämmtliche conjugirte unter einander verschieden sind, wird ein Existenzbeweis für die Wurzeln algebraischer Gleichungen, dem zweiten Gauss'chen Beweise nachgebildet, in grosser Einfachheit gegeben.

Der Zweck des zweiten Teils der Arbeit liegt in der Erhaltung der Begriffsbestimmungen und Gesetze beim Uebergang vom Rationalen zum Algebraischen. Sind $x, x', x'', \dots$ ganze algebraische, $u', u'', u''', \dots$ unbestimmte Grössen, und sondert man von der Norm des Complexes $x + u'x' + u''x'' + \cdots$ den grössten von den u unabhängigen Teiler ab, dann bleibt eine „primitive Form“ n^{ten} Grades $Fm\,(x+u'\,x'+\cdots)$ zurück, und es stellt, ohne irgend welche Symbolik, der „Divisor“ oder „Modul“

$$\frac{x+u'\,x'+\cdots}{Fm\,(x+u'\,x'+\cdots)} = \text{mod.}\,(x+u'\,x'+\cdots)$$

den grössten gemeinsamen Teiler der Grössen x dar. Durch die Einführung der u werden alle Specialitäten abgestreift. Zwei Divisoren, welche dieselben Elemente $x, x' \dots$ haben, sind einander „absolut aequivalent“, d. h. jeder teilt den andern. Der grösste Teiler der beiden Divisoren

$$\text{mod.}\,(x+u'\,x'+\cdots), \quad \text{mod.}\,(y+v'\,y'+\cdots)$$

ist

$$\text{mod.}\,(x+u'\,x'+\cdots+y+v'\,y'+\cdots);$$

ihr Product wird

$$\text{mod.}\,(xy+w'xy'+w''x'y+\cdots)$$

Ist das Product zweier Divisoren durch einen dritten teilbar, der mit dem ersten keinen gemeinsamen Teiler hat, so ist der zweite

durch den dritten teilbar. Man kann den Begriff des Moduls erweitern: eine ganze rationale Function von u, v, w, ..., deren Coefficienten ganze Grössen des natürlichen Bereiches ($\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ...) sind, heisst eine ganze Form; sie ist primitiv, wenn die Coefficienten ihrer Norm keinen gemeinsamen Teiler haben. Ein, ähnlich wie oben für $x + u'x' + \cdots$, aus einer Form gebildeter Quotient heisst ein „algebraischer Modul oder Divisor“. Auch hier bedingt Gleichheit der Elemente die absolute Aequivalenz, so dass jeder „allgemeine“ einem „linearen“ Modul aequivalent ist. Ein algebraischer Divisor ist irreductibel oder prim, wenn er nicht einem Producte algebraischer Divisoren der festgesetzten Gattung aequivalent ist; es ist möglich, einen Divisor darauf hin zu prüfen, resp. zu zerlegen; diese Zerlegung ist durchführbar und völlig bestimmt. Relativ äquivalente Divisoren sind im Sinne der absoluten Aequivalenz nur durch Factoren von einander unterschieden, welche ganze algebraische Grössen der festgesetzten Art sind; der Inbegriff aller einander relativ äquivalenten Divisoren constituirt eine Classe; die Zahl der Classen ist eine endliche; jeder Divisor, zu einer gewissen Potenz erhoben, giebt eine algebraische Grösse und ist also durch eine algebraische Zahl höherer Gattung ersetzbar. Hinsichtlich der weiteren Ziele der fundamentalen Theorie der Association muss auf den § 19 und § 22 der Arbeit selbst verwiesen werden; vgl. besonders S. 94—96.

Formen eines Bereiches können, auch wenn ihre Coefficienten keinen gemeinsamen Teiler besitzen, dennoch etwas Gemeinsames in höherem Sinne haben, etwa wie Flächen ausser gemeinsamen Flächenstücken noch Linien und Punkte gemein haben können. Dem Studium dieser Verhältnisse ist die Einführung von Divisoren-Systemen gewidmet, durch welche gleichzeitig eine Erweiterung des Begriffes der Division beim Uebergang von einer zu mehreren Variablen gegeben wird.

Es werde gesetzt

$$G(x_1, x_2, \ldots x_n) \equiv 0 \pmod{F_1, F_2, \ldots F_n},$$

wenn

$$G(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{h=1}^{n} P_h(x_1, x_2, \ldots x_n) \,.\, F_h(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ist, so dass die Darstellbarkeit als homogene lineare Function von mehreren ganzen Functionen F_h an die Stelle der Teilbarkeit durch eine Function F tritt. Die Gesetze solcher „Modul- oder Divisoren-Systeme“ werden studirt; es finden sich solche Systeme verschiedener Stufen, wie sie in dem obigen Beispiele den gemeinsamen Flächen (erster Stufe), Linien (zweiter Stufe), Punkten (dritter Stufe) entsprechen. Hiernach eröffnet sich ein neuer Einblick in die Theorie der Formen; die Aequivalenz und die Primitivität, die bisher gewissermassen nur als Eigenschaften erster Stufe definirt waren, lassen sich präcisiren und auf höhere Stufen ausdehnen.

Jede, ein Modulsystem enthaltende Grösse ist als Aggregat der Functionen dieses Systems darstellbar, bei welchem die Coefficienten Grössen der Gattung resp. der Species sind. Es ist aber auch eine Reduction eines jeden Modulsystems auf ein äquivalentes möglich, bei welchem die Coefficienten lediglich dem Stammbereiche $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots]$ angehören. Irgend eine in dieser Weise gebildete Form heisst „Grundform“ oder „Fundamentalform.“ Für den Fall des absoluten Rationalitäts-Bereichs $\mathfrak{R} = 1$ existiren für alle Formen äquivalente lineare Grundformen von n Gliedern

$$u'x' + u''x'' + \cdots + u^{(n)}x^{(n)},$$

in welchen $x', x'', \ldots$ ganze algebraische Zahlen des Art-Bereichs bedeuten. Wenn für einen Art-Bereich $(\mathfrak{S})$ ein Fundamentalsystem von $(n+m)$ Elementen $x', x'', \ldots x^{(n+m)}$ besteht, und man setzt

$$\mathfrak{F}(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - u'x_i' - u''x_i'' - \cdots - u^{(n+m)}x_i^{(n+m)}),$$

so heisst $\mathfrak{F}(x) = 0$ die Fundamentalgleichung des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$; ihr genügt jede Grösse der Art $(\mathfrak{S})$; diese erhält man sämmtlich, sobald die u durch ganze Grössen aus $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots]$ ersetzt werden. Versteht man ferner unter der Discriminanten-Form der Art eine Form, deren Coefficienten die sämmtlichen Determinanten-Quadrate $|x_k^{(i)}|^2$ sind, und welche somit der grösste gemeinsame Teiler aller Discriminanten von je n ganzen algebraischen Formen des Art-Bereichs und als solcher deren vollständige Invariante ist, dann folgt, dass die Discriminante der Fundamentalgleichung

ein Teiler der $\frac{1}{2}(n-1)n^{\text{ten}}$ Potenz der Discriminanten-Form sei, und daher ausser ihr nur noch Teiler derselben enthalte. Handelt es sich um ein Fundamentalsystem x', x'',... einer Gattung, dann stimmt die Discriminante der Fundamentalgleichung entweder mit der Discriminanten-Form der Gattung im Sinne der vollständigen absoluten Aequivalenz überein, oder sie enthält nur noch solche Divisoren der Form, welche Formen von höherer als der ersten Stufe oder Zahlen aus der Reihe $2, 3, \dots n-2$ sind. Als wesentliches Resultat ergiebt sich hieraus, dass die gesammte arithmetische Theorie der algebraischen Grössen auf eine Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen von Variablen und Unbestimmten zurückgeführt werden kann. No.

L. KRONECKER. Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in ihre irreductibeln Factoren. Kronecker J. XCIV. 344-348. 1883.

Vollständige Ausführung des in § 4 der „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" angedeuteten Beweises für die Möglichkeit und die völlige Bestimmtheit der Zerlegung ganzer Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches in irreductible Factoren. No.

L. KRONECKER. Zur Theorie der Formen höherer Stufen. Berl. Ber. 1883. 957-960.

Es wird eine wesentliche Erweiterung des Begriffes vom Enthaltensein eines Divisorensystems unter einem anderen gegeben. $(M_0, M_1, M_2, \dots)$ enthält das Divisorensystem $(N_0, N_1, N_2, \dots)$, wenn die Form

$$M_0 u_0 + M_1 u_1 + M_2 u_2 + \cdots$$

Wurzel einer Gleichung ϱ^{ten} Grades ist, in welcher der Coefficient der ϱ^{ten} Potenz gleich Eins und der Coefficient der $(\varrho-r)^{\text{ten}}$ Potenz eine das Formenproduct

$$\prod_{h=1}^{r}(N_0 v_{h_0} + N_1 v_{h_1} + \cdots)$$

im früheren engeren Sinne enthaltende Form ist. Hieraus folgt dann auch ein erweiterter Begriff der Aequivalenz, und damit ergiebt sich ein einfacher Beweis für die Aequivalenz der beiden Modulsysteme

$$(M_h . M_{m+i}) \text{ und } (M'_k)$$

$$(h = 0, 1, \ldots m; \quad i = 1, 2 \ldots n-m+1; \quad k = 0, 1, \ldots n),$$

wobei die M und die M' durch die Gleichung

$$\sum_h M_h u^h \sum_i M_{m+i} u^{i-1} = \sum_k M'_k u^k$$

mit einander verbunden sind. No.

L. Kronecker. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen. Kronecker J. XCIII. 365-366.

I. Eine Form, welche zwei andere Formen enthält, wird nach Multiplication mit deren grösstem gemeinsamen Inhalt durch das Product derselben teilbar. II. Durch Multiplication einer Fundamentalform mit einer beliebigen Form entsteht wiederum eine Fundamentalform. Die Substitution, mittels deren das Produkt zweier primitiver Grundformen von beliebig vielen Gliedern in eine primitive Grundform von nur n Gliedern transformirt wird, bestimmt sich als diejenige, mittels welcher die aus den beiden algebraischen Formen componirte in irgend eine ihr relativ äquivalente lineare Grundform von nur n Gliedern übergeführt wird.

No.

F. J. Studnička. Bolzano's „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege." Prag. 1817. Cas. XI. 1-38. (Böhmisch).

Enthält eine böhmische Uebersetzung und Commentirung dieses von Bolzano in den Schriften der böhmischen Gesellschaft

der Wissenschaften veröffentlichten Aufsatzes, in welchem das Fundamentaltheorem aus der Theorie der Gleichungen auf eine für die damalige Zeit höchst bemerkenswerte gründliche, neuere Begriffe anticipirende Weise abgeleitet wird. Std.

M. Mandl. Jede Gleichung des n^{ten} Grades hat genau n Wurzeln. Wien. Anz. 185.

Ankündigung eines Beweises, aus welcher Nichts zu ersehen ist. No.

J. Hammond. Proof that an equation must have at least n roots. Ed. Times XXXVI. 115.

Der Herr Verfasser hätte wissen können, dass sich dieser Satz nicht in $12\frac{1}{2}$ Zeile beweisen lässt. Der Fehler liegt in der Annahme einer Functionalgleichung für die Wurzeln.

No.

L. Kronecker. Die Composition Abel'scher Gleichungen. Berl. Ber. 1882. 1059-1065.

L. Kronecker. Die cubischen Abel'schen Gleichungen des Bereiches $(\sqrt{-31})$. Berl. Ber. 1882. 1151-1155.

Es seien

$$x_{h_1, h_2, \dots, h_\nu} \text{ und } y_{k_1, k_2, \dots, k_\nu}$$

$$(h_\alpha, k_\alpha = 0, 1, \dots, n_\alpha - 1; \quad \alpha = 1, 2, \dots \nu)$$

gegebene Grössen, und es werde gesetzt

$$z_{h_1+k_1, \dots h_\nu+k_\nu} = \Sigma x_{h_1, \dots h_\nu} \cdot y_{k_1, \dots k_\nu}.$$

Nimmt man die cyklischen Functionen der Grössen x, sowie die der Grössen y zum Rationalitätsbereiche, so werden die x, die y und die z Wurzeln Abel'scher Gleichungen, und die letzte Gleichung heisst aus den beiden ersten zusammengesetzt oder componirt. Eine einfache Abel'sche Gleichung (siehe F. d. M. IX. 1877, 57) mit den Wurzeln x_0, $x_1, \dots x_{n-1}$ lässt sich aus zwei anderen com-

poniren, wenn

$$\varpi_h = \sum \omega^{hr} x_r \qquad (\omega^n - 1 = 0)$$

sich als Produkt zweier ähnlicher Ausdrücke darstellen lässt. Die Anwendung der Decomposition auf die Gleichungen dritten Grades ergiebt, dass die Wurzeln jeder cubischen Abel'schen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten sich als rationale Functionen der Wurzeln von Gleichungen

$$y^3 - 3py + p(r+s) = 0, \quad y^3 - 3y + 1 = 0$$

darstellen lassen. Dabei sind die p Primzahlen, und die r, s sind durch die Bedingungen definirt

$$p = r^2 - rs + s^2, \quad r \equiv s \ (\text{mod. } 3).$$

Die Decomposition der cubischen Abel'schen Gleichungen des Bereiches $\sqrt{-31}$ mit den Wurzeln x_1, x_2, x_3 fordert die Zerlegung von Ausdrücken

$$(x_0 + \omega^h x_1 + \omega^{2h} x_2)^3 = (\mathfrak{g}_0 + \omega^h \mathfrak{g}_1 + \omega^{2h} \mathfrak{g}_2)^2 (\mathfrak{g}_0 + \omega^{2h} \mathfrak{g}_1 + \omega^h \mathfrak{g}_2),$$

in denen ω eine primitive dritte Einheitswurzel ist, und die $\mathfrak{g}$ ganze algebraische Zahlen des Bereiches $(\sqrt{-3}, \sqrt{-31})$ sind, in Factoren von derselben Form. In diesem Bereiche sind die Primzahlen p entweder als Normen ganzer algebraischer Zahlen darstellbar (p^0), oder erst ihr Cubus hat diese Eigenschaft (p'). Alle diejenigen cubischen Gleichungen, für welche

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2) . (x_0 + \omega^2 x_1 + \omega x_2)$$

nur eine Potenz von p' ist, sind in solche zu zerlegen, bei denen

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)^3 = H(\xi, \omega)^2 \, H(\xi, \omega^2)$$

und H eine ganze algebraische Zahl wird, deren Norm der Cubus von p' ist. Alsdann ergiebt sich

$$x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 = \theta(\xi, \omega) \sqrt[3]{E(\xi, \omega)},$$

worin auch θ eine ganze algebraische Zahl und E eine primitive Form bedeutet. Fügt man zu E nur eine einfache Einheit hinzu $\pm\omega^n$, so gehören alle jene Gleichungen zu derselben Gattung, wie die Abel'sche Gleichung

$$x^3 - 10x + \sqrt{-31}\,(x^2 - 1) = 0,$$

deren Wurzeln die zu $\sqrt{-31}$ gehörigen singulären Moduln der elliptischen Functionen sind. Die Gattung algebraischer Zahlen, welche durch die Wurzeln dieser Gleichung definirt wird, ist ge-

wissermassen arithmetisch dem Bereiche ($\sqrt{-31}$) angehörig und algebraisch demselben unmittelbar associirt. No.

L. Kronecker. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. Kronecker J. XCIV. 338-365.

Die Abhandlung knüpft an einen Aufsatz des Herrn Schwering an. Versteht man unter $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ unbestimmte Grössen, unter w eine Variable, dann gilt die Formel

$$\text{(A)} \qquad (\sum_r w^{mr} x_r)^l \cdot (\sum_r w^{m'r} x_r)^{l'} \dots \equiv \varphi(w) \quad (\text{mod.}(w^n - 1)),$$

$$r = 0, 1, \dots n-1; \; lm + l'm' + \dots \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, n)$$

wo $\varphi(w)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von w bedeutet, deren Coefficienten cyklische rationale Functionen von $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ sind. Bezeichnet man mit ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit, und mit ϖ_h die Summe $\sum_r w^{hr} x_r$, dann folgt aus (A), dass

$$\psi_{h,t}(\omega^t) = \frac{\varpi_{ht}\, \varpi_{kt}}{\varpi_{(h+k)t}}$$

eine ganze Function von ω^t ist, deren Coefficienten rationale cyklische Functionen des x sind. Wenn man ferner mit g eine primitive Congruenzwurzel von $p = n+1$ bezeichnet und

$$x_0 = x, \quad x_1 = x^g, \dots x^{n-1} = x^{g^{p-2}}$$

annimmt, so ergiebt sich durch Vereinfachung einer gewissen Congruenz das Resultat

$$\text{(J)} \qquad \psi_{h,k}(\omega^t) \equiv -1 \quad (\text{mod.}(\omega^t - 1)^2).$$

Aber auch in jeder Gattung Abel'scher Gleichungen eines beliebigen Rationalitätsbereiches giebt es solche, für die ähnliche Vereinfachungen vorliegen.

Hier ergiebt sich auch die Reduction der Jacobi'schen ψ-Functionen auf den sechsten Teil der überhaupt möglichen. Herr Kronecker behandelt weiter die allgemeinere von Jacobi angeregte Frage der Reduction der ψ, welche darauf hinauskommt, $(\alpha, x)^p$ durch ein Product von conjugirten ψ-Functionen

darzustellen und zwar so, dass die Bedeutung der bei (α, x), $(\alpha', x), \ldots$ auftretenden Wurzelzeichen bestimmt ist. Es erfordert das Erstere die Erfüllung der Gleichung

$$(Q) \qquad \varpi_t^n = \prod_h \psi^{r_h}_{t\gamma^h,\ t\gamma^{h+m}} \prod_k \varpi^{s_k}_{t\gamma^k}\ \varpi^{s_k}_{-t\gamma^k},$$

$$\begin{pmatrix} h, k = 0, 1, \ldots n-2 \\ t = 1, 2, \ldots n-1 \end{pmatrix},$$

wo γ eine primitive Congruenzwurzel der Primzahl n ist; die Erfüllung der Congruenzen

$$(R) \qquad \gamma r_h \equiv r_{h-1} \pmod{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots n-2)$$

repräsentirt den zweiten Teil der Forderung. Diese letzteren sind schon bei $n = 47$ nicht mehr lösbar; ist also jene Darstellung möglich, so entbehrt sie doch der Eigentümlichkeit, die sie theoretisch wichtig macht. Aber auch in solcher Einschränkung scheint eine allgemeine Darstellung nicht durchführbar, da (Q) sich in die Congruenzbedingungen

$$(T) \qquad n \equiv 0 \ (\text{mod.}(1-\zeta^{kl}+\zeta^{km})) \qquad (k = 1, 3, 5 \ldots n-2)$$

umsetzen lässt, bei denen ζ eine primitive $(n-1)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit ist, und $l \equiv \text{ind.}\,(1+\gamma^m) \,(\text{mod.}\,(n-1))$ wird; es ist unwahrscheinlich, dass (T) für jedes n erfüllbar ist.

Im letzten Paragraphen wird die Gleichung

$$(\sum_r x^{g^r} w^{hr})^n = p \sum_t c_t w^{ht}$$

$$(r = 0, 1, \ldots p-2; \quad t = 0, 1, \ldots, n-2)$$

behandelt, wo n irgend einen Teiler von $p-1$ bedeutet. Die linke Seite wird in merkwürdiger Weise umgeformt und gedeutet, so dass z. B. c_t als $(p-1)^{\text{ter}}$ Teil der Anzahl aller mod. $(p-1)$ unter einander verschiedenen Wertsysteme $r_1, r_2, \ldots r_n$ definirt wird, welche den beiden Congruenzen

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n \equiv t \ (\text{mod.}\,n), \quad g^{r_1} + g^{r_2} + \cdots + g^{r_n} \equiv 0 \ (\text{mod.}\,p)$$

zugleich genügen. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich weitere interessante Sätze über die Zerlegungen von Primzahlen

$$4p = a^2 + 27b^2, \quad p = a^2 + b^2, \quad p = a^2 + 2b^2,$$

wenn p von der Form $6n+1$, resp. $4n+1$ oder $8n+1$ ist.

No.

B. Igel. Ueber eine Klasse von Abel'schen Gleichungen. Wien. Denkschr. XLV.

Ist $f_1(x) = 0$ mit den Wurzeln $a, b, c, \dots$ irreductibel, und ist es möglich, zwei ganze Functionen f_2 und f_3 so zu bestimmen, dass

$$f_2(a):f_3(a) = f_2(b):f_3(b) = \cdots$$

ist, dann ist die Gleichung $f_1 = 0$ eine Abel'sche von der Form

$$f_1(x) = (x-a)(x-\theta(a))(x-b)(x-\theta(b))\dots = 0.$$

Ferner wird gezeigt: Sind

$$f_1(\lambda, \mu), \; f_2(\lambda, \mu), \; f_3(\lambda, \mu)$$

ganze homogene Functionen n^{ter} Ordnung in λ, μ, und haben die drei Gleichungen

$$f_i(\lambda, \mu)\, f_{i+1}(\lambda', \mu') - f_i(\lambda', \mu')\, f_{i+1}(\lambda, \mu) = 0$$

den grössten gemeinsamen Teiler vom zweiten Grade, so sind $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ Abel'sche Gleichungen; die Wurzeln einer jeden lassen sich rational durch die Wurzeln jeder der anderen beiden ausdrücken und zwar so, dass, wenn durch θ, θ_1 zwei derartige rationale Functionen einer Wurzel bezeichnet werden, $\theta\theta_1 = \theta_1\theta$ ist. No.

M. Weiss. Ueber einige Abel'sche Gleichungen vom sechsten Grade, die sich mit Hülfe einer Gleichung vom vierten Grade auflösen lassen. Hoppe Arch. LXVIII. 304-315.

Sind a, b, c, d die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, so sind diejenigen der behandelten Gleichungen sechsten Grades $ab, ac, bc, \dots$ resp. $a+b, a+c, b+c, \dots$ Die Gleichungen sind jedoch keine Abel'schen, da sich ac nicht rational durch ab ausdrücken lässt. No.

V. Janni. Sul teorema di Sturm. Batt. G. XX. 166-167.

Es wird ein gedanklicher Uebergang vom Fourier'schen zum Sturm'schen Theoreme aufgewiesen. No.

G. J. LEGEBEKE. Eene eigenschap van de wortels eener afgeleide vergelijking. Nieuw Arch. VIII. 75-80.

F. J. VAN DEN BERG. Over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleide. Nieuw Arch. IX. 1-14.

F. J. VAN DEN BERG. Naschrift over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleide. Nieuw Arch. IX. 60.

Ueber die erste Notiz ist schon früher referirt. (S. F. d. M. XIII. 1881. p. 70.). Sie handelt über den Zusammenhang der Wurzeln einer Gleichung und der von ihr abgeleiteten. Die nämliche Aufgabe wird in der zweiten durch geometrische und statische Betrachtungen gelöst. Einige andere Eigenschaften der Gleichungen höheren Grades werden auf demselben Wege gewonnen und daraus einige Eigenschaften hinsichtlich des Gleichgewichts von Kräften abgeleitet.

In der dritten Notiz wird mitgeteilt, dass die Eigenschaft der Wurzeln einer Gleichung, welche in den beiden vorigen behandelt ist, schon in den C. R. von 1874 vorkommt und dort von Lucas und Laguerre behandelt ist. Auch Gauss teilt diese Aufgabe mit in den Gött. gel. Anzeigen für 1816, doch ist der durch Legebeke gegebene Beweis davon ganz unabhängig.

G.

CH. HUDSON. On equal roots of equations. Quart. J. XVIII. 215-229, 327-330.

Es sei

$$f(x) = a_0x^n + na_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2} + \cdots + na_{n-1}x + a_n,$$

$$\psi(r, v, m) = \frac{r(r-v-1)!}{r!}a_m a_{r+m} - v\frac{(r-2)(r-v-2)!}{(r-1)!}a_{m+1}a_{r+m+1}$$
$$+\frac{v(v-1)}{2!}\frac{(r-4)(r-v-3)!}{(r-2)!}a_{m+2}a_{r+m+2} + \cdots$$

Wenn dann $f(x) = 0$ eine $(n-v)$-fache Wurzel besitzt, wobei

$v \leqq \frac{1}{2}(n-1)$ ist, dann hat dieselbe den Wert

$$-\psi(r, v, m):\psi(r-1, v, m),$$

wo für m gesetzt werden kann $0, 1, 2, \ldots, n-2v-1$ und für r einer der Zahlenwerte $2v+1, 2v+2, \ldots n-m$. Hat ferner $f(x) = 0$ eine $(n-v)$-fache Wurzel, wobei $v \leqq \frac{1}{2}n-1$ ist, dann ist $\psi(r, v+1, m) = 0$ für $m = 0, 1, 2, \ldots n-2v-2$, und für $r = 2v+2, 2v+3, \ldots, n-m$. Aus den verschiedenen Wertformen der gleichen Wurzeln folgen Bedingungen unter den Coefficienten a. Für $\psi(r, v+t, m)$ werden Recursionsformeln abgeleitet, in welche die Functionen

$$\psi(r-2\alpha, v, m+\alpha)$$

eingehen. Herr Cayley giebt in einer Anmerkung zum ersten Aufsatze einige der Resultate desselben in entwickelter Form.

No.

Le P. Berloty. Sur les équations algébriques de la forme $(x^p - a^p)\psi(x) = 0$. Nouv. Ann. (3) I. 173-176.

Damit

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

von der Form $(x^p - a^p)\cdot\psi(x)$ sei, ist es hinreichend und notwendig, dass

$$\varphi_\alpha = a_{\alpha-1}x^{m-\alpha+1} + a_{p+\alpha-1}x^{m-p-\alpha+1} + a_{2p+\alpha-1}x^{m-2p-\alpha+1} + \cdots$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ von derselben Form sei. No.

T. S. E. Dixon. A general algebraic method for the solution of equations. Anal. IX. 1-8.

Nimmt man an, die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit fehlendem zweiten Gliede hätten die Form

$$x = a+b+c+\cdots+m,$$
$$x = a\varepsilon+b\varepsilon^2+c\varepsilon^3+\cdots+m\varepsilon^{n-1},$$
$$x = a\varepsilon^2+b\varepsilon^4+c\varepsilon^6+\cdots+m\varepsilon^{2(n-1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x = a\varepsilon^{n-1}+b\varepsilon^{2n-2}+c\varepsilon^{3n-3}+\cdots+m\varepsilon^{(n-1)(n-1)},$$

wo ε eine imaginäre n^{te} Wurzel der Einheit bezeichnet, so sind, wie der Verfasser bemerkt, die Coefficienten reelle Functionen der $a, b, c, \dots$. Der Verfasser schlägt daher vor, die Gleichungen mit Hülfsgleichungen zu lösen, in welchen diese Functionen den gegebenen Coefficienten gleichgesetzt werden. Dass die Functionen, wie der Verfasser behauptet, symmetrisch sind, wenn n eine Primzahl ist, ist nicht richtig, wenn $n>3$. Jn. (O.).

A. N. Miassojedoff. Ein Satz über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch).

In dieser Note wird der folgende Satz bewiesen und zur Trennung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung benutzt:

„Ist

$$v_0 = x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m$$

eine ganze rationale Function von x mit reellen Coefficienten, und setzt man

$$\begin{aligned} V_1 &= p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m, \\ V_2 &= p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \dots + p_m, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ V_{m-1} &= p_{m-1} x + p_m, \\ V_m &= p_m, \end{aligned}$$

so wird die Zahl der reellen Wurzeln der Gleichung $V_0 = 0$, die zwischen zwei positiven Zahlen α und β $(\alpha<\beta)$ liegen, gleich oder um eine grade Zahl geringer, als die Zahl der von der Reihe

$$V_0, V_1, V_2, \dots V_{m-1}, V_m$$

beim Uebergange der veränderlichen x von α zum β gewonnenen Zeichenwechsel." Ty.

L. Gegenbauer. Ueber algebraische Gleichungen, welche eine bestimmte Anzahl complexer Wurzeln besitzen. Wien. Ber. LXXXVII. 264-270.

Ist $f(x)$ in dem reellen Intervall a, b reell, endlich, von dem-

selben Zeichen und so beschaffen, dass die Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ der regulären Kettenbruchentwickelung des Integrals

$$\int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z}$$

den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x-a)(x-b)f(x)y']' = c_\lambda f(x)y \quad (\lambda = 0,\ 1,\dots;\ c_\lambda > c_\varkappa,\ \lambda > \varkappa)$$

genügen; sind ferner $\psi_\varkappa(x)$ und $\psi_\lambda(x)$ zwei Näherungsnenner ohne gemeinsamen Teiler, so hat die Gleichung

$$\psi'_\lambda(x)\,\psi_\varkappa(x) - \psi'_\varkappa(x)\,\psi_\lambda(x) = 0$$

für $\lambda > \varkappa$ genau $\lambda-\varkappa-1$ reelle, ungleiche, innerhalb des Intervalls a, b liegende und $2\varkappa$ complexe Wurzeln. No.

LAGUERRE. Sur la distribution, dans le plan, des racines d'une équation algébrique dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R. XCIV. 412-414, 509-511.

Es bedeute $f(x) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades; ferner sei

$$X = x - \frac{2(n-1)f'(x)}{f''(x)},$$

und x_1 eine Wurzel von $f = 0$; X_1 das Resultat der Substitution von x_1 in X. Werden x_1, X_1 durch zwei Punkte einer Ebene repräsentirt, und zieht man durch x_1 einen Kreis, der alle Wurzeln von $f = 0$ aus- oder einschliesst, dann liegt X_1 in demselben Ebenenteile, in dem sich die Wurzeln befinden. Ist O der Punkt (0, 0), A der Punkt $(-2n,\ 0)$, dann umschliesst jeder Kreis, der durch A, O geht, mindestens eine Wurzel von $f = 0$. Im Zusammenhange mit dieser Kreisschar steht eine Parabel P, welche alle Wurzelpunkte einschliesst, und die den Punkt O zum Brennpunkt hat. Eine unendliche Anzahl anderer Curven kann gefunden werden, welche zu einer Grenzcurve π führen. Diese ist transcendent; sie geht durch A; die Tangente in einem beliebigen Punkte N steht senkrecht auf dem durch O bestimmten Durchmesser des Kreises OAN; sie umschliesst alle Wurzelpunkte. Es folgt eine Anwendung auf die hypergeometrische Reihe. No.

A. SIEBEL. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Hoppe Arch. LXVII. 375-412.

Fortsetzung der früheren Untersuchungen; Bestimmung der complexen Wurzeln; Trennung und näherungsweise Berechnung derselben. No.

J. P. MOTT. On the solution of equations. Anal. IX. 104-106.

Beispiele für die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung in der Form

$$a = x + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots$$

mit Hülfe von Reihen für die umgekehrten Functionen. Jn. (O.).

K. V. ZENGER. Auflösung numerischer Gleichungen mit Hilfe von Logarithmen. Cas. XI. 288-291. (Böhmisch).

Enthält eine approximative Bestimmung der Wurzeln einer numerischen Gleichung mit Hülfe von Logarithmen. Std.

M. K. Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Cas. XI 217-231. (Böhmisch).

Enthält eine Beleuchtung des bekannten Lagrange'schen Princips, welches den betreffenden Lösungsmethoden gemeinsam ist. Std.

A. PÁNEK. Bemerkung zur Auflösung der Gleichung

$$x^{2n} + px^n = q$$

und der Gleichung dritten Grades. Cas. XI. 231-233. (Böhmisch).

Enthält die Auflösung der ersten Gleichung unter Verwendung von

$$a = x^n + p,$$

während die zweite Notiz direct die Substitution

$$y = u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}}$$

verwendet, um zur Cardanischen Formel zu gelangen. Std.

Th. Sinram. Zur Gleichung dritten Grades. Hoppe Arch. LXVIII. 106-110.

Dass die Wurzeln der Gleichungen dritten Grades von der Wahl der Wurzeln der zur Lösung nötigen Hülfsgleichungen unabhängig sind, wird durch wirkliche Durchführung der umständlichen Rechnungen gezeigt. No.

W. Ligowski. Bemerkungen zu der Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Hoppe Arch. LXVII. 446-447.

Auflösung der Gleichung

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

mit Hülfe der Zerlegung

$$(x^2+\frac{a+t}{2}x+p)(x^2+\frac{a-t}{2}x+q)=0.$$

No.

R. Hoppe. Reduction einer biquadratischen Gleichung auf eine kubische. Hoppe Arch. LXIX. 111-112.

Reduction der Gleichung auf eine kubische und zwei reine quadratische Gleichungen. No.

Perrin. Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs. S. M. F. Bull. X. 139-147.

Benutzt man Identitäten, wie z. B.

1) $(a+b+c)^4-2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2-8abc(a+b+c)$
$+[(a^2+b^2+c^2)^2-4(a^2b^2+\cdots)]=0,$

2) $(ab+bc+ca)^4-2(a^2b^2+\cdots)(ab+bc+ca)^2-8a^2b^2c^2(ab+\cdots)$
$+[(a^2b^2+\cdots)^2-4a^2b^2c^2(a^2+\cdots)]=0,$

3) $(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b)-(a^5+b^5)=0,$

dann kann man durch 1), 2) die Wurzeln von biquadratischen Gleichungen auf die Form $x=a+b+c$ bez. $x=ab+bc+ca$,

durch 3) die Wurzeln von

$$x^5+px^3+qx^2+\frac{1}{5}p^2x+s=0$$

auf die Form $x=a+b$ bringen. Die Methode ist übrigens durchaus nicht neu. No.

S. R. MINICH. Sulle equazioni di quinto grado. Ven. Ist. Atti (5) VIII. 307-320, 893-908.

Der Herr Verfasser giebt eine Resolvente sechsten Grades, für deren Richtigkeit er den Beweis weiteren Mitteilungen vorbehält. Da er sie lediglich als Function der Coefficienten der ursprünglichen Gleichung mitteilt, so ist sie wenig übersichtlich; ausserdem findet Herr Minich, dass sie mit einer von Malfatti gegebenen Resolvente übereinstimme. (Vgl. übrigens F. d. M. XIII. 1881. p. 81.). No.

TH. SINRAM. Beitrag zur Lösung von Gleichungen höheren Grades. Hoppe Arch LXVIII. 223-224, LXIX. 111.

Es wird a^n+b^n nach Potenzen von $a+b$ und $a.b$ entwickelt. No.

LAGUERRE. Sur quelques équations transcendantes. C. R. XCIV. 160-163.

LAGUERRE. Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière. C. R. XCIV. 635-638.

LAGUERRE. Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. C. R. XCV. 828-831.

Es handelt sich um die Beantwortung der Frage: Welche elementaren Eigenschaften der algebraischen Gleichungen gelten auch für transcendente Gleichungen? Für die Untersuchung hierüber ist die Einführung der Weierstrass'schen Primfunctionen von Wichtigkeit. Bezeichnet man durch $\varphi(x)$ ein Polynomen vom

Grade n, so nennt Herr Laguerre die Function

$$F(x) = \lim e^{\varphi(x)+\Sigma\left(\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\cdots+\frac{x^n}{na^n}\right)}\cdot \Pi\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

eine Transcendente „vom Geschlechte n"; er zeigt: wenn der Quotient $f'(x):(f(x)X^n)$ für ein ganzzahliges n sich bei wachsendem x der Grenze Null nähert, dann ist $f(x)$ vom Geschlechte n. Wenn in

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$$

die A Functionen von n sind, wenn $F(x) = \lim_{n=\infty} \Phi(x)$ eine unbedingt convergente Reihe wird, wenn $\Phi(x) = 0$ für jeden Wert von n nur reelle Wurzeln besitzt, die sämmtlich von gleichem Zeichen sind, dann ist $F(x)$ gleich dem Producte einer ganzen Function des Geschlechts Null, multiplicirt mit einer Grösse $e^{c_1 x + c_2}$. Ist $F(x)$ vom Geschlechte 1, und besitzt $F(x) = 0$ nur reelle Wurzeln, dann sind alle Ableitungen $F'(x)$, $F''(x)$,... gleichfalls Transcendenten vom Geschlechte 1, und $F'(x) = 0$, $F''(x) = 0$,... haben nur reelle Wurzeln. Setzt man $1 : F(x) = f(x)$, dann haben alle Functionen $f(x)$, $f''(x)$, $f^{IV}(x)$, ... für jeden reellen Wert von x dasselbe Vorzeichen. Lässt man für $F(x) = 0$ die Voraussetzung der Realität der Wurzeln fallen, dann gilt der Satz: „Zwei auf einander folgende reelle Wurzeln von $F(x) = 0$ umschliessen eine und nur eine solche von $F'(x) = 0$; substituirt man in $F(x)$ zwei auf einander folgende Wurzeln von $F'(x) = 0$, und haben die Resultate gleiche Vorzeichen, so besitzt $F(x) = 0$ imaginäre Wurzeln." No.

V. Hioux. Racines communes à deux équations algébriques entières. Ann. de l'Éc. Norm. (2) XI. 135-136.

Neuer Beweis für ein von Herrn Hioux früher gegebenes Theorem. (Ann. de l'Ec. N. (2) X. 386., s. F. d. M. XIII. 1881. 81.) No.

Weitere Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben über specielle Gleichungen von MORET-BLANC, F. BORLETTI, H. LEZ, S. RÉALIS, SYLVESTER, J. HAMMOND, G. HEPPEL, G. TURRIFF, W. J. C. SHARP, W. J. CONSTABLE, J. O'REGAN, MATZ, W. J. C. MILLER, T. WOODCOCK, E. RUTTER finden sich Nouv. Ann. (3) I, 266-267, 368-371, 377-379, 412-413, 426; Ed. Times XXXVI. 39, 65. 102, 106; XXXVII. 62-67, 114-115.

O.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

R. DEDEKIND. Ueber die Discriminante endlicher Körper. Gött. Abh XXIX.

Diese umfangreiche Arbeit schliesst sich an eine frühere desselben Verfassers (in den Gött. Abh. XXIII) an und hat eine genauere Einsicht in die Natur der Discriminante (Grundzahl) D eines endlichen Zahlenkörpers zum Ziel. Zunächst wird man nach den in dieser (ganzen rationalen) Zahl aufgehenden Primfactoren fragen. Dies behandelt die erste Hälfte der Abhandlung, die zu dem Resultat führt: „Die rationale Primzahl p geht stets und nur dann in der Grundzahl D von Ω auf, wenn p in diesem Körper Ω durch das Quadrat eines Primideals teilbar ist.“

Zuförderst werden einige, meist bekannte Hülfsformeln entwickelt, von denen hier nur folgende zu erwähnen nötig sein wird.

Es sei θ eine Zahl in Ω, $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)} \dots \theta^{(n)}$ ihre conjugirten Man setze

$$F(t) = (t-\theta^{(1)})(t-\theta^{(2)})\dots(t-\theta^{(n)}) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n.$$

Dann ist die Norm $N(\theta)$ von θ gleich $(-1)^n a_n$, und die Spur $S(\theta)$ von θ gleich $-a_1$, wo a_1, a_n rationale und, falls θ eine ganze Zahl (in Ω) ist, ganze rationale Zahlen sind.

Die Normen und Spuren hängen mit den Discriminanten durch die beiden Relationen zusammen:

$$(1)\qquad \Delta(1,\ \theta,\ \theta^2,\ldots \theta^{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N[F'(\theta)]$$

$$(2)\qquad \Delta(\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots \alpha_n) = |S(\alpha_i\ \alpha_k)| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

wo in der zweiten Formel die α irgend n Zahlen von Ω sind, und rechts die Determinante, gebildet aus den Spuren der n^2 Producte $\alpha_i\ \alpha_k$, steht.

Ist jetzt im Besonderen θ eine ganze Zahl (von Ω), dann kann man auf die linke Seite von (1) einen bekannten Determinantensatz anwenden und erhält:

$$(3)\qquad \Delta(1,\ \theta,\ \theta^2,\ldots \theta^{n-1}) = Dk^2 = \pm N\,[F'(\theta)].$$

Hier ist D die Grundzahl von Ω (d. i. die Discriminante eines Systems von n unabhängigen ganzen in Ω enthaltenen Zahlen), k eine ganze rationale Zahl (der sog. Index von θ).

Endlich liefert der Fermat'sche Potenzsatz für die Spur einer ganzen Zahl ω (von Ω) die wichtige Formel

$$(4)\qquad S(\omega) \equiv S(\omega^p)\ (\text{mod. } p),$$

woraus nach (2) folgt, dass auch für p als eine rationale (positive) Primzahl gilt:

$$(5)\qquad \Delta(\alpha_1^p,\ \alpha_2^p,\ldots \alpha_n^p) \equiv \Delta\,(\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots \alpha_n)\,(\text{mod. } p).$$

Nunmehr kann man zum Beweise des Hauptsatzes schreiten, falls man noch die eine Voraussetzung macht, dass es unter den ganzen Zahlen $\mathfrak{o}$ (in Ω) wenigstens eine, θ, giebt, deren Index k nicht durch p teilbar ist, denn mit Hülfe eines in der früheren Arbeit d. H. Verfassers aufgestellten Satzes, der dann die Zerlegung des Ideals $\mathfrak{o}p$ in Primfactoren durch die Zerlegung der zugehörigen Function $F(t)$ in Primfactoren nach dem Modul p ersetzt, zeigt man leicht, dass p in der Norm von $F'(\theta)$, also nach (3) auch in Dk^2 aufgeht. Zufolge unserer Voraussetzung muss demnach D durch p teilbar sein.

Da es tatsächlich Körper Ω giebt, bei denen jene Voraussetzung nicht für alle Primzahlen p zutrifft, so wird ein ganz neuer, nicht ganz einfacher Weg eingeschlagen, der den Herrn Verfasser, wie er angiebt, schon 1871 zum Ziele geführt hatte.

Den zu beweisenden Satz kann man in zwei Teile zerlegen:

1) „ist p durch das Quadrat eines Primideals teilbar, so geht p in D auf". 2) die Umkehrung davon. Der erste Teil ist bald mit Hülfe der Relation (5) erledigt, der zweite aber erfordert zuvor eine Reihe von fünf Hülfssätzen.

Erstens lässt sich die Annahme, eine aus lauter ganzen rationalen Zahlen c_{ik} gebildete Determinante n^{ten} Grades sei teilbar durch die Primzahl p, ersetzen durch die n Congruenzen:

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik} x_k \equiv 0 \pmod{p} \qquad (i=1, 2, \ldots n),$$

wo die x ganze rationale, nicht sämmtlich durch p teilbare Zahlen sind.

Zweitens bilde man aus den n festen, ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (in Ω) mittels der ganzen rationalen Zahlen x den Modul $\mathfrak{a}$ der Zahlen

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + \cdots + x_r \alpha_r.$$

Dann wird folgende Definition eingeführt. Die Zahlen α sollen ein „nach p irreductibles" System bilden, wenn die Congruenz $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$ nur durch $x_1 \equiv 0, \ldots x_r \equiv 0 \pmod{p}$ erfüllt werden kann. Es giebt dann genau p^r in $\mathfrak{a}$ enthaltene nach p incongruente Zahlen. Gilt aber jene Annahme nicht, so giebt es immer $m < r$, aber auch nicht mehr Zahlen in $\mathfrak{a}$, die ein nach p irreductibles System bilden, und die erwähnte Anzahl sinkt von p^r auf p^m.

Die Bedingung der Irreductibilität der α lässt sich einfacher ausdrücken, sobald man die α aus den n Zahlen ω einer Basis (von Ω) linear zusammensetzt, sie wird nach dem ersten Hülfssatz einfach die, dass die Determinante der Coefficienten nicht durch p teilbar ist.

Diese zwei Hülfssätze bilden im Wesentlichen nur eine Erweiterung der in Dirichlet's Zahlentheorie, (Ende des § 162) gemachten Entwickelungen auf Congruenzen. Von jetzt ab wird darüber hinausgegangen.

Es sei die letzt erwähnte Annahme erfüllt, dann kann man nach dem zweiten Hülfssatz (für irgend eine ganze Zahl ω in Ω) setzen:

$$\omega \equiv x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \pmod{p},$$

also auch

$$\omega\alpha_k \equiv \sum_{i=1}^{i=n} x_{ik}\alpha_i \pmod{p} \qquad (\text{für } k = 1, 2, \ldots n),$$

wo die ganzen rationalen x_{ik} nach dem Modul p bestimmt sind. Dann gilt der dritte Hülfssatz, dass:

$$7) \qquad S(\omega) \equiv \sum x_{ii} \pmod{p}.$$

Jetzt zerlege man das Ideal $\mathfrak{o}p$ in zwei relative Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Sind die Grade der drei Ideale resp. n, r, s (wo $n = r+s$), so giebt es in $\mathfrak{q}$ ein System von r nach p irreductibeln Zahlen $\varrho_0, \varrho_1, \ldots \varrho_{r-1}$ und ebenso in $\mathfrak{p}$ ein System von s nach p irreductibeln Zahlen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_{s-1}$. Zugleich aber bilden auch diese $n = r+s$ Zahlen zusammen ein solches System, so dass also jede Zahl ω (in $\mathfrak{o}$) die Relation befriedigt:

$$\omega \equiv \sum h\varrho + \sum k\sigma \pmod{p},$$

wo die h und k ganze rationale Zahlen sind.

Wendet man hier die Formel (7) unter der Bedingung an, dass ω eine beliebige durch $\mathfrak{q}$ teilbare Zahl μ ist, so folgt mittels der Darstellung

$$\mu\varrho_i \equiv \sum_k h_{ki}\,\varrho_k \pmod{p} \qquad (\text{die } h \text{ sind ganz und rational})$$

die Relation des vierten Hülfssatzes:

$$(8) \qquad S(\mu) \equiv \sum_i h_{ii} \pmod{p} \qquad (i = 0, 1, \ldots r-1).$$

Setzen wir endlich auch noch fest, dass $\mathfrak{p}$ ein (absolutes) Primideal ist (so dass also p nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbar ist), so kann man endlich den fünften Hülfssatz beweisen, dass die Determinante

$$(9) \qquad R = |S(\varrho_i\varrho_k)| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots r-1),$$

nicht durch p teilbar ist.

Nunmehr lässt sich der Beweis des zweiten Teiles unseres Satzes so führen. Da nach (2) die Grundzahl D darstellbar ist durch

$$D = |S(\omega_i\omega_k)| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

(wo die ω eine Basis von $\mathfrak{o}$ bilden) und da, wie vorausgesetzt, D durch p teilbar ist, so fliesst nach (6) aus der letzten Gleichung

das Congruenzsystem

$$\sum_i x_i \, S(\omega_i \omega_k) \equiv 0 \pmod{p},$$

wo die x ganz und rational, sowie nicht sämmtlich durch p teilbar sind. Setzt man daher $\mu = \sum x \Omega$, so ist μ nicht teilbar durch p, so dass sich die Congruenzen des Systems in die eine zusammenfassen lassen:

$$S(\mu\omega) \equiv 0 \pmod{p},$$

woraus wieder folgt, dass

$$(10) \qquad S(\nu) \equiv S(\mu\omega + p\omega') \equiv 0 \pmod{p},$$

wenn ω, ω' willkürliche Zahlen in $\mathfrak{o}$ sind. Hier ist das Ideal $\mathfrak{n}$ der Zahlen ν ein echter Teiler von $\mathfrak{o}p$. Diese letzte Congruenz ist für die Teilbarkeit von D durch p characteristisch.

Wir nehmen jetzt indirect an, $\mathfrak{o}p$ sei nicht durch $\mathfrak{p}^2$ (d. i. das Quadrat eines Primideals) teilbar, also gleich $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ (wo $\mathfrak{q}$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist). Da es unter den die Factoren von $\mathfrak{o}p$ bildenden Primidealen wenigstens eines geben muss, das in dem Ideal $\mathfrak{n}$ nicht aufgeht, so nehme man grade dieses $\mathfrak{p}$ als den ersten der beiden Factoren von $\mathfrak{o}p$. Dann ist $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{n}$ teilbar, also sind auch nach (10) alle $S(\lambda)$ durch p teilbar, wenn λ dem Ideal $\mathfrak{q}$ angehört.

Die beiden Ideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sind solche, auf die man ohne Weiteres den fünften Hülfssatz anwenden kann, da aber die $\varrho_i \, \varrho_k$ (die dort auftreten) ebenfalls in $\mathfrak{q}$ enthalten, mithin ihre Spuren durch p teilbar sind, so kommt man auf den Widerspruch, dass die Determinante dieser Spuren einmal teilbar, und dann wieder nicht teilbar durch p ist, womit die gemachte Annahme widerlegt und unser Satz bewiesen ist.

Um aber tiefer in die Natur der Grundzahl D einzudringen, bedarf es noch eines grösseren Hülfsapparates, der Theorie der Moduln und ihrer Ordnungen, sowie der Theorie der complementären Basen. Es ist hier nicht der Ort, diesen schwierigen und abstracten Untersuchungen genauer zu folgen, es mag vielmehr genügen, die Hauptresultate namhaft zu machen.

Es existirt ein gewisses ausgezeichnetes Ideal $\mathfrak{d}$, das „Grundideal“ des Körpers Ω, welches der Bedingung

$$(11) \qquad D\mathfrak{o} = \mathfrak{d}(D\mathfrak{o}'), \; \mathfrak{o} = \mathfrak{d}\mathfrak{o}',$$

wo $\mathfrak{o}'$ das Complement des Moduls $\mathfrak{o}$ ist, genügt.

Die Norm dieses Grundideals ist die Grundzahl des Körpers.

Die Grundzahl D ist stets teilbar durch das Quadrat des Grundideals.

Das wichtigste Resultat endlich, zu dessen Ableitung noch die Theorie der höheren Congruenzen herangezogen wird, sagt aus, dass das Grundideal $\mathfrak{d}$ der grösste gemeinschaftliche Teiler aller Hauptideale von der Form $\mathfrak{o}F'(\theta)$ ist, welche allen ganzen Zahlen θ des Körpers entsprechen.

Durch die Verbindung dieser Resultate ergiebt sich auch leicht ein neuer Beweis des zuerst angeführten Hauptsatzes.

Zum Schluss sei noch erwähnt, das sich diese Untersuchungen noch bedeutend erweitern lassen, sobald man den Körper der rationalen Zahlen, soweit er hier auftritt, überall durch einen beliebigen in Ω als Divisor enthaltenen Körper ersetzt. Dies soll jedoch an anderer Stelle vom Herrn Verfasser ausgeführt werden. My.

A. Brill. Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades. Klein Ann XX. 330-357.

Eine der Grundaufgaben der Invariantentheorie (der algebraischen Formen) ist die Ermittelung der (ganz) rationalen Abhängigkeit der invariantiven Formen von den gegebenen Grundformen (d. h. von den Coefficienten derselben). Die Umkehrung aber dieser Darstellung, die irrationale Abhängigkeit der letzteren Formen von den ersteren, ist bis jetzt nur in ganz vereinzelten Fällen, jedenfalls nicht principiell in Angriff genommen. Die vorliegende Arbeit macht in dieser Richtung einen wesentlichen Schritt vorwärts, indem sie die Combinanten eines Systems von p binären Formen n^{ter} Ordnung in irrationaler Weise von einer gewissen erzeugenden Function abhängen lässt, die dann das gegebene System gradezu zu ersetzen im Stande ist.

Bekanntlich hat Herr Gordan eine Form mit mehreren Reihen von Veränderlichen aufgestellt, aus der die Combinanten eines

gegebenen Formensystems durch rationale Processe hervorgehen. In dem hier vorliegenden einfachen Falle ist diese Form die p-reihige Determinante der gegebenen, in den Variabelnreihen $(x_1 y_1, \ldots, x_p y_p)$ geschriebenen Determinante. Von dieser Form gelangt der Herr Verfasser zu der gewünschten (weit einfacheren), indem er die $\frac{p(p-1)}{2}$ Differenzen der Variabeln, die die Determinante zu Factoren besitzen muss, auf eine eigentümliche Weise absondert, und dann die p (nicht homogenen) Variabeln einander gleich setzt. Diese neue Form $W(x)$, gleichfalls als Determinante (von $n+1$ Reihen) darstellbar, denke man sich nach den Potenzen von x ausgerechnet, dann sind die Coefficienten linear und homogen in den p-reihigen Determinanten der durch die gegebenen Formencoefficienten gebildeten Matrix.

Eine zweite Darstellung dieser Form $W(x)$ ist die als Determinante der p^{ten} Differentialquotienten der Formen f nach x, y.

Zunächst wird von der Form $W(x)$ die fundamentale Eigenschaft nachgewiesen, dass zwischen ihren Coefficienten keine Relationen stattfinden (vorausgesetzt, dass das Gleiche auch von den Coefficienten der Formen f gilt) d. h. also, dass die Form W immer zugleich mit den gegebenen Formen f eine allgemeine Form ihrer Ordnung ist. Die Anzahl ihrer Coefficienten beträgt $p(n-p+1)+1$.

Umgekehrt lässt sich jede gegebene (allgemeine) binäre Form vom Grade N so oft in die Form W bringen, als die Zahl N sich in die beiden ganzzahligen Factoren p und $n-p+1$ spalten lässt.

Zunächst scheint es allerdings, als ob die Zahl der Formen W die doppelte sein müsste; die genauere Untersuchung zeigt aber, dass je zwei dieser Formen, von denen die eine aus der anderen durch Vertauschung der beiden Factoren p und $n-p+1$ hervorgeht, identisch sind. Dies drückt sich in dem wichtigen Combinantenprincip aus:

„Die Combinanten eines Systems von p binären Formen n^{ter} Ordnung $(n \geqq p)$ sind der Zahl und Form nach identisch mit denen eines Systems von $n-p+1$ Formen derselben Ordnung."

Uebrigens wird dies Princip sofort auf ein System von Formen mit beliebig vielen Veränderlichen ausgedehnt, indem an die Stelle der Zahl n die um Eins vermehrte Anzahl der Terme einer solchen Form tritt. Die beiderseitigen Formen sind immer, mit Rosanes zu sprechen, je zu einander conjugirt.

Die dritte fundamentale Eigenschaft der Form $W(x)$ ist die, dass ihre Discriminante in zwei in den α, β ... (d. s. den p-gliedrigen Determinanten aus den Coefficienten der f) rationale Factoren U, C zerfällt, von denen der erste in den α, β, ... vom Grade $(p+1)(n-p)$, der zweite vom Grade $(p-1)(n-p+2)$ ist. Zugleich wird die Bedeutung des Verschwindens eines dieser beiden Factoren entwickelt.

Von diesen Principien wird eine ausführliche Anwendung auf die Functionaldeterminante zweier binärer Formen (dritten und) vierten Grades gemacht. Um eine allgemeine Form (vierten) sechsten Grades auf die Form W zu bringen, bedarf es der Auflösung einer Hülfsgleichung (zweiten) fünften Grades. Die Notwendigkeit, diese Hülfsgleichung der gegebenen Form zu adjungiren, steht in engstem Zusammenhang mit den (ein) drei Relationen, die zwischen den Determinanten α, β, ... bestehen.

Eben diese Hülfsgleichung fünften Grades dient weiter dazu, lineare Substitutionen aufzustellen, durch welche die Form W vom sechsten Grade auf gewisse canonische Formen gebracht werden kann, zu denen man folgendermassen gelangt.

Man ersetze die zwei gegebenen Formen vierten Grades durch irgend drei zu ihnen conjugirte f_1, f_2, f_3. Unter den aus diesen durch lineare Combination entstehenden Formen befinden sich (ohne Rücksicht auf willkürliche constante Factoren) einmal drei Formen $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_2\varphi_3$, $\varphi_3\varphi_1$, (wo die φ quadratische Formen sind), sodann vier Quadrate $\psi_1^2, \dots \psi_4^2$. Sind $x_i y_i$ die Verschwindungswerte einer Form φ_i, und $\varepsilon_i \eta_i$ die einer Form ψ_i, so geht mittels der Substitutionen

$$\text{I.}\quad x' = \frac{x-x_i}{x-y_i}\cdot\text{const.},\qquad \text{resp.}\qquad \text{II.}\quad x' = \frac{x-\varepsilon_i}{x-\eta_i}\cdot\text{const.}$$

die Form $W(x)$ in die resp. canonischen Formen über:

I. $x^6+2px^5+3qx^4+4rx^3+3x^2+2px+q$,
II. $x^6+ax^4+bx^2+cx^2+1$.

Dabei setzen also die Coefficienten der bezüglichen Substitionsformeln die Adjunction je einer Wurzel einer Gleichung fünften und einer dritten, resp. vierten Grades voraus.

Bildet man die Discriminante der Form I und deutet dabei die reellen p, q, r als rechtwinklige Coordinaten eines Raumpunktes, so gelangt man zu einer sehr instructiven Discussion der Realitätsverhältnisse der Wurzeln.

Im Weiteren treten die vier quadratischen Formen ψ_i, namentlich in ihrem Zusammenhange mit den Wurzeln der Hülfsgleichung fünften Grades in den Vordergrund. Das Characteristische der vier Formen ψ_i ist, dass durch irgend drei derselben (beliebig anzunehmende) immer die vierte eindeutig so bestimmt ist, dass sowol zwischen den vier Formen, als ihren Quadraten eine lineare Identität herrscht.

Bildet man noch die sechs Functionaldeterminanten T_{ik} je zweier der ψ, so haben diese $6+4=10$ quadratischen Formen die Eigenschaft, beim Uebergang von einer Wurzel der Gleichung fünften Grades zu einer anderen sich nur in gewisser Weise zu vertauschen, und zwar so, dass immer eines der ψ_i ungeändert bleibt, während die drei anderen ψ_k, ψ_l, ψ_m sich gegen die drei Formen T_{kl}, T_{km}, T_{lm} auswechseln.

Bei Zugrundelegung von drei der ψ gelingt es, alle hier auftretenden Formen mit Hülfe des vollen Systems der drei ψ auszudrücken.

Eine sehr einfache Uebersicht über den hier auftretenden Formenkreis erhält man, wie Referent hinzufügen möchte, wenn man die f_i als (homogene) Coordinaten eines variabeln Punktes einer rationalen ebenen Curve vierter Ordnung R deutet. Dann liefert $W=0$ die sechs Wendepunkte von R, die φ_i sind die Argumentenpaare der Doppelpunkte, die ψ_i die der Berührungspunkte der Doppeltangenten. Von dem Schnittpunkt je zweier Doppeltangenten geht noch ein Tangentenpaar an die Curve; dies sind die sechs T_{ik}.

Von jedem Punkt einer Doppeltangente D geht noch ein Tangentenquadrupel an R, alle diese Quadrupel constituiren eine lineare Schaar mit der Functionaldeterminante W.

Endlich hat auch die dem Doppeltangentenvierseit einbeschriebene Kegelschnittschaar mit R eine lineare Schaar von Tangentenquadrupeln gemein, deren Functionaldeterminante gleichfalls W ist. Diese fünf linearen Quadrupelschaaren entsprechen den fünf Wurzeln der Hülfsgleichung, die letztere Schaar der ausgezeichneten Wurzel.

Der Uebergang von dieser Wurzel zu einer der vier andern vollzieht sich mittels einer quadratischen (Classen-)Transformation, die zu Fundamentalgeraden immer drei der vier Doppeltangenten D besitzt. Durch diese Transformation geht die Curve R wieder in eine solche über. Der Uebergang der zehn Formen ψ, T in sich fällt dann in die Augen.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass diese Untersuchungen in engstem Zusammenhang mit denen des Herrn Stéphanos und des Referenten stehen, ohne dass dieser Zusammenhang subjectiv irgendwie nachweisbar wäre. Wegen des Näheren sei auf die Schrift des Referenten über lineare Räume verwiesen.

My.

W. R. W. Roberts. A geometrical representation of a system of two binary cubics and their associated forms. Lond. M. S., Proc. XIII. 16-25.

Eine cubische lineare Form

$$f = a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3$$

repräsentirt der Herr Verfasser durch eine Ebene

$$a_0u_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3 = 0,$$

die aus der cubischen Raumcurve

$$\varrho X_0 = x_1^3,\ \varrho X_1 = 3x_1^2x_2,\ \varrho X_2 = 3x_1x_2^2,\ \varrho X_3 = x_2^3$$

drei Punkte ausschneidet, deren Argumente die Wurzeln von f sind. Auf dieser Grundlage giebt der Herr Verfasser einfache geometrische Deutungen und Constructionen des vollen Systems

zweier cubischer Formen f, φ. So entspricht z. B. der Hesse'schen Form von f die Schnittlinie zweier „Ebenen der Curve", die in der Ebene „f" liegt; ferner der Functionaldeterminante von f, φ die vier Tangenten, welche die Schnittlinie der beiden Ebenen „f", „φ" treffen etc.

Von der Sturm'schen Arbeit (Borchardt J. LXXXVI. 116, siehe F. d. M. X. 1878. 96), die mit dieser die Grundlage und die meisten Resultate gemein hat, scheint der Herr Verfasser keine Kenntnis gehabt zu haben. My.

A. Cayley. Tables for the binary sextic. Sylv., Am. J. IV. 379-384.

Die Zahl der Covarianten einer binären Form sechsten Grades (diese mit eingeschlossen) beträgt bekanntlich 26. Zuerst werden die Leitglieder der ersten 18 dieser Covarianten angegeben. Dann wird gezeigt, wie sich die Leitglieder der folgenden 8 Covarianten (von den Graden 7 bis 15 in den Coefficienten der Grundform) aus den Coefficienten von einigen der früheren zusammensetzen. My.

F. de Bruno. Quelques applications de la théorie des formes binaires aux fonctions elliptiques. Sylv., Am. J. V. 1-25.

Die von Herrn Klein auf functionentheoretischem Wege (bei dessen Verfolgung namentlich die hypergeometrischen Reihen einen wesentlichen Durchgangspunkt bilden) ermittelte Darstellung der Elemente der elliptischen Functionen mittels der absoluten Invariante der binären biquadratischen Form wird hier mit Ausschluss nicht-algebraischer Hülfsmittel auf rechnerischem Wege erzielt. Der Hauptsatz lautet:

Ist Y die gegebene binäre Form vierten Grades (in den Variabeln y geschrieben) mit positiver Discriminante Δ, i und j ihre Invarianten, ferner $I = \frac{i^3}{j^2}$, $H = \frac{\Delta}{i^3}$,

$$T = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{4}{27}H\right)+\frac{6}{2}\left(\frac{4}{27}H\right)^2+\frac{9.8}{2.3}\left(\frac{4}{27}H\right)^3+\cdots\right\},$$

$$k^2 = \frac{\sqrt{1+T}-1}{\sqrt{1+T}+1}, \quad \varrho = i\sqrt[4]{3}\sqrt[12]{\frac{\varDelta}{H}}\left\{\frac{1+\sqrt{1+T}}{\sqrt[6]{1+4T}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

dann hat man

$$\int\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\varrho}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wo, abgesehen vom Factor $\sqrt[12]{\varDelta}$, die rechte Seite allein von der absoluten Invariante (H, resp. I) abhängt.

Für K ergiebt sich die gut convergirende Reihe:

$$K = \frac{2k'}{(1+\sqrt{k'})^2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^4+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^8 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{12}+\cdots\right].$$

Hier kann man das arithmetisch-geometrische Mittel $M(1+x, 1-x)$ einführen, für dessen reciproken Wert Gauss (Werke Bd. III. p. 367) die Reihe aufgestellt hatte:

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2x^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2x^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2x^6+\cdots;$$

dann wird

$$K = \frac{\pi}{M(1+k', 2\sqrt{k'})},$$

desgleichen bestimmt sich der Modul k durch die für $H<1$, und $T<1$ stark convergirende Reihe:

$$k^2 = 6\left(\frac{4}{27}H\right)\left\{\frac{1}{32}+\frac{29}{8.32}\left(\frac{4}{27}H\right)+\frac{43}{128.32}\left(\frac{4}{27}H\right)^2+\cdots\right\}.$$

Endlich zeigt sich die rapideste Convergenz in folgender neuen θ und q verknüpfenden Relation:

$$\theta(0)+\theta_1(0)+2\theta\left(\frac{K}{2}\right) = 4+8\,(q^{16}+q^{64}+q^{144}+\cdots),$$

oder auch, wenn man hier die θ-Werte wieder mit Hülfe von K und k' ausdrückt:

$$\sqrt{\frac{K}{8\pi}}\left(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'}\right) = 1+2\left(q^{16}+q^{64}+q^{144}+\cdots\right)$$

$$= 1+2\sum_{1}^{\infty} q^{(4p)^2} = \sqrt{\frac{2K_{16}}{\pi}},$$

wenn man mit K_{16} das bezeichnet, was aus K wird, wenn q in q^{16} übergeht. Der Vergleich eines Zahlenbeispiels mit einem Legendre'schen Resultat zeigt die grosse Fruchtbarkeit der letzten Formel.

My.

C. Jordan. Rapport sur un mémoire de M. C. Stéphanos, intitulé: „Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne." C. R. XCIV. 1230-1234.

Es ist dies der Bericht der Commission über das Werk des Herrn Stéphanos, aus dem der letztere bereits früher (siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 92) einen Auszug in den Comptes Rendus gegeben hatte.

Als neu erscheint in diesem Bericht die Erwähnung des wichtigen Combinantenprincips, nach dem zwei conjugirte Systeme binärer Formen die gleichen Covarianten haben. Bei der Ableitung dieses Princips stützt sich der Herr Verfasser auf die berühmte Gordan'sche Abhandlung (Math. Ann. Bd. V. 95, s. F. d. M. IV. 1872. p. 61.).

Im Besonderen wird das Princip angewandt auf Formenbüschel, und dabei der Zusammenhang der Jacobiana des Büschels mit den Formen des letzteren eingehend erörtert. Als interessantes Beispiel dienen diejenigen Büschel von biquadratischen Formen, die die nämliche Jacobiana (eine gegebene Form sechsten Grades) besitzen. Zugleich wird eine sehr einfache geometrische Interpretation dieser (fünf) Büschel angegeben.

Die Untersuchungen des Herrn Verfassers treffen sowohl in der Grundlage als in dem durchgeführten Beispiel sehr nahe mit denen des Herrn Brill (s. p. 64 u. f.), wie des Referenten zusammen. Es sei hier der Kürze wegen auf die bezüglichen Ausführungen in dem Werke des Referenten „Apolarität und rationale Curven" verwiesen.

My.

J. J. SYLVESTER. On the completion of the author's method of obtaining the ground-forms to any binary quantic or system of binary quantics. J. Hopk. Circ. 1882. 178.

Vorläufige Mitteilung des Herrn Sylvester, dass der schon öfters gegen seine neue Theorie erhobene Vorwurf, sie liefere nur die Typen (d. h. Grad und Ordnung) der Grundformen, lasse diese selbst aber im Uebrigen unbestimmt, unbegründet sei. Namentlich mit Hülfe eines geschickten Einteilungsprincipes für seine Typen könne er ohne Mühe (mit Anwendung der bekannten partiellen Differentiationsoperation) die Formen selbst berechnen. Eine nähere Ausführung wird im Am. J. erscheinen.

My.

J. J. SYLVESTER. On subinvariants i. e. semi-invariants to binary quantics of an unlimited order. J. Hopk. Circ. II. 3; Sylv., Am. J. V. 79-96.

Da der grösste Teil dieser grossen Abhandlung im Am. J. seinem Erscheinen nach in das Jahr 1883 fällt, so soll hier vorläufig nur die principielle neue Behandlung, die Herr Sylvester darin der Theorie der Invarianten-Grundformen zu Teil werden lässt, dargelegt werden.

Diese Behandlung basirt auf der Erscheinung, dass der Leitcoefficient irgend einer Covariante einer binären Form nicht nur dies eine Mal, sondern auch in einer Covarianten von jeder binären Form höherer Ordnung (als Leitcoefficient) auftritt. Jeder Leitcoefficient begründet daher eine bestimmte unendliche Formengruppe.

Als Subinvariante in Bezug (quâ) auf die Elemente a, b, c,... wird definirt irgend eine ganze rationale Function derselben, die der Differentialgleichung der Leitcoefficienten

$$\Omega \equiv a\delta_b + 2b\delta_c + 3c\delta_d + \cdots \text{ ad libitum} = 0$$

genügt. Ersetzt man hier Ω durch eine beliebige lineare Function der $a\delta_b$, $b\delta_c$,..., so kommt man zu Subinvarianten in Bezug

auf die entsprechenden numerischen Vielfachen der $a, b, c \ldots$ als Elemente.

Daraus folgt, dass, wenn man in einer solchen Subinvariante das erste Element a gleich Null setzt, der Rest jetzt eine Subinvariante in Bezug auf die neue Elementenreihe $b, \frac{c}{2}, \frac{d}{3}, \cdots$ wird; ein Satz, der die Ableitung der Grundformen sehr erleichtert.

Der Hauptsatz des ersten Abschnittes sagt aus, dass irgend eine Invariante eines Systems von Subinvarianten selbst wieder eine Subinvariante ist, und zwar in Bezug auf den höchsten Buchstaben (der in jenem vorkommt) und die Einheit; ein Satz, der auf Subinvarianten „von Systemen von Elementen“ ausgedehnt werden kann.

Uebrigens lassen sich umgekehrt diese „Plurisubinvarianten“ wieder als Specialfall der „Unisubinvarianten“ auffassen, indem in diesen nur gewisse der numerischen Coefficienten gleich Null gesetzt zu werden brauchen.

Eine besonders hervorragende Rolle unter den Coefficienten in einer Subinvariante spielt der zur höchsten Potenz des höchsten (entferntesten) Buchstabens gehörige, da er gleichfalls eine Subinvariante ist, und zwar bezüglich der unendlichen Elemente, wie die erste. Er heisst der Keim (germ) der zugehörigen Covariantenform.

Solche Keimtafeln werden für die Grundformen der binären Formen fünfter und sechster Ordnung aufgestellt, sie gewähren einen guten Einblick in den Aufbau des vollen Formensystems.

Der wirklichen, algebraischen Herleitung der Grundformen, (d. h. hier ihrer Grundsemiinvarianten) liegt die Aufstellung der „Urtypen“ (proto-morphs) zu Grunde, d. i. derjenigen Formen, die abwechselnd vom zweiten und dritten Grade in den Coefficienten sind. Ihre Wichtigkeit geht daraus hervor, dass jede andere, zur selben binären Form gehörige Grundsemiinvariante (mit einer geeigneten Potenz des ersten Coefficienten multiplicirt) eine ganze rationale Function der Urtypen ist.

Als Hauptbeispiel dienen die binären Formen fünfter Ordnung;

dabei tritt die Nützlichkeit des oben erwähnten Restsatzes sehr hervor. Die Grundformen zerfallen dabei ganz von selbst in gewisse Categorien, die auf die Natur jener ein neues Licht werfen.

Beiläufig wird ein Satz aufgestellt, der aber eine grosse Zukunft zu haben scheint: „Eine Folge von (wachsenden) ganzen Zahlen mit der Beschränkung, dass keine von ihnen ein Vielfaches einer der andern und auch nicht die Summe der Vielfachen von irgend zwei der andern ist, kann nicht bis in's Unendliche fortgesetzt werden." My.

G. Peano. Sui sistemi di forme binarie di egual grado e sistema completo di quante si vogliano cubiche. Torino, Atti. XVII. 580-586.

Die invariantiven Bildungen des vollen Systems von N binären Formen gleichen Grades n lassen sich in Typen einteilen, so dass sich die Individuen eines und desselben Typus durch den bekannten Coefficienten-Polarisationsprocess auseinander (d. h. also auch aus einem einzigen) ableiten lassen. Der Verfasser beweist, dass die Zahl dieser Typen auch für ein beliebig wachsendes N eine endliche ist, wie dies schon für $n = 1, 2$ bekannt war. Als Grundlage dient ihm der wichtige Capelli'sche Satz (siehe Capelli p. 84.):

„Eine homogene Function F von n Systemen mit n Variabeln kann man nach aufsteigenden Potenzen der Determinante der Variabeln so entwickeln, dass die Coefficienten Polarenbildungen von aus F abgeleiteten Formen sind, die ein Variabelnsystem weniger enthalten."

Dieser Satz wird angewandt auf die Systeme der Coefficienten von $n+1$ binären Formen n^{ten} Grades und eine ganze homogene Function F derselben.

Ist im Besonderen F eine Covariante der gegebenen Formen (und noch etwaiger weiterer vom n^{ten} Grade), so sind demnach die Entwickelungscoefficienten polare Formen von Functionen φ, welche Covarianten der gegebenen Formen excl. einer, etwa f_{n+1} sind.

Wird der Satz jetzt von Neuem auf diese Functionen φ angewandt, u. s. f., so stellt sich F dar als Function einmal der $(n+1)$-reihigen Coefficienten-Determinanten, und im Uebrigen von Covarianten von nur n der gegebenen Formen.

Und da sich diese letzteren Covarianten aus einer endlichen Zahl von Typen zusammensetzen, so tun es auch die allgemeinsten Covarianten F.

Für ein System beliebig vieler binärer Formen dritten Grades wird die Rechnung durchgeführt. Es ergeben sich zehn verschiedene Typen; am Schluss wird noch ohne Beweis mitgeteilt, wie sich die Bildungen des vollen Systems auf diese zehn Typen verteilen. Ist N die Zahl der gegebenen Formen, so gehören den einzelnen Typen successive folgende Anzahlen von Formen zu:

$$N,\ \frac{1}{2}N(N-1),\ \frac{1}{2}N(N+1),\ \frac{1}{2.3}N(N+1)(N+2),$$
$$\frac{1}{3}(N-1)\,N(N+1) \text{ etc.}$$

My.

G. Peano. Un teorema sulle forme multiple. Torino, Atti. XVII. 73-80.

Der Gordan'sche Fundamentalsatz über die Endlichkeit des binären Formensystems wird hier ausgedehnt auf binäre Formen mit beliebig vielen Variabelnreihen, die Substitutionen unterworfen werden, die alle von einander unabhängig sein können, (wie sie durch Capelli in die Formentheorie eingeführt sind). Der Herr Verfasser stellt zu dem Zwecke folgenden Hauptsatz auf:

„Eine Reihe von Formen mit n binären Variabelnreihen sei gegeben; nach einer dieser Reihen, etwa der x-Reihe entwickelt, seien sie:

$$f \equiv f_0 x_1^m + m f_1 x_1^{m-1} + \cdots, \quad g \equiv g_0 x_1^n + n g_1 x_1^{n-1} + \cdots \text{ etc..}$$

Besitzen dann die Formen $f_0, f_1, \ldots, g_0, g_1 \ldots$ etc. ein endliches System von (invariantiven) Grundformen, so auch die ursprünglich gegebenen f, g, etc.“

Der Beweis zerlegt sich in drei Teile.

Zuerst wird gezeigt, dass, wenn man irgend eine invariantive Form F der gegebenen $(f, g,$ etc.) nach den x_1, x_2 entwickelt, so dass

$$F = F_0 x_1^p + p F_1 x_1^{p-1} x_2 + \cdots,$$

dann die F_i invariantive Formen des Systems der f_i, g_i, etc. sind, also sich nach Voraussetzung als rationale ganze Functionen einer endlichen Anzahl von Grundformen (P_0, P_2 etc.) darstellen lassen.

Zweitens operire man mit dem Symbol

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2$$

und seiner Wiederholung an den gegebenen Formen f, g, etc., und erhalte so das System

$$\begin{gathered} f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots \Delta^m f, \\ g, \Delta g, \Delta^2 g, \ldots \Delta^n g, \end{gathered}$$

ein System, das bekanntlich dem Coefficientensystem der f_i, g_i, etc. in mancher Hinsicht analog ist. Für dieses neue System bilde man die durch die Grundformen P definirten Functionen und entwickele in üblicher Weise nach der Determinante (xy); dann kommt für irgend eine dieser Functionen:

$$Q = \Delta^q \varphi + (xy) \Delta^{q-1} \psi + (xy)^2 \Delta^{q-2} \chi + \cdots,$$

wo q der Grad ist, bis zu dem die y in Q ansteigen. Aus der Tatsache, dass für $x_1 = y_2 = 1$, $x_2 = y_1 = 0$, Q in P übergeht, leitet man ab, dass das System der Formen φ, ψ, χ, ... ein endliches ist, da ja die P in endlicher Zahl vorhanden sind, und zu jedem P ein endliches System von Grundformen gehört.

Drittens wird bewiesen, dass, wenn man sich hülfsweise die F, φ, ψ, ... als einfache, in den x_1, x_2 binäre Functionen denkt, in diesem Sinne F eine invariantive Form der übrigen ist. Da aber die letzteren wieder nur in endlicher Anzahl existiren und ein endliches Formensystem (Φ_1, Φ_2, etc.) besitzen, so drückt sich F als ganze rationale Function der Φ aus, d. h. die ursprünglich gegebenen Formen f, g, etc. besitzen ein endliches Grundformensystem, sobald es die f_i, g_i, etc. tun.

Im Besonderen kommt also den sogenannten Correspondenzen ein endliches volles System zu. My.

C. LE PAIGE. Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. C. R. XCIV. 31-32.

Zuerst wird die Bemerkung gemacht, dass, wie eine trilineare Form drei quadratische Covarianten mit der gleichen Discriminante besitzt, so eine quadrilineare Form vier biquadratische Covarianten mit den gleichen Invarianten. (Cf. unten).

Sodann wird eine Relation für trilineare Formen auf Formen mit drei (n) Reihen von Variabeln ausgedehnt. Als specieller Fall ist darin eine bekannte Clebsch'sche Formel enthalten, die übrigens Herr Le Paige schon früher auf beliebig viele binäre Formen ausgedehnt hatte. (Cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 104.).

My.

C. LE PAIGE. Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. C. R. XCIV. 69-71.

C. LE PAIGE. Sur les formes quadratiques à deux séries de variables. C. R. XCIV. 424-426.

C. LE PAIGE. Sur la forme quadrilinéaire. Torino, Atti. XVII. 299-320.

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchungen bildet die quadrilineare Form $f = a_x a'_y a''_z a'''_u$, die der Herr Verfasser in ähnlicher Weise dem Studium der Flächen vierter Ordnung zu Grunde zu legen gedenkt, wie er die Theorie der trilinearen Formen mit der der ebenen Curven dritter Ordnung verschmolzen hat.

Die Form f besitzt zunächst sechs Covarianten, die in Bezug auf immer zwei Reihen Variabeln quadratisch sind. Jede von diesen besitzt wieder zwei Discriminanten (je eine bezüglich einer Variabelnreihe). Diese zwölf biquadratischen Covarianten fallen aber zu je drei zusammen, so dass vier solche Covarianten restiren:

$$L_x^4,\ M_y^4,\ N_z^4,\ P_u^4.$$

Von diesen gilt der Satz, dass sie dieselben Invarianten haben. Der Beweis wird einmal mit Hülfe eines Capelli'schen Satzes, sodann aber auch durch directe Bildung der bezüglichen Formen geführt mit Zugrundelegung der canonischen Form für f:

$$f = \sum_{iklm} a_{iklm}\, x_i\, y_k\, z_l\, u_m,$$

wo der Index 1 resp. 2 entweder kein- oder zwei- oder viermal auftritt. Diese canonische Form ist dadurch charakterisirt, dass die vier Grundpunktepaare $(0, \infty)$ je eines der drei Wurzelpaare von den vier Covarianten sechsten Grades sind, welche den vier obigen biquadratischen Formen zugehören. Hält man einen solchen Grundpunkt (etwa $x_1 = 0$) fest, so stehen, $f = 0$ gesetzt, die Punkte $(y)(z)(u)$ in einer trilinearen Beziehung, deren neutrale Elementenpaare je harmonisch sind zu den bez. Grundpunktepaaren.

Sodann werden die sechs Bedingungen aufgestellt, unter denen die Form f die einfache Gestalt annimmt:

$$f \equiv a x_1\, y_1\, z_1\, u_1 + b x_2\, y_2\, z_2\, u_2.$$

Diese Bedingungen sagen aus, dass die vier Covarianten L, M, N, P vollständige Quadrate sind. Einen solchen Fall bilden in der Raumgeometrie die Punktquadrupel, welche die Ebenen des Raumes aus vier beliebigen Raumgeraden ausschneiden.

Weiterhin werden noch die speciellen Fälle untersucht, in denen die Form f in Factoren zerfällt.

Das volle Co- und Invariantensystem von f soll erst in einer weiteren Arbeit vollständig aufgestellt werden.

Da das Studium der quadrilinearen Formen wesentlich auf das der „biquadrischen" (d. i. der in zwei Variabeln quadratischen) zurückkommt, so sei noch angeführt, dass sich diese im Allgemeinen immer in die canonische Form bringen lassen:

$$x_1^2\,(a_0\, y_1^2 + a_2\, y_2^2) + 4\, x_1\, x_2\, b_1\, y_1\, y_2 + x_2^2\,(c_0\, y_1^2 + c_2\, y_2^2).$$

Der Weg zu dieser Reduction wird in der an zweiter Stelle angeführten Note genauer angegeben. My.

E. Picard. Sur certaines formes quadratiques ternaires. C. R. XCIV. 1241-1243.

Im Anschluss an die Hermite'schen Untersuchungen über die Transformation der Abel'schen Functionen wird gezeigt, wie man aus den allgemeinen ternären quadratischen Formen durch Anwendung einer gewissen Specialgruppe von linearen Substitutionen eine gewisse Classe herausheben kann in der Art, dass ein Individuum f dieser Classe vermöge einer solchen Substitution in ein anderes. F, übergeht, wo zwischen den Coefficienten von F die gleichen Relationen herrschen, wie zwischen denen von f, und wo F der gleichen Classe angehört.

Zugleich wird noch ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen einer solchen Specialsubstitution, ihrer conjugirten und ihrer adjungirten angegeben. My.

E. Picard. Sur certaines formes quadratiques. C. R. XCV. 763-766.

In Analogie mit der Hermite'schen Erweiterung der Theorie der quadratischen binären Formen geht der Herr Verfasser, statt von der quadratischen ternären, von der allgemeinen Form aus:

$$Axx_0+A'yy_0+A''zz_0+Byz_0+B_0y_0z+B'zx_0+B'_0z_0x+B''xy_0 \\ +B''_0x_0y = f(x, y, z, x_0, y_0, z_0),$$

wo der Index 0 immer die conjugirte Grösse anzeigt, und die A reell sind.

Auch diese Formen lassen sich in bestimmte und unbestimmte einteilen, je nach dem sie (durch lineare Substitution) auf die Formen

$$\pm(UU_0+VV_0+WW_0) \quad \text{resp.} \quad \pm(UU_0+VV_0-WW_0)$$

reducirt werden können.

Die unbestimmten Formen führen in folgender Weise zu einer unendlichen Schaar von discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen zweier Variabeln. Ist irgend eine der (ganzzahligen) Substitutionen, die die reducirte unbestimmte Form in sich überführen:

$$U = A_3 u + B_3 v + C_3 w$$
$$V = A_2 u + B_2 v + C_2 w$$
$$W = A_1 u + B_1 v + C_1 w,$$

und setzt man hier

$$\frac{U}{W} = \frac{u}{w} = \alpha, \quad \frac{V}{W} = \frac{v}{w} = \beta,$$

so hat man die gewünschte Gruppenschaar.

Es wird diese Schaar noch explicite dargestellt, indem, ebenfalls nach Hermite'scher Methode, die Coefficienten der Substitution durch drei willkürliche Parameter ausgedrückt werden.

Für die specielle Form $f = xy_0 + yx_0 + zz_0$ kommt der Herr Verfasser zu einer schon mehrfach von ihm benutzten Gruppe.

My.

P. Gordan. Ueber Büschel von Kegelschnitten.
Klein Ann. XIX. 529-553.

P. Gordan. Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1.$$

Klein Ann. XX. 487-515.

P. Gordan. Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. Klein Ann. XX. 515-530.

Dies sind die letzten Vorarbeiten zu einer expliciten Lösung der Gleichungen 7ten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen (cr. F. d. M. XII. 1880. p. 96), wobei aber zu bemerken ist, dass auch der Nutzen, den die Theorie der ternären, quadratischen und biquadratischen Formen aus diesen Untersuchungen zieht, ein ganz erheblicher ist.

Dies zeigt sich gleich in der ersten der beiden Arbeiten, in der das volle (simultane) System zweier ternärer quadratischer Formen (das Herr Gordan bereits in dem Buche von Clebsch und Lindemann mitteilen liess) aufgestellt und verschiedene wichtige Relationen zwischen diesen entwickelt werden.

Das volle System S der beiden Formen (Kegelschnitte) $\varrho = u_\varrho^2$ und $s = s_x^2$ besteht, diese incl., aus 20 Formen, die bis zum Grade 3 in den u resp. x ansteigen. Unter ihnen zeichnen sich aus, einmal vier Invarianten: (1), (2), (3), (4), sodann je drei Kegelschnitte in Punkt-, resp. Liniencoordinaten: r, s, t, resp. ϱ, σ, τ, sowie die zwei Functionaldeterminanten derselben.

Zunächst werden die wichtigsten weiteren Formen als ganze Functionen der Systemformen ausgedrückt, unter denen eine gewisse dreireihige Determinante H (vom 6ten Grade in den x), sowie die Tactinvariante der gegebenen Formen hervorragen. Die erstere Covariante hat die Bedeutung, dass sich die Quadrate und Produkte der r, s, t aus den Unterdeterminanten von H linear zusammensetzen.

Im zweiten Abschnitte werden die Ecken, resp. Seiten des gemeinsamen Polardreiecks der gegebenen Kegelschnitte eingeführt, mittels deren die Hauptformen des Systems S in „irrational - typischer" Weise ausgedrückt werden. Dies dient dann wieder dazu, die Quadrate der beiden Functionaldeterminanten (r, s, t) und (ϱ, σ, τ) durch die graden Formen des Systems auszudrücken.

Der dritte Abschnitt ist der rationalen Typik gewidmet, zunächst der der beiden gegebenen Kegelschnitte, mit Hülfe einer zu adjungirenden, vorläufig beliebigen Geraden ω_x, deren Pole bez. ϱ, σ, τ zu Ecken des Coordinatendreiecks genommen werden.

Sodann gelingt es, sowohl einen beliebigen weiteren Kegelschnitt a_x^2, als eine beliebige Curve vierter Ordnung a_x^4 in rational typischer Weise auf das neue Coordinatensystem zu beziehen. In ihren Darstellungen treten 13, resp. 22 von einander unabhängige Invarianten auf, wie es der Natur der Sache gemäss ist.

Zur Geraden ω_x wird weiterhin insbesondere irgend eine passende lineare Covariante von ϱ, σ und einem dritten Kegelschnitt p_x^2 genommen. Die typischen Coefficienten von r, s, p drücken sich durch elf Invarianten (von r, s, p) aus, zwischen denen aber eine Relation besteht, desgleichen die typischen Coefficienten von r, s, p, q, wo letztere Form einen neuen, vierten Kegelschnitt bedeutet, durch 20 Invarianten mit vier Relationen.

Dies findet nun seine Anwendung auf die typische Darstellung einer Curve vierter Ordnung a_x^4 und eines einzelnen Kegelschnitts ϱ in folgender Weise.

Man bilde die Formen s, p, q, ω so, dass

$$s_x^2 = a_x^2 a_\varrho^2,\ p_x^2 = a_x^2 a_\tau^2,\ q_x^2 = a_x^2 a_\pi^2,\qquad \omega_x = p_\rho p_\tau (\varrho \tau x).$$

Dann erfordert die typische Darstellung von a_x^4 und ϱ_x^2 17 simultane Invarianten beider, von denen aber nur 13 unabhängig sind. Ist dagegen a_x^4 nicht allgemein, sondern unter der im Titel angegebenen numerischen Form gegeben, so ist von vornherein klar, dass die Zahl der unabhängigen Invarianten sechs, d. h. gleich der Zahl der Coefficienten des Kegelschnitts sein muss. Die Rechnung führt zunächst auf zwölf Fundamentalinvarianten, die sich infolge eines eigentümlichen, zwischen der Form f und ihrer Covariante $(abu)^4$ stattfindenden Reciprocitätsverhältnisses paarweise gruppiren lassen. Dadurch nun, dass es gelingt, gewisse höhere Invarianten durch jene zwölf auszudrücken, wird man von selbst auf die sechs Relationen geführt, die zwischen den zwölf bestehen. Diese Relationen zeigen eine verhältnismässig grosse Einfachheit, denn fünf von den zwölf Invarianten drücken sich rational durch die übrigen aus, und zwischen den letzteren sieben besteht eine algebraische Gleichung, welche in zweien derselben vom sechsten Grade ist.

Umgekehrt denke man sich jetzt diese sechs letzteren Fundamentalinvarianten mit der zwischen ihnen stattfindenden Gleichung numerisch gegeben, ebenso wie das canonische f. Berechnet sollen die Coefficienten des Kegelschnitts ϱ werden.

Diese abschliessende Aufgabe ist nun ohne Weiteres auf die bereits früher gelöste (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 96) zurückführbar: „Eine biquadratische ternäre Form F, von der bekannt ist, dass sie sich durch eine lineare Substitution von der Determinante Eins in $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ verwandeln lässt, (die also durch 168 lineare Substitutionen von der Determinante Eins in sich übergeht) die aber in irgend einer anderen Form (hier der typischen) gegeben ist, tatsächlich durch eine solche Substitution in f überzuführen.“

Diese Substitution führt aber zugleich das typische ϱ in das

gesuchte (canonische) über, womit die Aufgabe gelöst ist. Den 168 gleichberechtigten Substitutionen stellen sich genau 168 gleichberechtigte Kegelschnitte zur Seite.

Diese 168 Substitutionen stehen in engstem Zusammenhange mit den 168 Substitutionen, die den Anfangs erwähnten Gleichungen 7ten Grades zukommen, und in der Tat ist mit der Lösung der eben angeführten Aufgabe auch die Auflösung solcher Gleichungen implicite mitgegeben. Doch haben wir über die bezügliche Arbeit von Herrn Gordan, die den Schlusstein seines Gebäudes bildet, erst im nächsten Jahrgang dieser Fortschritte zu sprechen. My.

G. Battaglini. Sulle forme quaternarie bilineari. Rom., Acc. L. (3) VI. 40-42.

Die räumliche Correlativität wird hier durch das Verschwinden einer quaternären bilinearen Form (in der die Variabeln die Coordinaten zweier Punkte bedeuten), sowie ihrer wichtigsten Contravarianten und Zwischenformen dargestellt. In diesem Sinne schliesst sich die Note genau an eine frühere des Herrn Verfassers über die ternäre bilineare Form an.

Die Beziehung zwischen den Ebenen des Raumes repräsentirt die „conjungirte" Form, die zwischen den Geraden des Raumes jede der beiden „intermediären" Formen.

Je nachdem die Discriminante der ursprünglichen Form oder alle ihre ersten, oder alle ihre zweiten Unterdeterminanten verschwinden, existirt je ein Fundamental-Punkt, -Gerade, -Ebene, (und dualistisch für die conjungirte Form).

Dann werden die beiden Fundamentalflächen zweiter Ordnung, resp. Classe und ihre Zuordnung besprochen. Diese haben ein windschiefes Vierseit gemein, dessen Ecken, Kanten, Seiten in gewisser Weise sich involutorisch entsprechen. Dieses Vierseit hängt von einer biquadratischen Gleichung ab, deren Specialfälle interpretirt werden.

Zum Schlusse wird noch die fortgesetzte Wiederholung der

Zuordnung discutirt, die abwechselnd zu correlativen (reciproken) und collinearen Gebilden führt.

Die Note ist wohl als eine gedrängte Zusammenstellung von grösstenteils bekannten Tatsachen aufzufassen. My.

A. Capelli. Sul numero dei covarianti di grado dato per forme di qualsivoglia specie. Batt. G. XX. 293-301.

Die durch den Titel angegebene Aufgabe wird hier ihrer Lösung näher geführt. In seiner der Acc. dei Lincei überreichten Abhandlung (siehe p. 86) hatte Herr Capelli diese Aufgabe durch folgende ersetzt: die Anzahl der Covarianten Φ „vom Gewicht Null“ zu bestimmen, die von vorgegebenen Graden in den Coefficienten der gegebenen Formen, ferner von vorgegebenen Graden $\theta, \theta_1, \dots \theta_\sigma$ in $\sigma+1$ cogredienten Variabelnreihen $x, x', \dots x^{(\sigma)}$ sind und überdies den σ Differentialgleichungen

$$(1) \qquad D_{xx'}\Phi = 0, \; D_{xx''}\Phi = 0 \dots \; D_{xx^{(\sigma)}}\Phi = 0$$

genügen, wo z. B.

$$D_{xy} = \Sigma y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Die Anzahl der (linear unabhängigen) Covarianten Φ, die diesen Bedingungen mit Ausnahme von (1), genügen, ist leicht bestimmbar und wird bezeichnet mit $\varphi(\theta, \theta_1, \dots \theta_\sigma)$, indem alle übrigen Zahlen ausser den θ als fest betrachtet werden.

Es entsteht daher nunmehr die Frage, wie vielen (linear unabhängigen) Bedingungen (für die Coefficienten von Φ) irgend eine der Gleichungen (1) aequivalent ist. Herr Capelli verallgemeinert die Frage sogleich und erhält das Resultat, dass die durch die Gleichung

$$(2) \qquad D^{\tau_1}_{xx'}, \; D^{\tau_2}_{xx''}, \dots D^{\tau_\sigma}_{xx^{(\sigma)}} \; \Phi = 0,$$

(wo die Exponenten die bez. Wiederholungen der resp. Operationen bedeuten) den $\varphi(\theta, \theta_1, \dots \theta_\sigma)$ willkürlichen Coefficienten von Φ auferlegten Bedingungen durch die Zahl

$$(3) \qquad \varphi(\theta-\tau, \; \theta_1+\tau_1, \; \theta_2+\tau_2, \dots \theta_\sigma+\tau_\sigma),$$

wo

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots \tau_\sigma,$$

geliefert werden.

Die Zahl θ ist hier deswegen vor den andern (θ_i) ausgezeichnet, weil sie den Grad von Φ in derjenigen Variabelnreihe (x) angiebt, die in den ursprünglich (im Titel) der Anzahl nach gewünschten Covarianten gar nicht auftritt.

Das Resultat (3) wird dadurch abgeleitet, dass gezeigt wird, wie die linke Seite der Gleichung (2) die allgemeinste Covariante ihrer Art darstellt. Man hat daher nur diese linke Seite aus der nötigen Zahl von Covarianten gleicher Art linear zusammenzusetzen und dann die Coefficienten dieser Zusammensetzung einzeln zum Verschwinden zu bringen. Das Resultat (3) schliesst ohne Weiteres das andere mit ein, das für $\varrho = 1$, $\tau_1 = 0$ zu einer bekannten Formel für binäre Formen führt, nämlich: „Die Anzahl der der Differentialgleichung (2) genügenden linear unabhängigen Covarianten Φ ist genau durch die Zahl

$$\varphi(\theta, \theta_1, \theta_2, \dots) - \varphi(\theta - \tau, \theta_1 + \tau_1, \theta_2 + \tau_2, \dots)$$

bestimmt."

Wendet man jetzt den allgemeinen Satz succ. auf die einzelnen Gleichungen (1) an, so erkennt man bald, dass die durch zwei auf einander folgende Gleichungen (1) gelieferten Bedingungen nur teilweise von einander verschieden sind, indessen vermag Herr Capelli für die Anzahl der gemeinsamen Bedingungen nur eine untere Grenze anzugeben.

Dagegen wird ein Fortschritt in anderer Richtung erzielt. Die Gleichungen (1) sind nämlich den folgenden brauchbareren äquivalent:

$$D_{xx'} \Phi = 0, \quad D_{x'x''} \Phi = 0 \dots D_{x^{(\sigma-1)}x^{(\sigma)}} \Phi = 0.$$

Hier vermag der Herr Verfasser genau anzugeben, wieviel (linear unabhängige) Bedingungen durch zwei dieser Gleichungen repräsentirt werden, vorausgesetzt, dass diese in der hingeschriebenen Reihe nicht unmittelbar auf einander folgen.

My.

G. Battaglini e F. Casorati. Relazione sulla Memoria di A. Capelli „Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche.“ Rom., Acc. L. (3) VI. 165-166.

Herr Capelli legt seinen Fondamenti einen allgemeinen Satz zu Grunde, in dem ein bekannter Gordan'scher Satz (für binäre Formen) als specieller Fall enthalten ist, nämlich:

„Eine ganze rationale Function von $n+1$ Reihen mit je $n+1$ (homogenen) Variabeln lässt sich nach ganzen positiven Potenzen der Determinante der Variabeln so entwickeln, dass die Coefficienten der Entwickelung aus Functionen, die aus der Grundform durch polare Bildungen entstehen, aber eine Reihe Variabeln weniger enthalten, selbst wieder mittels eines polaren Derivationssymbols abgeleitet sind.“

Das Wesentliche dabei ist, dass Herr Capelli alle erforderlichen Operationen (auch die durch die Functionaldeterminante der Variabeln ausgedrückte Cayley'sche) auf einen einzigen Typus „$\Sigma y \frac{\partial}{\partial x}$“ reducirt.

Obiger Satz ermöglicht eine systematische Entwickelung aller invariantiven Bildungen eines Systems von Grundformen, immer nur mit Hülfe von Operationen, die sich aus den eben erwähnten (und ihren Wiederholungen) zusammensetzen.

Zum Schluss wird die wichtige Frage nach der Anzahl der Covarianten von gegebenen Graden in den Variabeln und den Coefficienten der Grundformen (obiger Art) untersucht und auf das Erfülltsein von n Differentialgleichungen der Form

$$\Sigma y \frac{\partial}{\partial x} = 0$$

basirt.

Dabei zeigt sich, dass zwar die durch jede einzelne dieser Gleichungen geforderten linearen Bedingungen von einander unabhängig sind, aber nicht mehr die durch zwei und mehr derselben ausgedrückten. Die dadurch auftretenden Schwierigkeiten sind so gross, dass mit Ausnahme des Falls der binären Formen nur erst eine untere Grenze für die gewünschte Zahl geliefert wird.

Die Arbeit selbst wird in den Atti der Akademie erscheinen. My.

Weiter befinden sich Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Formen von J. J. WALKER, T. R. TERRY, CH. LADD, J. L. KITCHIN, J. O'REGAN, J. L. MC KENZIE, S. MARCKS, E. W. SYMONS, G. TURRIFF, A. COHEN, E. RUTTER, A. CAYLEY, W. J. C. SHARP, A. MC MURCHY, T. MUIR Ed. Times XXXVI. 30, 33, 76, 87-88, 105, 106-107; XXXVII. 30-31, 33-34, 46, 58-59, 74.

O.

C. LE PAIGE. Notiz über die $2k$-elementige centrale Gruppe einer Involution k^{ter} Stufe und $(2k+1)^{\text{ten}}$ Grades. Wien. Ber. LXXXVI. 104-105.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5.

A. CAYLEY. On the 8-square imaginaries. J. Hopkins Circ. 1882. 203; Sylv., Am. J. IV. 292-297.

Das Problem, das Product von zwei Summen, deren jede aus den Quadraten von irgend acht gewöhnlichen algebraischen Grössen gebildet ist, wieder als Summe von acht Quadraten (nämlich ohne Hülfe von Radicalen) darzustellen, führt zu einem gewissen System von acht Einheiten (locativen Symbolen), grade wie die entsprechenden, auf zwei, resp. vier Quadrate sich beziehenden Probleme auf die Einheiten 1, i, resp. 1, i, j, k (d. s. die Quaternionen) führen.

In der Tat, multiplicirt man die beiden Producte

$$(\alpha_0 \varepsilon_0 + \alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots \alpha_7 \varepsilon_7) \quad \text{und} \quad (\beta_0 \varepsilon_0 + \beta_1 \varepsilon_1 + \cdots \beta_7 \varepsilon_7),$$

wo die ε imaginäre Einheiten ($\varepsilon_0 = 1$), die α und β irgend welche algebraische Grössen sind, so kann man ein solches Verknüpfungsgesetz, mittels dessen die Producte $\varepsilon_i\, \varepsilon_k$ sich wieder

durch die ε selbst ausdrücken, aufstellen, so dass, wenn jenes Product, nach den Einheiten ε geordnet, die Form annimmt:

$$A_0\,\varepsilon_0+A_1\,\varepsilon_1+\cdots A_7\,\varepsilon_7,$$

die Relation besteht:

$$(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\cdots+\alpha_7^2)\,(\beta_0^2+\beta_1^2+\cdots+\beta_7^2)=A_0^2+A_1^2+\cdots+A_7^2.$$

Das Merkwürdige an dem Verknüpfungsgesetze ist, dass das Gesetz der Association nicht durchweg gilt. Denn unter den 35 als verschieden auftretenden Triaden $\varepsilon_i\,\varepsilon_k\,\varepsilon_l$ befolgen nur acht jenes Gesetz, so dass z. B. $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ den Sinn hat:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\,.\,\varepsilon_3=\varepsilon_1\,.\,\varepsilon_2\varepsilon_3,$$

die 28 übrigen dagegen nicht, indem z. B.

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\,.\,\varepsilon_4=-\,\varepsilon_1\,.\,\varepsilon_2\varepsilon_4,$$

so dass ein Product von solchen drei Symbolen keinen bestimmten Sinn besitzt.

Herr Sylvester fügt dem Bericht im Circ. noch hinzu, einmal, dass dies wohl der erste Fall sei, in dem Symbole der Art, für die das Associationsgesetz nicht mehr durchweg bindend ist, auf ein Problem der eigentlichen (nicht nur formalen) Algebra in fruchtbarer Weise angewandt würden, sowie dass Herr Cayley ihm zugleich die Unmöglichkeit mitgeteilt habe, obiges Verfahren auf eine „16-Quadrat-“Formel auszudehnen.

Man vergleiche übrigens mit Obigem die merkwürdige von Herrn Sylvester gefundene Analogie zwischen Quaternionen und Nonionen, worüber weiter unten referirt ist. My.

- - - -

J. J. SYLVESTER. A word on nonions. J. Hopkins Circ. 1882. 241.

Folgende Analogie zwischen Quaternionen und Nonionen wird mitgeteilt. Sollen u, v zwei Matrices zweiter Ordnung sein, die den Multiplicationsbedingungen genügen:

$$vu=-uv,\;u^2=1,\;v^2=1,$$

so hat man die zu $z+yv+xu$ gehörige Determinante mit dem Ausdruck $z^2+y^2+x^2$ zu identificiren. Dann bilden bekanntlich $1,\;u,\;v,\;w=uv$ ein Quaternionensystem.

Analog seien u, v zwei Matrices dritter Ordnung; dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$vu = \varrho uv, \quad u^3 = 1, \quad v^3 = 1$$

(wo ϱ eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet), die, dass die zu $z+yv+xu$ gehörige Determinante den Wert $z^3+y^3+x^3$ annimmt; man erhält dann ein System von Nonionen durch folgendes Schema von neun Matrices,

$$\begin{matrix} 1 \\ u \quad v \\ u^2 \quad uv \quad v^2 \\ u^2v \quad uv^2 \\ u^2v^2. \end{matrix}$$

Multiplicirt man diese neun Terme mit $1, \varrho, \varrho^2$, so erhält man eine geschlossene Gruppe von 27 Gliedern, analog der Gruppe

$$\pm 1, \; \pm u, \; \pm v, \; \pm uv.$$

My.

C. S. Peirce. On a class of multiple algebras. J. Hopkins Circ. II. 3.

No.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

Ch. Biehler. Sur l'élimination. Nouv. Ann. (3) I. 529-542.

Aus den beiden Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ vom m^{ten} und n^{ten} Grade wird, ähnlich wie bei Bézout, ein System von Gleichungen hergestellt, deren Determinante $\varDelta$ sein mag; $\varDelta_{\mu\nu}, \dots$ bezeichne die Subdeterminanten von $\varDelta$. Es werden dann mit Hülfe dieser Bildungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gegeben, dass f, φ eine und nur eine, zwei und nur zwei u. s. w. Wurzeln gemeinsam haben; mit denselben Hülfs-

mitteln werden die Gleichungen ersten, zweiten u. s. w. Grades aufgestellt, welche jene gemeinsamen Wurzeln liefern.

No.

E. Netto. Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra. Leipzig. Teubner.

Bei der weitgreifenden Bedeutung einerseits, welche die Theorie des als Gruppenbildung bezeichneten Algorithmus für die verschiedensten Gebiete der Mathematik, Algebra, Functionentheorie, Zahlentheorie und Geometrie allmälich gewonnen hat und voraussichtlich noch in höherem Masse gewinnen wird, bei der Wichtigkeit der Untersuchungen andererseits über die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen, die man Lagrange, Cauchy Gauss, Abel, Galois, Kronecker, Jordan u. A. verdankt, erscheint es wohl auch weiteren mathematischen Kreisen als ein Bedürfnis, sich mit der Substitutionentheorie überhaupt und gleichzeitig mit ihren Anwendungen auf die algebraischen Gleichungen vertraut zu machen, zumal jene allgemeine Theorie bei der ihr anhaftenden Abstractheit im Hinblick auf diese Anwendungen eine concrete Basis gewinnt, die sie dem Verständnis näher bringt. Zu den, bisher publicirten diesbezüglichen literarischen Hülfsmitteln, von denen die 4te Abteilung von Serret's „Höherer Algebra" und C. Jordan's „Traité des substitutions et des équations algébriques" und die kürzeren, nur zur Einführung in den Gegenstand bestimmten Abhandlungen von Jordan (Commentaire sur Galois, Clebsch Ann. I. 145 ff. cf. F. d. M. II. 1869. 40 f.) und Netto (Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihrer Anwendungen, Grunert Arch. LXII. 225 ff. cf. F. d. M. X. 1878. 102 f.) erwähnt seien, tritt als neues das vorliegende Werk des letztgenannten. Dasselbe ist durch seine klare und dabei knappe Darstellungsweise, namentlich aber auch durch ein zweckmässiges Hervorheben der einzelnen zu behandelnden Fragen und ihres Zusammenhangs besonders geeignet, Studirende, denen die ersten Sätze der Zahlentheorie und die Elemente der Algebra bekannt sind, in die genannten Forschungsgebiete einzuführen. Auf Anschauungen

beruhend, wie sie Herr Kronecker seinen Universitätsvorlesungen und seinen Abhandlungen zu Grunde legt, unterscheidet es sich durch den Gang im Allgemeinen und in vielen Einzelheiten von den oben genannten früheren ausführlichen Arbeiten, so dass es auch das Interesse des mit der Theorie bereits Vertrauten in Anspruch nehmen dürfte.

Das Buch zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die Theorie und der zweite ihre Anwendungen auf die Algebra enthält. Um der Entwickelung der Theorie einen greifbaren Untergrund zu geben und zum Zweck der Vereinfachung der Beweise und der Präzisirung der Anschauungen und Hauptfragen werden von vornherein die ganzen Functionen mit in das Bereich der Betrachtung gezogen. Ausgegangen wird von den symmetrischen Functionen und zunächst gezeigt, dass sich der Begriff der Symmetrie der Gestalt mit dem der Einwertigkeit deckt. Es folgt der Nachweis ihrer Darstellbarkeit als ganzer Functionen der elementaren symmetrischen Functionen auf Grund der Newton'schen Formeln, ferner der Nachweis, dass diese Darstellung nur auf eine Weise möglich ist (nach Gauss), sowie ein Verfahren, dieselbe wirklich auszuführen; als Beispiel dient die Berechnung einer Discriminante. An den Begriff der Discriminante wird die Herleitung der Euler'schen Formeln geknüpft. Die Behandlung der mehrwertigen Functionen wird mit der der zweiwertigen, als dem einfachsten Falle, begonnen und in einer Weise durchgeführt, die nicht bloss für das Verständnis der allgemeinen Theorie der mehrwertigen Functionen vorbereitet, sondern auch die Richtschnur für die fernere Fragestellung und den Fortgang der Entwickelungen liefert. Im Laufe dieser speciellen Untersuchung bietet sich die Gelegenheit, den Begriff der Substitution einzuführen bei Herleitung einer Eigenschaft derselben (die Constanz des graden oder ungraden Charakters bezüglich der Anzahl der Transpositionen, aus denen sie sich zusammensetzen lässt, betreffend) und den Vorteil anzudeuten, den die gleichzeitige Betrachtung ganzer Functionen für Beweise substitutionen-theoretischer Sätze gewährt. (1. Cap.) Das 2[te] Capitel beginnt mit den verschiedenen Darstellungsweisen der Substitution, von denen die durch Cyklen als die zweckmässigste er-

scheint, weswegen dies auch in dem ganzen Werke fast ausschliesslich zur Verwendung kommt. Die Anwendung aller möglichen Substitutionen auf eine beliebige Function führt dann zu dem Begriff der Zusammensetzung (Multiplication) und dem der Substitutionengruppe. Daran knüpft sich die Untersuchung des wichtigen Zusammenhangs, der zwischen den mehrwertigen Functionen und den Gruppen besteht, und die Angabe verschiedener Hülfsmittel zur Bildung von Functionen, die zu gegebenen Gruppen „gehören“. Im Uebrigen handelt es sich in diesem Capitel um die Construction und die Eigenschaften der einfachsten und wichtigsten Gruppen (symmetrische, alternirende, Gruppe der Potenzen einer oder zweier Substitutionen und der Producte derselben u. a., endlich Gruppe, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist). Das 3[te] Capitel ist dem substitutionen-theoretischen und algebraischen Zusammenhang gewidmet, der zwischen den einzelnen Werten einer mehrwertigen Function besteht. Begonnen wird mit der wichtigen Anordnung sämmtlicher Substitutionen oder derer einer beliebigen Gruppe in eine entsprechende Tabelle, die zunächst den Zusammenhang zwischen Werteanzahl und Gruppenordnung darlegt und weiter die substitutionen - theoretischen Sätze über die Beziehung zwischen den Ordnungszahlen mehrerer Gruppen liefert. Die gleichzeitige Betrachtung der Gruppen, welche zu den verschiedenen Werten einer mehrwertigen Function gehören, führt einerseits auf den Begriff der ähnlichen Functionen und den der Transformation, woran die Ableitung des Cauchy-Sylow'schen Satzes geknüpft wird, andererseits auf die Erörterung der Frage, ob diese Gruppen ausser der identischen noch andere Substitutionen gemein haben können. Ausser der Aufstellung der Gleichung für die mehrwertigen Functionen enthält dieses Capitel noch eine Untersuchung über die Discriminante der zu einer Gruppe gehörigen Functionen (cfr. F. d. M. XII. 1880. p. 60 ff.) und die Behandlung der für die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen wichtigen Frage nach mehrwertigen Functionen, von denen eine Potenz einwertig ist. Das 4[te] Capitel ist ausführlichen Untersuchungen besonderer Eigenschaften von Gruppen, der Transitivität, Primitivität, der einfachen und

zusammengesetzten und der isomorphen gewidmet, in Betreff deren Referent auf das Buch selbst verweisen muss. Sodann wird (5. Cap.) die Frage nach den algebraischen Beziehungen zwischen Functionen derselben Gruppe aufgenommen und die Theorie der „Gattungen algebraischer Functionen“ und der „enthaltenen Gattungen“ entwickelt. An die Behandlung der Aufgabe, eine mehrwertige enthaltende Function durch eine wenigerwertige enthaltene Function auszudrücken, knüpft sich die specielle für die Anwendungen wichtige Frage, unter welcher Bedingung jene eine genaue Potenz dieser wird. Das Capitel schliesst mit dem Nachweise, der für die Möglichkeit der Darstellung einer Function durch eine zu derselben Gattung gehörige von Belang ist, dass es auch bei beliebigen Beziehungen zwischen den Elementen, ausgenommen die Gleichheit zweier, in jeder Gattung Functionen giebt, deren Determinante von Null verschieden ist. Während für die Existenz mehrwertiger Functionen bis dahin nur vereinzelte Beispiele aufgetreten waren, nimmt das 6te Capitel eine umfassendere Untersuchung der Frage nach den möglichen Anzahlen der Werte von Functionen auf; dieselbe wird zunächst auf die nach der Existenz von Gruppen reducirt, welche Substitutionen mit einer gewissen Minimalzahl von Elementen besitzen. Dann werden die diesbezüglichen Sätze von Serret u. A. und namentlich der allgemeine Satz von Jordan (cfr. F. d. M. X. 1878. p. 101) abgeleitet. Das 7te Capitel giebt Untersuchungen über besondere Arten von Gruppen, wie sie für die Anwendung auf algebraische Fragen sich als notwendig erweisen, und zwar zunächst über die Gruppen Ω, d. h. diejenigen transitiven Gruppen, bei denen Grad und Ordnung einander gleich sind, und auf welche bereits die Untersuchung der isomorphen Gruppen im 4ten Cap. geführt hatte. Da jede „Classe“ von Gruppen, d. h. die Gesammtheit aller einstufig isomorpher transitiver Gruppen einen und auch nur einen Typus einer Gruppe Ω enthält, so liefert die Aufstellung aller Typen der Gruppen Ω des Grades und der Ordnung r die Repräsentanten aller zu r gehörigen Classen und damit auch die Anzahl derselben; einen Typus bildet die durch die Potenzen einer Circularsubstitution gebildete „cyklische Gruppe“; im Ganzen ergeben

sich drei Typen von Gruppen Ω. Ferner werden betrachtet diejenigen Gruppen, die höchstens ein Element ungeändert lassen, besonders die metacyklische und halbmetacyklische Gruppe. Die Substitutionen der behandelten Gruppen lassen sich einfach darstellen durch die Angabe der Indicesänderungen der Elemente; diese Bemerkung führt weiter auf die linearen gebrochenen Substitutionen (mod. p) und zu Gruppen des Grades $p+1$ und der Ordnung $p(p^2-1)$. Den Schluss des Capitels bilden die Gruppen, deren Substitutionen unter einander vertauschbar sind. Im achten Capitel wird dann noch kurz auf die im vorigen Capitel schon berührte analytische Darstellung der Substitutionen eingegangen und die geometrischen und arithmetischen Substitutionen und die lineare Gruppe behandelt.

Der zweite Abschnitt beginnt mit der Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade unter Heranziehung von im ersten Abschnitte abgeleiteten Eigenschaften der mehrwertigen Functionen und dient als Vorbereitung für das Folgende. Die genauere Präcisirung der Fragestellung für die Auflösung von Gleichungen beliebigen Grades zeigt zunächst, dass die Auffindung sämmtlicher Wurzeln der Gleichung die Aufsuchung nur einer einzigen Wurzel der „Galois'schen Resolventengleichung“ erfordert. Die letztere giebt Gelegenheit, auf den Begriff „specieller“ Gleichungen überhaupt einzugehen, woran sich die Einführung der für die Specialität charakteristischen, „als bekannt angesehenen Functionen-Gattung“ resp. „Gruppe der Gleichung“ knüpft. Vorläufig werden von der letzteren nur zwei Haupteigenschaften nachgewiesen, nämlich die charakteristischen Eigenschaften der Gruppe der irreductibeln und derjenigen Gleichungen, deren Wurzeln rationale Functionen einer beliebigen unter ihnen sind. Sodann wird die Gruppe der Galois'schen Resolventengleichung von allgemeinen und „speciellen“ Gleichungen behandelt, der Begriff der „Resolvente“ verallgemeinert und an die Besprechung der Bedeutung der Auflösung der allgemeinen Resolventengleichung für die Auflösung der ursprünglichen Gleichung als Anwendung eine kurze Auseinandersetzung der Lagrange'schen Reduction geknüpft. (9. Cap). Als Grundlage und Vor-

bereitung für die allgemeine Theorie sind die nächsten drei Capitel zu betrachten, welche nach der Reihe den Kreisteilungs-, den Abel'schen und denjenigen Gleichungen, bei denen rationale Beziehungen zwischen drei Wurzeln bestehen, speciell den Galois'schen und den Tripelgleichungen gewidmet sind. Hierbei wird die Anwendung der Substitutionentheorie durch die von vornherein gegebenen rationalen Wurzelrelationen, welche diese Gleichungen charakterisiren, ohne weiteres ermöglicht. Beim Uebergang zu allgemeinen algebraischen Untersuchungen aber ist nun zunächst die Frage zu erledigen, ob die Substitutionentheorie, die lediglich an rationale Functionen anknüpft, auch bei Aufgaben, wie der der algebraischen Auflösung von Gleichungen verwendbar ist. Dies kann nur auf algebraischem Wege geschehen; daher ist das 13te Capitel im Wesentlichen arithmetischen Betrachtungen gewidmet. Nach Einführung des Begriffs des Rationalitätsbereiches und dem der zugehörigen Functionen, wird mittels eines wichtigen Hülfssatzes eine Normalform für dieselben gewonnen und die eigentümliche Form der Wurzeln algebraisch auflösbarer Gleichungen festgestellt; der Umstand, dass die hierin auftretenden irrationalen Functionen der Coefficienten rationale Functionen der Wurzeln selbst sind, beseitigt dann den oben erwähnten Zweifel. Daran knüpft sich der Nachweis der Unauflösbarkeit allgemeiner Gleichungen von höherem als dem 4ten Grade. Dann wird noch tiefer in das Wesen der Darstellung der Wurzeln auflösbarer Gleichungen eingedrungen und als Anwendung der Satz erhalten, dass jede irreductible auflösbare Gleichung eines Primzahlgrades eine Galois'sche oder Abel'sche Gleichung sein muss. Im 14ten Capitel folgt die eingehende Untersuchung der Gruppe einer Gleichung. Es wird gezeigt, wie sich die Eigentümlichkeiten der Gruppe, wie Transitivität und Imprimitivität, in äquivalente algebraische Eigenschaften der Gleichung selbst umsetzen lassen; die Eigenschaft des Zusammengesetztseins erfordert ausführliche Untersuchungen, namentlich über die Galois'sche Resolvente. Der Nachweis, dass die Auflösung aller zu derselben Gruppe gehörigen Gleichungen durch die einer einzigen unter ihnen gegeben wird, rechtfertigt schliesslich die Uebertragung

des Begriffs der Auflösbarkeit von Gleichung auf Gruppe. Weiter handelt es sich um die Reduction einer zusammengesetzten Gleichung und die Zerfällung derselben in rationale Factoren. Der Schluss des Capitels beschäftigt sich mit dem Nachweise, dass die Beschränkung, wonach in allen den vorangehenden Untersuchungen der gegebenen Gleichung immer nur rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung selbst adjungirt wurden, nur eine scheinbare ist, insofern ebensowenig die Adjunction der Wurzeln einer neuen Gleichung, deren Coefficienten demselben Rationalitätsbereich angehören, wie die der ursprünglichen, als die Annahme, dass die Wurzeln beider Gleichungen einer in denselben rationalen Relation genügen, eine Erweiterung liefert. Im (15.) Schlusscapitel wird zu der gruppentheoretischen Behandlung der auflösbaren Gleichungen übergegangen. Es werden die für die Auflösbarkeit charakteristischen Eigenschaften der Gruppe der Gleichung in mancherlei Formen festgestellt, an die sich einige Anwendungen knüpfen. Für den allgemeinen Fall, dass der Grad der Gleichung verschiedene Primfactoren besitzt, wird das Abel'sche Reductionsverfahren auseinandergesetzt. Der Fall ferner, dass der Grad eine Primzahlpotenz p^k ist, kann noch durch die Voraussetzung beschränkt werden, dass die Gruppe der Gleichung imprimitiv sei. Hierfür wird dann der Charakter der Gruppe festgestellt. Der specielle Fall $k = 1$ führt auch auf diesem Wege zu dem früher durch die algebraische Methode gelieferten Satz über die Natur der auflösbaren Gleichungen (s. oben) von einem Primzahlgrade. Der Fall $k = 2$ liefert die Sätze, die Herr Jordan (Liouv. J. (2) XIII. p. 111 ff.) angegeben hat. Schliesslich wird noch auf die rationale Darstellbarkeit der Wurzeln einer auflösbaren primitiven Gleichung vom Grade p^k durch eine bestimmte Anzahl unter ihnen eingegangen. (Eine Berichtigung zu p. 94 Zusatz II. des Buches findet man in Klein Ann. XXII. p. 94 Fussnote). T.

E. Schröder. Ueber die Anzahl der Substitutionen, welche in eine gegebene Zahl von Cyklen zerfallen.
Hoppe Arch. LXVIII. 353-378.

Bestimmung der Anzahl aller Substitutionen von n Elementen, welche den Grad n besitzen; Recursionsformeln hierfür. Anzahl der Substitutionen von n Elementen, welche r bestimmte Elemente umsetzen, nebst Methode ihrer Aufstellung. Anzahl der Substitutionen von n Elementen, welche vom Grade r sind. Anzahl der Substitutionen, welche eine bestimmte Zahl von Cyklen besitzen. Die Anzahl derjenigen der $n!$ Substitutionen von n Elementen, welche in k Cyklen zerfallen, ist gleich der Summe aller Combinationen ohne Wiederholungen zur $(n-k)^{\text{ten}}$ Klasse aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots n-1$. No.

W. Dyck. Gruppentheoretische Studien. Habilitationsschrift. Leipzig. Teubner. Klein Ann. XX. 1-45.

Eine Substitution A_i wird als irgend welche Operation definirt, die auf das mit 1 bezeichnete Object angewendet werden soll. Sind m solcher Operationen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gegeben, so entsteht durch Iteration und Combination derselben eine Gruppe. Besitzen die A keine Perioden und bestehen zwischen ihnen keine Relationen, so erhalten wir die allgemeinste Gruppe G von m Substitutionen; ihre Ordnung ist unendlich gross. Durch Einführung von A_n mittels der Gleichung $A_1 A_2 \ldots A_m A_n = 1$ kann man die negativen Exponenten bei den A vermeiden. Ein Polygonnetz kann die Gruppe geometrisch darstellen; der Uebergang von einem Polygon zu einem anderen repräsentirt eine Substitution, welche im Sinne der Analysis situs das Netz in sich selbst überführt. Durch irgend welche Relationen, die stets in die Form $F(A_1, \ldots, A_m) = 1$ gebracht werden können, hebt sich aus der allgemeinen eine besondere Gruppe G' heraus; G und G' lassen sich isomorph auf einander beziehen. Der Herr Verfasser legt principiellen Wert darauf, die Gruppen G' durch blosse Kenntnis einer Anzahl von Beziehungen zwischen den erzeugenden Substitutionen zu definiren. Geometrisch betrachtet spaltet die isomorphe Zuordnung von G und G' das unendliche Netz in eine Reihe von äquivalenten Gebieten, deren jedes der Gruppe G' entspricht; die Ränder eines solchen Gebietes sind einander paarweise zu-

geordnet; heftet man sie in der dadurch bestimmten Verbindung an einander, so erhält man ein geschlossenes Netz als Bild von G'. Bei endlichen Gruppen müssen für die A Perioden bestehen; man hat also die Relationen

$$\text{(I)}\qquad A_i^{\nu_i} = 1,\quad \prod_i A_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots m, n),$$

und für jede so definirte Gruppe lässt sich in dem unendlichen Netz ein einfach zusammenhängendes Fundamentalpolygon construiren, dessen Ränder einander paarweise zugeordnet sind. Zu den Beziehungen (I) können noch Relationen

$$\text{(II)}\qquad P_h(A_1, A_2, \dots) = 1$$

hinzutreten. Die hiernach geschlossene Fläche giebt durch ihren Zusammenhang der Gruppe ein bestimmtes Geschlecht p. Für $p = 0$ ergeben sich fünf Gruppen, deren eine, die Ikosaedergruppe, wie übrigens Hamilton schon angiebt, durch

$$A_1^5 = 1,\quad A_2^3 = 1,\quad A_3^2 = 1,\quad A_1 A_2 A_3 = 1$$

bestimmt ist. Dies ergiebt beispielsweise: Setzt man irgend welche krummlinigen Dreiecke a_1, a_2, a_3 derart aneinander, dass in den Ecken a_1 je zehn abwechselnd schraffirte und weisse Dreiecke zusammenstossen, in den Ecken a_2 je sechs, in den Ecken a_3 je vier, so enthält das entstehende Netz unter allen Umständen nur 60 Dreiecke jeder Art, welche die ganze Ebene ausfüllen. Es werden einige Bemerkungen über Fälle von $p = 1$ und über die Gruppe der Modulargleichung für Primzahltransformationen gemacht.

No.

F. Brioschi. Sur les fonctions de sept lettres. C. R. XCV. 665-669, 814-817, 1254-1257.

Es ist nicht möglich, ein eingehendes Referat über diese, hauptsächlich Formeln bietende Arbeit zu geben. Es muss genügen, den Inhalt kurz zu charakterisiren als zur Theorie der 30-wertigen Functionen von sieben Elementen, sowie zur Verbindung derselben mit den Modulargleichungen achten Grades gehörig.

No.

J. J. SYLVESTER. Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires. C. R. XCIV. 55-59.

Unter der „reciproken Determinante" einer gegebenen anderen verstehen wir diejenige, welche die reciproke Substitution der durch die zweite dargestellten Substitution repräsentirt. Addirt man zu den Diagonalhauptgliedern einer Determinante $-\lambda$, so entsteht eine Function von λ, deren Wurzeln als „λ-Wurzeln der Determinante" bezeichnet werden sollen. Dann gelten folgende Sätze: Die λ-Wurzeln der Reciproken sind die reciproken Werte der λ-Wurzeln der Determinante; die k^{ten} Potenzen (k als commensurabel angenommen) der λ-Wurzeln einer Determinante sind identisch mit den λ-Wurzeln der k^{ten} Potenz der Determinante. Hieraus ergiebt sich eine Lösung des Problems: die k^{te} Potenz einer gegebenen Substitution zu finden. No.

P. MANSION. Introduction à la théorie des déterminants. 2me éd. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

In dieser kleinen Schrift sind die allgemeinen Eigenschaften der Determinanten, sowie ihre Anwendungen auf die Lösung linearer Gleichungen, auf die Elimination zwischen linearen Gleichungen oder zwischen zwei Gleichungen von höherem Grade (Methode von Cauchy und Tschirnhausen) aus einander gesetzt für Determinanten mit zwei oder drei Reihen, ohne Benutzung der Theorie der Inversionen. Im Anfang findet man die allgemeine Definition einer Determinante durch Permutationen oder symbolische Producte etc. Mn. (O.).

H. KAISER. Die Anfangsgründe der Determinanten in Theorie und Anwendung. Wiesbaden. Bergmann.

Elementare Einführung, für das erste Studium geeignet. In der Einleitung heisst es: „Die Determinanten geben für den, der sich nur einigermassen mit ihnen beschäftigt hat, ein klareres

Bild des betreffenden analytischen Ausdrucks, als die algebraische Entwickelung desselben." Wäre das schön! No.

E. Bardey. Zur Lehre von den Determinanten. Hoffmann Z. XIII. 111-114, 171-186.

J. Diekmann. Determinanten in der Schule. Hoffmann Z. XIII. 356.

Gerlach. Determinanten in der Schule. Hoffmann Z. XIII. 442-443.

Nur von pädagogischem Interesse. No.

Th. Muir. A treatise of the theory of determinants with graduated sets of exercices. London. Macmillan.

L. Klug. Entwickelung des Euler'schen Algorithmus. Hoppe Arch. LXVII. 337-342.

Bekanntlich führte Leonhard Euler die im Wesentlichen mit einer abgekürzten Determinantendarstellung sich deckende Bezeichnung ein:

$$\gamma_1 + \cfrac{1}{\gamma_2 + \cfrac{1}{\gamma_3 + \cdots + \cfrac{1}{\gamma_n}}} = \frac{[\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_n]}{[\gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_n]}.$$

Herrn Klug scheint nicht bekannt zu sein, dass für diese Algorithmen eine überreiche Literatur existirt, welche im Wesentlichen auch die von ihm im vorliegenden Aufsatze entwickelten Sätze in sich begreift. Namentlich giebt es eine Fülle von Regeln zur independenten Bildung der Gruppenglieder, die sich grösstenteils nur im Ausdrucke unterscheiden (Burkhardt, Hauber, Rothe, Bartholomaei, Minding u. a.). Vermutlich dürfte auch darunter die hier gegebene Vorschrift enthalten sein, welche folgenden Wortlaut hat: „Alle Glieder einer Gruppe werden aus dem ersten Gliede derselben dadurch gebildet, dass man die Indexe", warum

nicht Jndices? „vertauscht, und zwar wird ein grader Index nur mit einem von ihm grösseren graden, ein ungrader mit einem von ihm grösseren ungraden Index vertauscht, aber so, dass in jeder Complexion der Indexe dieselben in natürlicher Ordnung seien, d. h. ein höherer Index (Zahl) stehe niemals vor einem niedrigeren.“ Solche Definitionen sollten denn doch, wenn sie auch sachlich richtig sind, heutzutage nicht mehr geleistet werden; wozu haben wir denn das Kunstwort Inversion?

Gr.

G. A. van Veltzer. Answer to query on the transformation of determinants of equal value. Anal. IX. 116-118.

Der Verfasser zeigt, dass eine beliebige Determinante im Allgemeinen nach den gewöhnlichen Regeln in eine äquivalente Determinante derselben Ordnung transformirt werden kann.

Jn. (O.).

T. Muir. The law of extensible minors in determinants. Edinb. Trans. XXX. 1-4.

Als Einleitung stellt der Verfasser folgendes Gesetz „Law of complementaries“ auf. Jedem allgemeinen Satz, welcher die Form einer identischen Gleichung zwischen einer Anzahl von Minoren einer Determinante oder zwischen der Determinante selbst und einer Anzahl ihrer Minoren annimmt, entspricht ein anderer Satz, der aus diesem dadurch hervorgeht, dass man für die Minoren ihre Cofactoren in der Determinante substituirt, und dann jedes Glied mit solchen Potenzen der Determinante multiplicirt, dass die Glieder denselben Grad haben. Er geht sodann zur Aufstellung und Herleitung seines „Law of extensible minors“ über. Wenn eine identische Relation zwischen einer Anzahl von Minoren einer Determinante oder zwischen der Determinante selbst und einer Anzahl ihrer Minoren aufgestellt werden kann, so kann man, wenn die Determinanten mit Hülfe ihrer Hauptdiagonalen bezeichnet werden, stets einen neuen

Satz erhalten, der sich auf eine Entwickelung der nächst höheren Ordnung bezieht, wenn man dem Ende der Diagonale jeder Determinante (einschliesslich der von der Ordnung Null), die in der Identität vorkommt, einen neuen Buchstaben mit einem neuen Index hinzufügt. Cly. (O.).

Th. Muir. On some transformations connecting general determinants with continuants. Edinb. Trans. XXX. 5-12.

Die betreffende Transformation ist die einer allgemeinen Determinante in eine solche, welche an allen den Stellen Nullen hat, wo dies bei Sylvester's Kettenbruch-Determinante der Fall ist, d. h. überall, ausgenommen in der Hauptdiagonale und den beiden angrenzenden Minoren. Die resultirenden Sätze lassen Transformationen mittels der Gesetze der Complementären (siehe oben) zu. Auch ergeben sich noch einige interessante Identitäten. Cly. (O.).

Chrystal. Note on Mr. Muir's transformation of a determinant into a continuant. Edinb. Trans. XXX. 13-14.

Chrystal. On a special class of Sturmians. Edinb. Trans. XXX. 161-165.

Functionen, die wie im Sturm'schen Satz zur Trennung der reellen Wurzeln einer Gleichung dienen, können Sturm'sche Functionen genannt werden. Der Verfasser ist bei Gelegenheit der Bearbeitung physikalischer Fragen darauf gekommen, dass die Eigenschaften symmetrischer Determinanten durch Constructionen einer speciellen Classe Sturm'scher Functionen hergeleitet werden können. Er gelangt so unabhängig und auf verschiedene, sehr einfache Weise zu Resultaten, die mit denen von Joachimsthal in Crelle J. XLVIII. 1854. p. 386 identisch sind. Cly. (O.).

Th. Muir. On circulants of odd order. Quart. J. XVIII. 261-266.

„Circulanten" sind Determinanten der Form

$$|a_{\lambda+\mu}| \qquad (\lambda, \mu = 0, 1 \dots n-1),$$

wenn jeder negative Index durch den kleinsten positiven ersetzt wird, dem er mod. n congruent ist. Es wird gezeigt, dass eine Circulante der Ordnung $2m+1$ als Product aus $(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})$ und einer Determinante m^{ter} Ordnung dargestellt werden kann, deren Elemente in den a cyklisch sind.

No.

G. Torelli. Sui determinanti circolanti. Nap., Rend. XXI. 83-91.

Ueber Circular-Determinanten vgl. F. d. M. X, 113; XI, 119; XII. 111, 116; XIII, 127, 128; sie haben die im vorigen Referate angegebene Form. Es wird gezeigt, dass eine Circulardeterminante der Ordnung $r.m$ als Circulardeterminante der Ordnung m darstellbar ist, deren Elemente Summen von m^{r-1} Subdeterminanten der Ordnung r der gegebenen Determinante sind. Ein ähnlicher Satz gilt für schiefe Circulardeterminanten, d. h. für solche, bei denen die Elemente links von der Hauptdiagonalreihe das negative Zeichen haben. Multiplicirt man die Circulardeterminante der Ordnung $n = m.r$, (wo m, r zu einander prim sind) mit $\sum a_\lambda$, so ist das Product durch dasjenige zweier Circulardeterminanten der Ordnungen r, m teilbar. Aus diesen Sätzen ergeben sich die bisher bekannten als Specialfälle. No.

J. J. Sylvester. On the properties of a split matrix. J. Hopkins Circ. 1882. 210-211.

Die Zeilen einer Determinante, z. B. der siebenten Ordnung, werden in zwei Teile geteilt, deren erster z. B. A, B, C, deren zweiter D, E, F, G umfasst. Unter dem Product BF zweier Zeilen wird die Summe der Producte entsprechender Elemente verstanden. Wenn die Producte jeder Zeile des ersten in jede Zeile des zweiten Teils gleich Null sind, so stehen die adjungirten

vollständigen Subdeterminanten der Matrizen A, B, C und D, E, F, G in constantem Verhältnisse $l:\lambda$. Bezeichnen wir mit Δ die Gesammtdeterminante und mit S, Σ die Summen der vollständigen Subdeterminanten beider Matrizen, dann ist

$$\frac{\lambda}{l}S = \frac{l}{\lambda}\Sigma = \Delta;\ S.\Sigma = \Delta^2.$$

Ist das Product jedes Zeilenpaares für Δ gleich Null, dann wird

$$\lambda^2 : l^2 = (D^2E^2F^2G^2):(A^2B^2C^2);\ \Delta^2 = A^2.B^2.C^2.D^2\ldots G^2.$$

Sagt man, eine Determinante sei von der „Nullität“ k, wenn sie selbst, nebst allen ihren ersten, zweiten, ...$(k-1)^{\text{ten}}$ Subdeterminanten verschwindet, dann gilt der Satz: Die Nullität des Products einer Anzahl von Matrizen derselben Ordnung ist nicht kleiner als die Nullität eines einzelnen Factors und nicht grösser als die Summe der Nullitäten aller einzelnen Factoren.

No.

F. Caspary. Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. Kronecker J. XCII. 123-144.

Herr Caspary geht von einer Auffassung der Determinanten aus, welche den Grassmann'schen Principien entspringt; dieselbe führt in einfachster Weise zu den Umformungen der Kegelschnittdeterminanten, mit denen sich die Herren Hunyady, Mertens, Pasch beschäftigt haben. Den Rechnungen zu Grunde gelegt werden Einheiten e_1, $e_2, \ldots, e_r$, zwischen denen die Beziehungen

$$e_a e_a = 0,\ e_a e_b = -e_b e_a,\ e_1 e_2 \ldots e_r = 1$$

herrschen; mit denselben werden andere „ergänzende Einheiten“ E_1, $E_2, \ldots, E_r$ durch die Bedingungen $e_a E_a = 1$, $e_a E_b = 0$ verbunden. Die Multiplication von Grössen

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + \cdots + p_r e_r, \ldots$$
$$Q = Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + \cdots + Q_r e_r, \ldots,$$

worin die p_1, $p_2, \ldots$; Q_1, $Q_2, \ldots$ Zahlengrössen bedeuten, führt

dann sofort auf Beziehungen, durch welche die gewünschten Umformungen leicht geliefert werden. No.

O. H. MITCHELL. Note on determinants of powers.
Sylv., Am. J. IV. 341-345; J. Hopkins Circ. 1882. 242.

Besprechung der Quotienten zweier Determinanten, welche derjenigen ähnlich gebildet sind, durch welche die zweite Wurzel aus der Discriminante von n Grössen geliefert wird. No.

E. W. DAVIS. The maximum value of a certain determinant. J. Hopkins Circ. 1882. 22-23.

Wenn die Elemente einer Determinante, deren Ordnung zwei übersteigt, zwischen $-a$ und $+a$ variiren können, so besitzt dieselbe ein numerisches Maximum für die Annahme, dass alle Elemente der Hauptdiagonale $-a$, die übrigen gleich $+a$ gesetzt werden. Dieselbe Frage wird für drei- und für vier-dimensionale Determinanten behandelt. No.

A. PUCHTA. Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten. Wien. Gerold's Sohn.

W. ŘEHOŘOVSKÝ. Ueber Borchardt's erzeugende Function.
Cas. XI. 111-121. (Böhmisch).

Führt man die symbolische Bezeichnung ein:

$$T = \Sigma \frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\cdots\frac{1}{t_n-\alpha_n},$$

wo die t beliebige Grössen, die α hingegen die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

bedeuten, und bildet man die Determinanten

$$D = \Sigma \pm \frac{1}{(t_1-\alpha_1)^2}\cdots\frac{1}{(t_n-\alpha_n)^2},$$

$$\varDelta = \Sigma \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdots\frac{1}{t_n-\alpha_n},$$

so ist bekanntlich

$$D = \Delta T.$$

Dies wird hier auf möglichst einfache Weise bewiesen, wie der Vergleich mit Cayley's Herleitung zeigt. Dieselbe neue Entwickelung findet sich auch an entsprechender Stelle von des Verfassers „höhererAlgebra“ (I. Teil) eingereiht, wie später berichtet werden wird. Std.

R. F. Scott. On some determinants whose elements are rational fractions. Mess (2) XI. 165-172.

Sind in den Determinanten die Elemente mit Ausnahme der äusseren Reihe oder Colonnen ausgewertet, so sind sie allgemein von der Form $\frac{1}{x_m - \alpha_n}$. Es wird ferner bewiesen, dass, wenn eine Determinante der Ordnung nr gebildet ist aus n Gruppen von r Reihen, deren i^{te} Gruppe

$$\begin{array}{lll} (x_i-\alpha_1)^{-1}, & (x_i-\alpha_2)^{-1}, \dots & (x_i-\alpha_{nr})^{-1} \\ (x_i-\alpha_1)^{-2}, & (x_i-\alpha_2)^{-2}, \dots & (x_i-\alpha_{nr})^{-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (x_i-\alpha_1)^{-n}, & (x_i-\alpha_2)^{-n}, \dots & (x_i-\alpha_{nr})^{-n} \end{array}$$

ist, der Wert der Determinante gleich

$$\frac{\{\zeta^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2, \dots x_n)\}^{r^2}\, \zeta^{\frac{1}{2}}(\alpha_{nr}, \alpha_{nr-1}, \dots \alpha_1)}{\{f(x_1)\, f(x_2) \dots f(x_r)\}^r},$$

wo

$$f(x) = (x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{nr})$$

ist. Glr. (O.).

Walecki. Équation en s de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés. Nouv. Ann. (3) I. 401-410, 556-561.

Vermindert man in der symmetrischen Determinante D_1 mit reellen Elementen diejenigen der Hauptdiagonale um s, so entstehe die Determinante D vom Grade m. Wenn D_1 die Discriminante einer quadratischen Form $f(x, y, \dots z)$ ist, wird D die von $f(x, y, \dots z) - s(x^2 + y^2 + \dots + z^2)$. Hierauf gründen sich ein-

fache Beweise über die Realität und die Multiplicität der Wurzeln s von $D=0$ und über ihre Beziehung zu der Zerlegung von $f-s(x^2+y^2+\cdots z^2)$ in eine Summe von Quadraten. Wir erwähnen beispielshalber den folgenden Satz: Bei der Zerlegung von

$$f(x, y, \dots z) - \sigma.(x^2+y^2+\cdots+z^2)$$

in Quadrate, giebt es so viele positive Vorzeichen, als $D=0$ Wurzeln hat, welche grösser sind als σ. Aus der Gleichung in s wird die lineare orthogonale Substitution abgeleitet, welche die quadratische Form in eine Quadratsumme umwandelt. No.

A. Legoux. Sur une application d'un déterminant.
Quart. J. XIX. 41-44.

Die Gleichungen dritten und vierten Grades werden dadurch gelöst, dass ihre Polynome mit den Circulanten

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ a_2 & x & a_1 \\ a_1 & a_2 & x \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & x & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & x & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}$$

identificirt werden. No.

T. Muir. On a determinant formed by bordering the product of two determinants. Mess. (2) XI. 161-165.

Nimmt man zwei Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

und bildet ihr Product

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3, & a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3, & a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3, & b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3, & b_1\gamma_1+b_2\gamma_2+b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3, & c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3, & c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

und bezeichnet dies Product mit

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

so ist die betrachtete Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ a_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ b_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ c_0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Glr. (O.).

Th. Muir. On a symmetric determinant connected with Lagrange's interpolation problem. Lond., M. S. Proc. XIII. 156-161.

Es sei

$$L_n = \left| \sin \frac{\lambda . \mu}{n+1} \pi \right| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ergiebt sich z. B.

$$L_n = \left[\frac{1}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}},$$

$$L_{2m} = (-1)^m 2^m \cdot \left| \sin \frac{\lambda . (2\mu-1)}{2m+1} \pi \right| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\left| \sin \frac{\lambda . (2\mu-1)}{2m+1} \pi \right| = \left| \sin \frac{\lambda . \mu}{2m+1} 2\pi \right|.$$

In ähnlicher Weise erhält man für

$$M_n = \left| \cos \frac{\lambda . \mu}{n+1} \pi \right| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Resultate

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(2n+1)\right]^{n-1},$$

$$\left| \cos \frac{\lambda . \mu}{2m+1} \pi \right| = (-1)^m 2^m \left| \cos \frac{\lambda . (2\mu-1)}{2m+1} \pi \right|$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

u. s. w. No.

Th. Muir. Note on the condensation of skew determinants, which are partially zero-axial. Lond., M. S. Proc. XIII. 161-164.

Die behandelten Determinanten entstehen, wenn man in

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \dots \\ -a_2 & x_2 & b_3 & b_4 \dots \\ -a_3 & -b_3 & x_3 & c_4 \dots \\ -a_4 & -b_4 & -c_4 & x_4 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

der Reihe nach $x_1 = 0$; ferner $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; u. s. w. setzt.

No.

R. F. Scott. Notes on determinants. Mess. (2) XII. 105-118.

Der Verfasser betrachtet zuerst die Determinante n^{ter} Ordnung:

$$\begin{vmatrix} x_1\ , & \alpha_1+\beta_2, & \alpha_1+\beta_3, \dots \\ \alpha_2+\beta_1, & x_2\ , & \alpha_2+\beta_3, \dots \\ \alpha_3+\beta_1, & \alpha_3+\beta_2, & x_3\ , \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

deren Elemente gegeben sind durch die Gleichungen

$$a_{iii} = x_i, \quad a_{ijk} = \alpha_i+\beta_j+\gamma_k;$$

ferner die Determinante 4ter Klasse, deren Elemente gegeben sind durch

$$a_{iiii} = x_i, \quad a_{ijkl} = \alpha_i+\beta_j+\gamma_k+\delta_l,$$

u. s. w. Sie werden mit Hülfe alternirender Zahlen ausgewertet. Im Weiteren beschäftigt sich der Verfasser mit geometrischen Fragen, welche ihn zur Betrachtung der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0\ , & (\alpha_1+\alpha_2)^2, & (\alpha_1+\alpha_3)^2, \dots & (\alpha_1+\alpha_n)^2, & 1 \\ (\alpha_2+\alpha_1)^2, & 0\ , & (\alpha_2+\alpha_3)^2, \dots & (\alpha_2+\alpha_n)^2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_n+\alpha_1)^2, & (\alpha_n+\alpha_2)^2, & (\alpha_n+\alpha_3)^2, \dots & 0\ , & 1 \\ 1\ , & 1\ , & 1\ , \dots & 1\ , & 0 \end{vmatrix}$$

führen, und welche nebst einigen anderen ähnlichen ausgewertet wird.

Glr. (O.).

V. E. Serdobinsky. Zur Determinantentheorie. Mosk. S X. Lief. 1. (Russisch).

Es wird hier ein Schachspielproblem ohne Anwendung der Determinanten-Theorie gelöst, das von Günther in seinem „Lehr-

buch der Determinanten-Theorie", 2. Aufl. S. 545, und auch von Glaisher (On the problem of the eight queens. Philosoph. Mag. 1874. December) betrachtet worden ist. Ty.

A. SACHSE. Ueber die Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten. Hoppe Arch. LXVIII. 427-432.

Aehnlich wie Herr E. Lucas (vgl. F. d. M. IX. 1877. 113) stellt Herr Sachse mit Hülfe einer „Differenzengleichung" die Euler'schen und die Bernoulli'schen Zahlen als Determinanten her, deren Elemente Facultäten der ganzen Zahlen sind. Durch Entwickelung nach Subdeterminanten ergeben sich Recursionsformeln. No.

N. JADANZA. Sopra un determinante gobbo che si presenta nello studio dei cannocchiali. Torino, Atti. XVII. 714-723.

Ableitung einiger Resultate aus der Theorie der Dioptrik mit Hülfe der bekannten hierbei auftretenden Kettenbruchdeterminante. No.

R. F. SCOTT. On some forms of cubic determinants. Lond., M. S. Proc. XIII. 33-43.

Es werden cubische Determinanten nach besonders einfachen Bildungsgesetzen aufgestellt und berechnet. 1) Es sind $n-m$ Lagen unter einander gleich, ebenso die m übrigen unter sich; 2) alle Elemente sind Null, ausgenommen diejenigen der drei Diagonalebenen; 3) aus der ersten Lage werden die übrigen durch einfache lineare Combinationen mit constanten Grössen gebildet u. s. w. No.

L. KRONECKER. Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Berl. Ber. 1882. 821-824.

Zwei Systeme von je n^2 Grössen

$$a_{ik},\ a'_{ik} \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

heissen reciprok, wenn $\sum_i a_{hi}\, a_{ik}$ für $h = k$ den Wert 1, sonst den Wert Null hat. Zwei Systeme entsprechender Subdeterminanten von reciproken Systemen sind selbst einander reciprok, und da auch das System der adjungirten Subdeterminanten, dividirt durch die Determinante, das reciproke eines Subdeterminantensystems ist, so ist die Adjungirte einer jeden Subdeterminante, dividirt durch die Determinante, gleich der entsprechenden Subdeterminante des reciproken Systems. Ist das System (a_{ik}) symmetrisch, und setzt man

$$U_{ik} = \sum_{g,h} a_{gh}\, u_{gi}\, u_{hk} \qquad (g,h,i,k = 1, 2,\ldots n),$$

dann ist jene Summe von Subdeterminanten-Producten

$$|a_{gh}|\cdot|u_{gi}|\cdot|u_{hk}|.$$

Zwischen den verschiedenen Ausdrücken $|u_{gi}|\cdot|u_{hk}|$, bei denen

$$g = g_1,\ldots g_m;\ h = h_1,\ldots h_m;\ i,\ k = 1,\ 2,\ldots m$$

sind, existiren genau dieselben linearen Relationen, wie zwischen den $|a_{gh}|$, falls die a als unbestimmte Grössen betrachtet werden. Für die Subdeterminanten $|U_{ik}|$ $(i = i_1,\ldots i_m;\ k = k_1,\ldots k_m)$ ergiebt sich die wesentliche Eigenschaft, dass sie als lineare homogene Functionen der sämmtlichen von einander linear-unabhängigen Subdeterminanten des Systems (a_{ik}) darstellbar sind, so dass die Coefficienten von einander linear-unabhängige ganze Functionen der Unbestimmten u_{ik} sind.

Zwischen den Subdeterminanten allgemeiner symmetrischer Systeme bestehen folgende identische lineare Relationen

$$|a_{gh}| = \sum_r |a_{ik}| \qquad (r=m+1,\ldots 2m),$$

$$(g = 1,\ldots m;\ h = m+1,\ldots 2m),$$

$$(i = 1,\ldots m-1,\ r;\ k = m+1,\ldots r-1,\ m,\ r+1,\ldots 2m).$$

No.

C. Runge. Die linearen Relationen zwischen den verschiedenen Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Kronecker J. XCIII. 319-328.

Es wird gezeigt, dass jede zwischen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung von symmetrischen Determinanten bestehende lineare Gleichung, deren Coefficienten von den a_{ik} unabhängig sind, aus den eben angeführten Kronecker'schen Relationen durch lineare Verbindung abgeleitet werden könne. Die Anzahl der linear-unabhängigen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung beträgt nur den $\frac{1}{2}(m+1)^{\text{ten}}$ Teil aller vorhandenen; es wird eine Methode zu ihrer Aufstellung gegeben.

Unter den Subdeterminanten eines System $a_{ik} = -a_{ki}$ besteht keine lineare Relation. No.

C. Kostka. Ueber den Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen. Kronecker J. XCIII. 89-124.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der B. IX, S. 318 besprochenen. Es handelt sich um die Ueberführung dreier Functionsformen T, K, C in einander, wobei sechs Aufgaben: T, K; T, C;... vorliegen. Die Formen sind

$$T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \Sigma\, t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \ldots t_n^{\alpha_n};$$

hier ist die rechte Seite die ganze homogene symmetrische Function der t, welche aus dem ersten Gliede durch Permutation der Exponenten abgeleitet wird; ferner

$$K_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_r} = c_{\beta_1} c_{\beta_2} \ldots c_{\beta_r};$$

hier ist c_β die Summe der Combinationen der t zur β^{ten} Classe ohne Wiederholung; endlich ist

$$C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r} = \begin{vmatrix} c_{\lambda_1} & c_{\lambda_1+1} \ldots c_{\lambda_1+r-1} \\ c_{\lambda_2-1} & c_{\lambda_2} \quad \ldots c_{\lambda_2+r-2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}.$$

Zunächst werden Beziehungen abgeleitet, durch welche die Coefficienten der Entwickelungen bei K, C und C, K auf einander

reducirt werden. Dann wird der Coefficient eines T in der Aufgabe T, C durch die Lösung eines combinatorischen Problems gefunden; und hierbei zeigt es sich, dass die Resultate der vier Aufgaben, in welche C eingeht, durch eine einzige Quadrattafel dargestellt werden können. Die successiven Constructionen dieser Tafel für die verschiedenen Dimensionen sind einfacher Art; es werden zugleich mit ihnen auch Proben für die Richtigkeit der Resultate gegeben. Den Schluss bilden kurze Betrachtungen über die beiden noch fehlenden Aufgaben T, K und K, T.

No.

L. Crocchi. Sopra la corrispondenza tra i coefficienti di un' equazione algebrica e le funzioni simmetriche complete. Batt. G. XX. 301-320.

Herr Crocchi untersucht die Aehnlichkeit, welche zwischen den Functionen V_p (Vgl. F. d. M. XI. 1879. 116; XII. 1880. 119) und den Coefficienten a_p einer Gleichung mit den Wurzeln $x_1, x_2, \dots$ besteht. Die Formeln für die Darstellung einer symmetrischen Function $\varphi(x_1, x_2, \dots)$ durch die a_p wie durch die V_p entsprechen einander. Es ist

$$\frac{da_i}{ds_p} = 0, \frac{dV_i}{ds_p} = 0\ (i<p); \qquad \frac{da_i}{ds_p} = -\frac{1}{i}, \frac{dV_i}{ds_p} = +\frac{1}{i} \quad (i = p)$$

u. s. w. Die Functionaldeterminante der Coefficienten nach den Wurzeln genommen, ist ihrem absoluten Werte nach gleich der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung; für die Discriminante besteht eine Determinanten-Darstellung durch die V_p, welche bis auf gewisse Vorzeichen mit derjenigen durch die a_p identisch ist.

No.

J. Hammond. On the calculation of symmetric functions. Lond. M. S., Proc. XIII. 79-84.

Berechnung der symmetrischen Functionen von $(n+1)$ Grössen aus denen von n Grössen.

No.

W. Řehořovský. Tafeln der symmetrischen Functionen der Wurzeln und der Coefficienten-Combinationen vom Gewichte Elf und Zwölf. Wien. Denkschr. XLVI. 51-58.

Fortsetzung der Tafeln von M. Hirsch und Faà de Bruno. (Die letzteren hat der Herr Verfasser controllirt und dabei nur zwei Druckfehler gefunden.) In einer Einleitung wird die Art der Berechnung dargelegt. No.

W. P. Durfee. Tables of symmetric functions of the twelfthic. Sylv., Am. J. V. 45-62.

Die Einrichtung dieser Tafeln ist nicht so tabellarisch übersichtlich wie diejenige in der soeben besprochenen Arbeit. Nebenbei sei bemerkt, dass Referent bei einer Vergleichung beider an dreizehn Stellen verschiedene Angaben gefunden hat. Eine Controlle der Tafeln wäre daher erwünscht. No.

W. P. Durfee. On symmetric functions. J. Hopkins Circ. II. 23.

Die Durfee'schen Tabellen (s. das vorstehende Referat) sind so eingerichtet, dass alle in der Nebendiagonale befindlichen Coefficienten gleich 1 werden. Es wird gezeigt, wie die Anordnung für die Colonnen und die Zeilen eingerichtet werden muss, damit dies statthabe. Ferner wird eine Ausdehnung der Waring'schen Formel gegeben. No.

F. Franklin. On Crocchi's Theorem. J. Hopkins Circ. II. 24.

J. J. Sylvester. On Crocchi's Theorem. J. Hopkins Circ. II. 2.

Einfache Beweise für das, F. d. M. XII. 1880. 119 besprochene Theorem. Vgl auch das Referat auf p. 113. No.

Dritter Abschnitt.

Zahlentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

P. G. LEJEUNE - DIRICHLET. Lezioni sulla teoria dei numeri, pubblicate e corredate di appendici da R. Dedekind, tradotte della terza edizione da Aureliano Faifofer. Venezia, Tip. Emiliana. 1881. 8°.

E. CÉSARO. Formule d'arithmétique. Math. II. 97-101.

E. CÉSARO. Sur une nouvelle formule arithmétique. Math. I.b. 148-149.

Auszüge aus einer grösseren Arbeit, die 1883 in extenso erschienen ist. Das Referat wird daher bis dahin verschoben.

Mn.

L. KRONECKER. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. Kronecker J. XCIII. 338-364.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 48.

V. Bouniakowsky. Quelques remarques sur les propriétés d'une classe particulière des fractions décimales périodiques. Pétersb. Bull. XXVII.

Es wird hier auf einige periodische Decimalbrüche aufmerksam gemacht, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe derjenigen Glieder einer Periode, die gleich weit vom Anfange einer jeden Hälfte abstehen, gleich der Zahl 9 ist, und die ausserdem einer Congruenz, wie

$y_m \equiv y_{m-1} + y_{m-2}$ (mod. 9) oder $y_m \equiv 2y_{m-1} + y_{m-2}$ (mod. 9),

wo die y_m die Zahlen einer Periode bezeichnen, genügen.

Ty.

K. Broda. Bildungsgesetz periodischer Brüche in bestimmten Zahlensystemen. Hoppe Arch. LXVIII. 85-100.

Das Problem wird hier in der Form behandelt, dass der Nenner eines gemeinsamen Bruches und die Stellenzahl des entsprechenden periodischen Decimalbruchs gegeben, hingegen die Grundzahl des zugehörigen Zahlensystems gesucht sein sollen. Hieran werden Untersuchungen über die Factoren der Form a^m+1 geknüpft und speciell der bekannte Teiler 641 der Form $2^{2^5}+1$ in eleganter Weise ermittelt. Sn.

G. S. Ely. Note on partitions. J. Hopkins Circ. 1882. 211.

In einer Tafel von ganzen Zahlen mit zwei Eingängen seien die Columnen mit i, die Zeilen mit j bezeichnet; zwischen den Elementen bestehe die Relation

$$n_{i,j} = n_{i-1,j+1} + n_{i,j-i}.$$

Die i beginnen mit 1, die j mit 0, und es sei

$$n_{1,j} = n_{i,0} = 1.$$

Mit solchen Tabellen soll schon Euler (Com. Arith. Coll. Vol. I. 97) sich beschäftigt haben. Die Anzahl der Zerlegung von i Dingen in j Teile soll gleich $n_{i,j}$ sein und dgl. m. Sn.

O. H. MITCHELL. Note on partitions. J. Hopkins Circ. 1882. 210.

Bezeichnet man durch das Symbol $(w:i, j)$ die Anzahl verschiedener Teilungen der ganzen Zahl w in j oder weniger Teile, deren keiner $>i$, und durch E die Anzahl der im Folgenden enthaltenen Ganzen, und ist

$$\varphi_j(w) = w - E\left(\frac{w+j-1}{j}\right) = E\left(\frac{(j-1)w}{j}\right),$$

so ist

$$(w:i, j) = \sum_{x=w-i}^{x=\varphi_j(w)} (x:w-x, j-1).$$

Mit Anwendung dieser Formel lässt sich Sylvester's Formel für die Darstellung von $(w:i, j)-(w-1:i, j)$ in Termen der Teilungen niederer Ordnung, Messenger (2) VIII. 1—8 (s. F. d. M. X. 1878. p. 82) herleiten. H.

J. J. SYLVESTER. On a question in partitions. J. Hopkins Circ. 1882. 179.

Kurze, dunkle Notiz über die Zerlegung einer gegebenen Zahl in eine Reihe, deren einzelne Glieder das arithmetische Mittel der beiden benachbarten nicht übersteigen sollen.

Sn.

J. J. SYLVESTER. On a geometrical treatment of a theorem in numbers. J. Hopkins Circ. 1882 415.

Sn.

ED. WEYR. Ueber Perott's Beweis, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist. Cas. XI. 53. (Böhmisch).

Enthält eine kommentirte Reproduction dieses Beweises, der sich Darboux Bull. (2) V. 183-184 (s. F. d. M. XIII. 1881. p. 133) findet. Std.

W. W. Johnson. Mr. Glaisher's enumeration of primes for the first nine millions. Anal IX. 133-134.

Bericht über die betreffenden Arbeiten nach den Rep. of the Brit. Ass. Jn. (O.).

L. Oppermann. Om vor Kundskab om Primtallenes Mongde mellem givne Grändser. Kopenh. Overs. 1882. 169-179.

In diesem Aufsatze giebt der Verfasser eine gedrängte Uebersicht über die verschiedenen Arbeiten, auf denen unsere jetzige Kenntnis der Verteilung der Primzahlen beruht. Einerseits werden die directen Aufzählungen von Chernie, Burchardt, Dase, Rosenberg und Glaisher, andererseits die theoretischen Untersuchungen von Legendre, Gauss, Tchébycheff, Riemann, sowie die directen Berechnungen von Meissel berücksichtigt. Beiläufig wird der folgende unbewiesene Erfahrungssatz angeführt: Wenn die ganze Zahl $n > 1$ ist, so liegt zwischen $n(n-1)$ und n^2, sowie zwischen n^2 und $n(n+1)$ wenigstens je eine Primzahl. Ferner wird bemerkt, dass in den Burchardt'schen Tafeln die beiden Primzahlen 3026279 und 1330001 fehlerhaft als zusammengesetzte Zahlen aufgeführt sind. Gm.

F. Studnička. Bemerkung über Primzahlen. Cas. XI. 137.

Enthält Historisches über die Fermat'sche Zahl F_{23}.
Std.

E. de Jonquières. Formules pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. C. R. XCV 1144-1146.

E. de Jonquières. Sur la formule récemment communiquée à l'Académie au sujet des nombres premiers. C. R. XCV. 1343-1344.

R. Lipschitz. Sur une communication de M. de Jonquières relative aux nombres premiers. C. R. XCV. 1341-1346.

Herr de Jonquières hat durch geschickte Handhabung der als Sieb des Eratosthenes' bekannten Methode eine Formel für die Anzahl der eine gegebene Zahl P nicht übersteigenden Primzahlen gefunden; diese indes findet sich, wie er in der zweiten Note bemerkt, schon in Legendre's Théorie des nombres (Th. IV, 2[te] Aufl. 1808, 414), wenn auch ohne Beweis. Herr Lipschitz weist den Zusammenhang jener Formel mit gewissen zahlentheoretischen Sätzen nach, welche er bereits früher der Akademie vorgelegt habe. (C. R. LXXXIX. 948—950, vgl. auch F. d. M. XI. 1879, 142—143). Sn.

E. Lemoine. Décomposition d'un nombre premier N en ses puissances $n^{\text{ièmes}}$ maxima. C. R. XCV. 719-722.

Es werde von der Zahl N die grösste in ihr enthaltene Quadratzahl abgezogen, vom Rest wieder die grösste in diesem enthaltene Quadratzahl und so fort bis zur Erschöpfung der Zahl N. Die Anzahl der zu dieser Darstellung gebrauchten Quadratzahlen sei p. Der Herr Verfasser sucht alsdann für ein vorgeschriebenes p das kleinstmöglichste N, welches er mit y_p bezeichnet, und findet, dass alle y_p, welche einem graden p entsprechen, mit den Ziffern 67 enden, und die einem ungraden, mit den Ziffern 23. Allgemein besteht die recurrirende Formel:

$$y_{p+1} = \left(\frac{y_{p}+1}{2}\right)^2 + y_p.$$

Am Schlusse finden sich Hinweise auf den Fall, dass die Quadratzahlen durch Cubikzahlen ersetzt werden, u. s. f.

Sn.

J. Petersen. Om Primtal. Zeuthen T. (4) VI. 138-143.

Aus dem bekannten Ausdrucke mittels unvollständiger Quotienten für den Exponenten der höchsten Potenz einer Primzahl p,

die in dem Producte $n!$ aufgeht, wird die folgende Formel abgeleitet

$$\frac{(a+b)!}{a!\ b!} = \Pi p^{\frac{t_a+t_b-t_{a+b}}{p-1}},$$

wo sich das Product Π auf alle Primzahlen p erstreckt, und t_a die Quersumme der Zahl a in einem System, dessen Basis p ist, bezeichnet.

Ferner wird gezeigt, wie man für das kleinste gemeinschaftliche Multiplum der Zahlen bis n eine Formel angeben kann, und diese wird demnächst zur Auffindung von Grenzen der Anzahl der Primzahlen bis n benutzt. Das angewendete Verfahren kann wesentlich als eine geschickte Aenderung der Methode von Tchebycheff betrachtet werden und giebt auch als Resultat Grenzen, welche nur unbedeutend von den seinigen abweichen. Das Verfahren besitzt den Vorzug, etwas schneller zum Ziele zu führen. Gm.

Ed. Weyr. Ueber einen zahlentheoretischen Satz.

Cas. XI. 39. (Böhmisch).

Ist ν eine beliebige ganze Zahl, deren Zusammensetzung durch die Formel

$$\nu = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_m^{n_m}$$

gegeben erscheint, wobei die $q_k (k = 1, 2, \dots m)$ Primzahlen bedeuten, so ist bekanntlich der Ausdruck

$$p^\nu - \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1}} + \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1 q_2}} - \dots + (-1)^{m-1} \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1 q_2 \dots q_{m-1}}} + (-1)^m \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1 q_2 \dots q_m}}$$

durch ν teilbar, falls p eine Primzahl vorstellt. Dieses Theorem wird nun auf beliebige ganze Zahlen p erweitert. Std.

A. P. Minin. Ueber Eigenschaften von Zahlen, die den vollkommenen analog sind. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch).

In dieser Abhandlung werden die Zahlen untersucht, die die Eigenschaft besitzen, einen aliquoten Teil der Summe aller

Zahlen auszumachen, die kleiner als sie und relativ prim zu ihnen sind. Ty.

D. André. Sur la divisibilité d'un certain quotient par les puissances d'une certaine factorielle. C. R. XCIV. 426-428.

Arithmetischer Beweis des Satzes: Bezeichnet x eine Zahl, welche nicht als Summe von weniger als k Potenzen einer und derselben Primzahl dargestellt werden kann, so ist der Quotient

$$\frac{(nx)!}{(x!)^n\,(n!)^k}$$

eine ganze Zahl. Sn.

A. Cayley. A proof of Wilson's theorem. Mess. (2) XII. 41.

Der Satz heisst: „Wenn n eine Primzahl ist, so ist $1.2\ldots(n-1)+1$ teilbar durch n", und wird durch Betrachtung des Polygons, welches aus der Verbindung von n Punkten entsteht, gewonnen. Glr. (O.).

E. Catalan. Extrait d'une lettre. Darb. Bull. (2) VI. 224.

Es ist

$$(x+y+z)^{2m+1}-x^{2m+1}-y^{2m+1}-z^{2m+1}$$

stets durch $(x+y)\,(y+z)\,(z+x)$ teilbar. Sn.

O. Schier. Ueber Potenzsummen rationaler Zahlen. Wien. Ber. LXXXV. 503-508.

Die Arbeit erscheint als Fortsetzung einer früheren desselben Verfassers. Wir verweisen auf das damalige Referat eines anderen Referenten, dessen Einwände auch auf die am Ende der vorliegenden Analyse wiederholten Resultate noch in Kraft bleiben. (Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 135). Sn.

K. SCHWERING. Untersuchung über die fünften Potenzreste und die aus fünften Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen. Schlömilch Z. XXVII. 102-119.

Herleitung der Kummer'schen Normalform für obige Einheitswurzeln. Fünfteilung der Kreisteilungsgleichungen. Eigenschaften der entsprechenden Perioden, Relationen zwischen denselben, Charakter von 2, 3, 5, η. Die Periodengleichung.

Sn.

N. V. BUGAEFF. Ueber einige Eigenschaften der Reste und der Zahlsummen. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch)

Diese Abhandlung ist der Summation der kleinsten positiven Reste einer linearen Form, speciell auch der quadratischen und cubischen Reste, gewidmet. Ty.

T. J. STIELTJES jr. Over het quadratische rest-karakter van het getal 2. Nieuw Arch. IX. 193-195.

Wie der Titel sagt, beschäftigt sich diese kurze Arbeit mit quadratischen Resten vom Charakter 2. G.

L. MATTHIESSEN. Ueber eine antike Auflösung des sogenannten Restproblems in moderner Darstellung. Hoffmann Z. XIII. 187-190.

GERLACH. Das Restproblem für nicht teilerfremde Divisoren. Hoffmann Z. XIII. 351-354.

Eine von dem buddhistischen Priester und Astronomen Yihhing († 717 n. Chr.) gegebene Lösung des Systems

$N \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $N \equiv r_2 \pmod{m_2}$, $N \equiv r_3 \pmod{m_3}$, u. s. w.

wird in der ersten Mitteilung discutirt, in der zweiten bewiesen.

Sn.

Pellet. Sur les résidus cubiques et biquadratiques suivant un module premier. S. M. F. Bull IX. 157-162.

Einfache Darlegung des Zusammenhanges der Reciprocitätsgesetze für die quadratischen, cubischen, biquadratischen Reste mit den Kreisteilungsgleichungen in den Fällen, wo die Anzahl der Perioden 2, 3, 4 ist. Einige allgemeine Notizen über die Zerlegung dieser Gleichungen nach einem Primzahlmodul. Der biquadratische Charakter der Zahl 2.

Sn.

T. J. Stieltjes jr. Bijdrage tot de theorie der derde-en vierde-machts resten. Amst., Versl. en Meded. XVII. 338-417.

Die Arbeit behandelt die Theorie der cubischen und biquadratischen Reste und schliesst sich in dieser Hinsicht an die bekannte, indessen unvollendet gebliebene Abhandlung von Gauss: „Theoria residuorum biquadraticorum“ an. Das allgemeine Reciprocitätsgesetz ist später von Eisenstein (Crelle J. Band 28) bewiesen. Hier werden dieselben Theorien auf eine andere Weise behandelt, die darauf beruht, dass die Primzahl, deren Charakter bestimmt werden soll, ersetzt wird durch ein congruentes Product von Factoren.

Der Charakter dieser Factoren wird durch Betrachtungen bestimmt, die mit denen, welche das oben genannte Werk von Gauss enthält, übereinstimmen; nur findet eine Erweiterung auf complexe Zahlen statt. Auf diese Weise wird der Charakter von $1+i$ in Beziehung auf eine Primzahl von der Form $a+bi$ bestimmt, ebenso werden die Zahlen mit einem Modulus von der Form $4n+3$ behandelt. Dann werden alle Sätze bewiesen, welche von Gauss auf inductivem Wege gefunden und in Art. 28 der Th. res. biq. zusammengestellt sind. Der Beweis beruht auf der Theorie der complexen Zahlen, welche hier als Hülfsmittel gebraucht wird, da die Sätze selbst sich nur auf reelle Zahlen beziehen.

G.

F. Hofmann. Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste, sowie über eine Erweiterung des Congruenzbegriffes. Klein Ann. XX. 471-487.

Der zu beweisende Satz findet sich bei Gauss (Disq. ar. 81): p sei Primzahl; dann ist die Summe aller primitiven Wurzeln der Congruenz $x^{p-1} \equiv 1$ (mod. p) durch p teilbar, falls $p-1$ durch ein Quadrat teilbar ist, und $\equiv (-1)^n$ (mod. p), falls $p-1$ ein Product von n verschiedenen Factoren ist. Die Beweismethode besteht in einer Gruppirung der Potenzen einer primitiven Wurzel von p, einer Anordnung derselben in regulären Polygonen auf der Peripherie eines Kreises. Herr Adolf Hurwitz giebt eine analytische Formulirung des Beweises. Die Erweiterung des Congruenzbegriffes bezieht sich auf Brüche und Wurzeln; der Herr Verfasser beruft sich auf den Vorgang von Gauss, um die Bezeichnungen

$$\sqrt[n]{a} \equiv b \pmod{p}, \quad \frac{a}{b} \equiv c \pmod{p}$$

einzuführen, und schreibt also z. B. mod. 13:

$$\frac{\sqrt{-1}}{2} \equiv \frac{\sqrt{12}}{2} \equiv \frac{5}{2} \equiv 9.$$

Sn.

B. Stankewitsch. Zur Theorie der Congruenzen mit einer Veränderlichen in Bezug auf einen Primzahlmodulus. Mosk. S. X. Lief. 2. (Russisch).

In dieser Note werden folgende drei Theoreme über Congruenzen in Bezug auf einen Primzahlmodulus bewiesen:

I. Ist die Congruenz $x^2 - q \equiv 0$ (mod. p) möglich, so werden die Zahlen

$$A = S_{i-1} + S_{i-3} \cdot q + S_{i-5} \cdot q^2 + \cdots + S_1 \cdot q^{\frac{i-2}{2}},$$

$$B = S_i + S_{i-2} \cdot q + S_{i-4} \cdot q^2 + \cdots + q^{\frac{i}{2}},$$

wo $i = \frac{p-1}{2}$ ist, und S_k die Summe der Zahlen 1, 2, 3,..., $\frac{p-1}{2}$ zu je k bedeutet, nie durch p teilbar, und die einzige immer existirende Lösung der Congruenz

$$Ax - B \equiv 0 \pmod{p}$$

ist identisch mit derjenigen der Lösung der Congruenz

$$x^2 - q \equiv 0 \pmod{p},$$

die zu ihrem kleinsten positiven Reste eine Zahl aus der Reihe 1, 2, 3,..., $\frac{p-1}{2}$ hat.

II. Hat die Congruenz $f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$ vom Grade n mit ganzzahligen Coefficienten n Wurzeln, so wird wenigstens eine von diesen Wurzeln auch der Congruenz

$$f_{p-n}(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{p-n}) \equiv 0 \pmod{p},$$

(wo $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{p-n}$ irgend welche $p-n$ Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, ..., $p-1$ bezeichnen) genügen.

Nach dem Beweise dieses Theorems wird eine auf dasselbe basirte Methode zum Auffinden aller Lösungen der Congruenz

$$f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

gegeben.

III. Es sei ω der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen m und $p-1$, dann lässt sich bekanntlich die Lösung der Congruenz

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

auf die folgende:

$$x^\omega - 1 = 0 \pmod{p}$$

zurückführen. Nun sei jetzt $F(x)$ (in Bezug auf den Modulus p) der grösste gemeinsame Teiler von $x^\omega - 1$ und der Function

$$P = (x^{\frac{\omega}{a}} - 1)(x^{\frac{\omega}{b}} - 1)\dots(x^{\frac{\omega}{k}} - 1),$$

wo $a, b, c, \dots, k$ die verschiedenen Primzahlen bezeichnen, die in ω aufgehen, und $f(x)$ der Quotient der Function $x^\omega - 1$ durch $F(x)$, dann sind die Wurzeln der Congruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

die primitiven Wurzeln der Congruenz

$$x^{\omega} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ty.

N. V. Bugaeff. Die Lösung der Congruenzen 2ten Grades in Bezug auf einen Primzahlmodulus. Mosk. S. X. Lief. 2. (Russisch).

Der Satz von Wilson giebt für die Congruenz

$$x^2 + a^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

die Lösung

$$x \equiv 1, 2, 3, \cdots, \frac{p-1}{2} a \pmod{p}.$$

Ist $p = 8u+5$, so wird die Congruenz

$$n^2 \equiv q \pmod{p},$$

im Falle, dass sie eine Lösung hat, also im Falle, dass

$$q^{4n+2} \equiv q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, durch die Formeln

$$u = \pm q^{\frac{p+3}{8}} \pmod{p}$$

oder

$$u \equiv 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2} q^{\frac{p+3}{8}} \pmod{p}$$

gelöst, je nachdem

$$\left.\begin{array}{r} q^{2n+1} \equiv 1 \\ q^{2n+1} \equiv -1 \end{array}\right\} \pmod{p}$$

oder

ist. Es sei jetzt $p = 2^{\lambda} l + 1$, wo l irgend eine ungrade Zahl bezeichnet. Die Congruenz $z^2 \equiv q \pmod{p}$ ist unter der Bedingung

$$q^{2^{\lambda-1} l} \equiv 1 \pmod{p}$$

möglich. Setzt man $q^l = Q$, so nimmt diese Bedingung folgende Gestalt an:

$$Q^{2^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p},$$

was entweder zu der Congruenz

$$\left.\begin{array}{l} Q^{2^{\lambda-2}}-1\equiv 1 \\ \text{oder} \\ Q^{2^{\lambda-2}}+1\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p}$$

führt. Der erste Fall wird uns durch wiederholte Zerlegung der linken Seite in zwei Factoren entweder zur Congruenz

$$Q=q^l\equiv 1 \pmod{p}$$

bringen, und dann wird uns die Congruenz

$$u\equiv q^{\frac{l+1}{2}} \pmod{p}$$

die Lösung der vorgelegten Congruenz zweiten Grades geben, oder zur Congruenz

$$Q^{2^\mu}+1\equiv 0 \pmod{p},$$

wo $\mu<\lambda$ ist; dann hat man zwei Wege, um die Zahl μ zu erniedrigen: 1) mit Hülfe einer primitiven Wurzel a der Zahl p; die Lösung wird durch die Congruenz ersten Grades

$$a^{l\varrho}u\equiv q^{\frac{l+1}{2}} \pmod{p}$$

gegeben, wo ϱ durch die Formel

$$q^l\equiv a^{2l\varrho} \pmod{p}$$

definirt ist; 2) mit Hülfe des quadratischen Nichtrestes n; dann ist die Lösung durch die Congruenz

$$n^{l\varrho}u\equiv q^{\frac{l+1}{2}} \pmod{p}$$

gegeben, wo ϱ durch die Formel

$$q^l\equiv n^{2l\varrho} \pmod{p}$$

bestimmt ist. Ty.

A. Migotti. Zur Theorie der Kreisteilung. Wien. Ber. LXXXVII. 8-14.

Eigenschaften der Gleichung, deren Wurzeln die sämmtlichen primitiven m^{ten} Wurzeln sind, für eine zusammengesetzte Zahl m. Relationen zwischen den Potenzsummen dieser Wurzeln. Beson-

ders eingegangen wird auf den Fall, wo m das Product zweier Primzahlen p und q ist. Bezeichnet man die p^{ten} Einheitswurzeln mit

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \ldots,\ \alpha^{p-1},$$

die q^{ten} mit

$$\beta,\ \beta^2,\ \beta^3, \ldots,\ \beta^{q-1},$$

so sind die $(p-1)(q-1)$ primitiven $(pq)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln in der Form $\alpha^{\varrho}.\beta^{\sigma}$ enthalten. Es wird streng bewiesen, dass die gesuchte Gleichung keine anderen Coefficienten als 0 und 1 haben kann. Sn.

SCHWERING. Zur Theorie der algebraischen Functionen, welche von Jacobi $\psi(\alpha)$ genannt werden. Kronecker J. XCIII. 334-338.

Herr Schwering zeigt, dass $1+\psi(\alpha)$ immer durch $(1-\alpha)^3$ teilbar ist; ferner, dass die Anzahl der verschiedenen Functionen $\psi(\alpha)$ sofort auf den sechsten Teil der sich zunächst darbietenden reducirt werden kann. Sn.

S. J. BASKAKOFF. Ueber eine Methode, Zahlidentitäten zu finden, und ihre Anwendung auf die Theorie der Zahlenfunctionen. Mosk. S. X. Lief. 3. (Russisch).

In dieser Abhandlung werden die Formeln von Liouville bewiesen, die er in zwölf Artikeln: „Sur quelques formules générales, qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres“ (Journal des mathématiques, 1858 et 1859) gegeben hat. Ty.

A. BERGER. Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres. Upsala. E. Berling.

In den einleitenden Paragraphen werden die bekannten Grundeigenschaften der Gammafunction, ihrer logarithmischen Ableitung und der Stirling'schen Reihe entwickelt. Aus diesen er-

giebt sich eine grosse Zahl von Lehrsätzen über die mittleren Werte solcher Quotienten, deren Zähler zahlentheoretische Functionen des Nenners sind. Als solche Functionen werden zunächst allgemein die symmetrischen Functionen der Divisoren einer ganzen Zahl betrachtet; sodann speciell deren Anzahl, Summe, Summe der Reciproken, Summen von graden oder ungraden Potenzen dieser Reciproken, Summe der Logarithmen, Functionen von der Form Σa^x und $\Sigma x a^x$, u. s. f. Die gefundenen Sätze sind folgender Art: „Die Summe der Divisoren einer ganzen Zahl ist im Mittel $\frac{1}{6}\pi^2$ mal so gross, als die Zahl selbst.“ Oder: „Sind $d_1, d_2, \dots, d_n$ alle Teiler einer ganzen Zahl und a eine positive Grösse, kleiner als Eins, so ist die Summe

$$d_1 . a^{d_1} + d_2 . a^{d_2} + \cdots + d_n . a^{d_n}$$

im Mittel gleich $\frac{a}{1-a}$.“ u. dgl. m.

Die folgenden Abschnitte behandeln die Reste, welche bei der Division einer ganzen Zahl durch alle kleineren übrig bleiben. Z. B.: „Das arithmetische Mittel dieser Reste ist das $\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)$-fache der Zahl selbst.“ Oder: „Bringt man die Grössen

$$\sqrt[2s]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[2s]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[2s]{\frac{n}{3}},\dots \sqrt[2s]{\frac{n}{n}}$$

auf die Form:

ganze Zahl + Bruch,

wobei s eine ganze Zahl bezeichnet, so ist die mittlere Summe aller dieser Brüche für $n=\infty$

$$2^{2s} - \frac{B_s\,(2^{2s-1}-1)\,2(\pi)^{2s}}{(2s)!},$$

wo B_s die s^{te} Bernoulli'sche Zahl.“ Sn.

DAVID. Applications de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes. Résal J. (3) VIII. 61-72.

Eine Methode zur Entwickelung von

$$\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

nach ganzen Potenzen von x, welche bisher nur von Lacroix reproducirt und verwandt worden, findet neue interessante Anwendungen auf eine Reihe von zahlentheoretischen und algebraischen Problemen, z. B. auf die Darstellung der Discriminante einer Gleichung, der Eliminationsresultante von zwei Gleichungen, auf die Umkehrung der Reihen. Es wird gezeigt, wie man alle ganzzahligen Lösungen der bekannten Gleichung

$$p_1+2p_2+3p_3+\cdots=n$$

sofort, ohne Rechnen und ohne Probiren, hinschreiben kann. Endlich giebt der Herr Verfasser noch eine besondere Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen, z. B. der dritten:

$$B_3=\frac{1}{2^6.3^5.4^4.5^3.6^2.7}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4.3 & 4.3.2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5.4 & 5.4.3 & 5.4.3.2 & 0 \\ 1 & 6 & 6.5 & 6.5.4 & 6.5.4.3 & 6.5.4.3.2 \\ 1 & 7 & 7.6 & 7.6.5 & 7.6.5.4 & 7.6.5.4.3 \end{vmatrix},$$

deren Gesetz einleuchtet. Sn.

Ch. Méray. Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré. C. R. XCIV. 1167-1169.

Ein System von m ganzzahligen Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten ($n \geqq m$) sei vorgelegt; alle Systeme von ganzzahligen Lösungen zu finden. Es wird nur die Form der allgemeinen Auflösung gegeben und die genauere Analysis, welche auch die Ermittelung der in dieser enthaltenen Constanten ermöglichen soll, versprochen. Sn.

Moret-Blanc. Démonstration des propositions de M. Lionnet. Nouv. Ann. (3) I. 357-365.

Es werden einige diophantische Gleichungen mitgeteilt, welche nur triviale Lösungen zulassen, z. B. soll die Summe von auf

einander folgenden Quadraten ungrader Zahlen nie eine Trigonalzahl ergeben, und ähnliches. Sn.

W. Durfee. Note on some properties of the numerical solutions of $ax^2-y^2=-1$. J. Hopkins Circ. 1882. 78.

Wenn man die ganzzahligen Lösungen der obigen Gleichung, der Grösse nach geordnet, mit $x_1, y_1;\ x_2, y_2; \dots$ bezeichnet, so ist

$$x_n y_{n+t} - x_{n+t} y_n = -x_t,$$
$$a x_n x_{n+t} - y_n y_{n+t} = -y_t.$$

Sn.

F. Villicus. Ueber ganzzahlige Verhältnisgruppen in der Alligationsrechnung. Z. f. Realsch. VII. 213-221.

Nachweis, dass die Aufgaben der Mischungsrechnung mit Vorteil auf die Lösung einfacher diophantischer Gleichungen zurückzuführen seien. Gr.

J. Hermes. Gleichungen ersten und zweiten Grades schematisch aufgelöst in ganzen Zahlen. Leipzig. Teubner.

Eine Zusammenstellung der Regeln, welche zur kürzesten Berechnung der Lösungen von diophantischen Gleichungen ersten und zweiten Grades erforderlich sind. Die Beweise sind in einem Anhange nur angedeutet; als Zweck der Arbeit erscheint die wirkliche Ausführung der Rechnungen, welche denn auch durch zahlreiche Beispiele illustrirt ist. Den Rechnungen ist die Kettendivision durchgängig zu Grunde gelegt. Die Gleichungen ersten Grades finden durch die Aufsuchung der Näherungswerte eines Kettenbruchs in bekannter Weise ihre Erledigung, während denen des zweiten Grades zunächst drei Specialfälle:

$$Bxy + Cx + Dy + F = 0,$$
$$x^2 \pm Py + R = 0\,,$$
$$ax^2 + 2bxy + a_1 y^2 = P$$

vorangeschickt werden. Die Analyse ist mit besonderem Augenmerk auf die Erschöpfung aller erdenklichen Fälle durchgeführt; im Laufe derselben finden sich speciell sieben Fälle hervorgehoben, in welchen die allgemeine diophantische Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

keine oder nur triviale Lösungen erlaubt. Sn

Pepin. Sur le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné. Brux. S. Sc. VI. B. 86-100.

Verallgemeinerung der Sätze von Jonquières (Nouv. Ann. (2) XVII. 374, siehe F. d. M. X. 1878. p. 145). Zur Charakterisirung mögen zwei Beispiele angeführt werden: I. Die Lösung der Gleichung $x^3 + a = y^2$ in ganzen Zahlen ist unmöglich, wenn $a = c^3 - 4^\alpha b^2$, wo b und c zwei ungrade, positive oder negative, Zahlen bezeichnen, von denen die erste keinen Teiler von der Form

$$8l+1,\ 8l+3,\ 8l+7 \text{ für } \alpha = 1,$$

von der Form

$$8l+3,\ 8l+5,\ 8l+7 \text{ für } \alpha > 1$$

hat. II. Wenn 6 relativ prim zu 10 ist, und keinen Factor von der Form $20l+11$ enthält, und wenn $a = 32(2d+1)^5 - 5b^2$ ist, so giebt es für $x^5 + a = y^2$ keine Lösung in ganzen Zahlen.

Mn. (O.).

S. Günther. Ueber einen Specialfall der Pell'schen Gleichung. Bair. Bl. XVII. 19-24.

Theon Smyrnaeus ist, wie aus seinem mathematischen Commentar zu Platon's Werken erhellt, mit folgenden Relationen vertraut:

$$2.1^2 - 1 = 1^2,\quad 2.5^2 - 1 = 7^2,$$
$$2.29^2 - 1 = 41^2,\quad 2.169^2 - 1 = 239^2, \ldots;$$

man muss also annehmen, dass er die Pell'sche Gleichung

$$2x^2 - 1 = y^2$$

zu lösen verstanden habe. Es erhebt sich die Frage, wie er dazu gekommen sei, und als ein Weg, der ihn möglicherweise zu seinen Resultaten führen konnte, sich auch vollständig innerhalb der der unbestimmten Analytik des Altertums gezogenen Grenzen hält, mag der folgende gelten. Aus

$$x+1 = \frac{p}{q}(y+x), \quad x-1 = \frac{q}{p}(y-x)$$

folgt, wenn $p^2+2pq-q^2 = z^2$ gesetzt wird,

$$x = \frac{4q^2+z\mp 2q\sqrt{2q^2+z}}{z}, \quad y = \frac{-4q^2-z\pm 4q\sqrt{2q^2+z}}{z}.$$

Sobald nun für $z = 1$ irgend eine Zahl q bekannt ist, für welche $2q^2+z$ ein vollkommenes Quadrat wird, liefert diese Lösung eine unendliche Anzahl ganzzahliger Werte für x und y. Ebenso wird die Auflösung der allgemeineren Gleichung

$$(a^2+b^2)x^2-1 = y^2$$

durchgeführt. Diese elementare Methode ähnelt derjenigen, deren sich nach Paul Tannery's Ansicht Archimedes bei der Behandlung der Gleichungen

$$3x^2\mp 1 = y^2$$

bedient haben soll. Gr.

S. Realis. Solution d'une question (58). Math. II. 64-67.

Lösung der Gleichung

$$X^2+Y^2+Z^2 = K(x^2+y^2+z^2), \qquad K=7, 19, 67, \ldots$$

in ganzen Zahlen. Mn.

Th. Pepin. Nouveaux théorèmes sur l'équation indéterminée $ax^4+by^4 = z^2$. C. R. XCIV. 122-124.

Eine Fülle neuer Fälle wird mitgeteilt, in welchen die obige diophantische Gleichung unlöslich sein soll.

Sn.

A. N. Korkin. Ueber die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n+y^n+z^n = 0$ durch ganze Functionen zu genügen. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch).

Von der im Titel bezeichneten Unmöglichkeit wird hier ein Beweis gegeben. Ty.

A. Cayley. Note on the standart solutions of a system of linear equations. Quart. J. XIX. 38-41.

„Normallösungen“ für ein System von linearen homogenen Gleichungen, deren Anzahl geringer ist als die der Unbekannten, construirt Herr Cayley folgendermassen: Den Unbekannten wird eine Reihenfolge gegeben x_1, x_2, $x_3, \ldots$; als erste Lösung gilt diejenige, bei der möglichst viele der ersten auf einander folgenden x gleich 0 sind, während die nächste Unbekannte gleich 1 gesetzt wird; etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0; \; x_7 = 1, \ldots.$$

Als zweite Lösung gilt die, bei welcher $x_7 = 0$ ist, möglichst viele der ersten auf einander folgenden x gleich 0 werden, und das erste nicht verschwindende gleich 1 ist, also etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0; \; x_5 = 1, \; x_6 = \xi_6, \; x_7 = 1, \ldots.$$

Für die nächste Lösung wird $x_5 = 0$, $x_7 = 0$ gefordert; ausserdem sollen möglichst viele der ersten auf einander folgenden x gleich 0, und das erste nicht verschwindende gleich 1 sein, also etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0; \; x_4 = 1, \; x_5 = 0, \; x_6 = \xi'_6, \; x_7 = 0, \ldots$$

u. s. w. Aus diesen Lösungen lässt sich jede Lösung des Systems zusammensetzen. Es wird eine Anwendung auf die Berechnung einer Semiinvariante gegeben. No.

H. Scheffler. Die magischen Figuren. Allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Altertume stammenden Problemes. Leipzig. Teubner.

Die geschichtliche Einleitung zu dieser Schrift ist, da der Verfasser nur das Klügel'sche Wörterbuch zur Richtschnur ge-

nommen und von späteren Bearbeitungen des Problems keine Notiz genommen zu haben scheint, etwas mager ausgefallen; so würde wohl auch die Behauptung (S. 5), dass man bisher das „vollkommene" magische Quadrat (bei welchem nicht nur

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{k,i} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

einander gleich, sondern auch

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{k,i+k-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,k+i-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

den nämlichen Wert haben sollen, wie die beiden ersterwähnten Summen) viel zu wenig gewürdigt habe, kaum aufgestellt worden sein, wenn der vorhandenen Literatur etwas mehr Beachtung geschenkt worden wäre. Hat doch schon der Byzantiner Moschopulos, um diesen allgemeinen Diagonalreihen gerecht zu werden, den zuerst bei ihm vorkommenden Begriff des cyklischen Aneinanderreihens aufgestellt. Diese Bemerkungen beabsichtigen jedoch in keiner Weise, die Verdienstlichkeit dieser umfassenden und geistvollen Neubearbeitung einer altehrwürdigen Aufgabe zu schmälern, vielmehr behalten die Methoden des Verfassers, wennschon sie stellenweise mit den von Hugel, Frost u. A. angewandten übereinstimmen, ihren vollen und selbständigen Wert. Eine Eigentümlichkeit der Schrift ist es, dass die Regeln zur Construction der magischen Figuren für sich vorgetragen sind, während die Beweise in einem besonderen Anhang vereinigt werden. Zur Darstellung der Zauberquadrate mit ungrader Zellenzahl n^2 dient die folgende elegante Vorschrift: Man wähle vier willkürliche ganze Zahlen a, b, a', b' von der Beschaffenheit, dass jede von ihnen, sowie jede der fünf Verbindungen $ab' - a'b$, $a + a'$, $b + b'$, $a - a'$, $b - b'$ relativ prim zu n (event. auch $= 1$) sei, und bilde aus denselben die nachstehenden Werte:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1+0.a' & +0.b'n \\ 1+1.a' & +1.b'n \\ 1+2.a' & +2.b'n \\ \text{etc. bis zu} & \\ 1+(n-1).a' & +(n-1).b'n, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} 1+(a+0.a') & +(b+0.b')n \\ 1+(a+1.a') & +(b+1.b')n \\ 1+(a+2.a') & +(b+2.b')n \\ \text{etc. bis zu} & \\ 1+(a+(n-1)a') & +(b+(n-1)b')n, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 1+(2a+0.a') & +(2b+0.b')n & \ldots \\ 1+(2a+1.a') & +(2b+1.b')n & \ldots \\ 1+(2a+2.a') & +(2b+2.b')n & \ldots \\ \text{etc. bis zu} & & \\ 1+(2a+(n-1)a') & +(2b+(n-1)b')n\ldots, & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1+((n-1)a+0.a') & +((n-1)b+0.b')n \\ 1+((n-1)a+1.a') & +((n-1)b+1.b')n \\ 1+((n-1)a+2.a') & +((n-1)b+2.b')n \\ \text{etc. bis zu} & \\ 1+((n-1)a+(n-1)a')+((n-1)b+(n-1)b')n. & \end{array}\right.$$

Jede dieser Zahlen ist ein Trinom von der Form $(1+c+dn)$. Statt der Coefficienten c und d nehme man nun deren kleinste positive Reste nach n, und zwar mit Einrechnung von 0, aber mit Ausschluss von n; dann lassen sich die so erhaltenen Zahlen sofort in ein magisches Quadrat von n^2 Zellen einordnen. Diese Lösung umschliesst, wie ersichtlich, alle möglichen Lösungen aus früherer Zeit, und es ist deshalb nicht zu verwundern, dass mehrere ältere Regeln als Corollare aus der Scheffler'schen hervorgehen. Wenn n dagegen eine grade Zahl ist, so können die fünf Zahlen a, b, a', b', $ab'-a'b$ nicht mehr sämmtlich mit n teilerfremd sein, und damit ist in diesem Falle die Anwendbarkeit der bisher massgebend gewesenen Sätze ausgeschlossen. Deshalb füllt der Verfasser jetzt das Quadrat mit diagonalen Doppelzügen aus, welche er „Kreuze“ nennt, und begründet auf diese ein halb und halb geometrisches, aber ebenfalls völlig allgemeines Verfahren. Diese Kreuze geben Veranlassung zur Bildung gewisser Specialfiguren, der „Zwillinge“, „Drillinge“, „Vierlinge“. Weiter erhalten wir eine Auflösung durch Coordinaten, welche sich aber wesentlich mit der Hugel'schen Methode deckt; man bildet zuerst eine „magische Coordinatentafel“ und eine „Ortstafel“ und setzt aus diesen beiden nachher das gewünschte Quadrat zusammen. Nachdem sodann noch die bereits von Michael Stifel behandelte Aufgabe erörtert ist, ein gegebenes Quadrat so zu „rändern“, dass auch dem neuen grösseren Quadrate die Eigenschaft, ein magisches zu sein, gewahrt bleibt, wendet sich der Verfasser zur

Construction magischer Polygone und betritt damit ein Gebiet, welches vor ihm noch gar nicht bebaut war; nur das mit wenigen Worten abgemachte magische Rechteck hatte sich vorher schon Harmuth zum Studienobjecte ersehen. Man denke sich ein regelmässiges Vieleck, umgeben von einer Reihe anderer Vielecke von gleicher Seitenzahl und in ähnlicher Lage; dann soll eine gewisse Menge ganzer Zahlen so auf den Umfängen dieser Vielecke verteilt werden, dass stets die nämliche Summe herauskommt, man mag von jeder beliebigen Seite die darauf stehenden Zahlen zusammen addiren. Nachfolgend sehen wir ein magisches Dreieck und ein magisches Fünfeck vor uns.

26. 3. 6. 10. 24. 27.
18. 20. 9. 11. 21. 2.
22. 15. 16. 17. 8. 5.
4. 7. 12. 13. 23.
1. 19. 14.
25.

1.
28. 26.
10. 15. 11.
25. 18. 17. 27.
4. 12. 6. 13. 3.
29. 19. 21. 22.
9. 14. 20. 11. 7.
24. 31.
2. 30. 8. 23. 5.

Für das Dreieck liefert Umlauf I.:

$$26+3+6+10+24+27 = 27+2+5+23+14+25$$
$$= 25+1+4+22+18+29 = 96,$$

Umlauf II.:

$$20+9+11+21 = 21+8+13+19 = 19+7+15+20 = 61.$$

Für das Fünfeck liefert Umlauf I.:

$$1+28+10+25+4 = 4+29+9+24+2 = 2+30+8+23+5$$
$$= 5+31+7+22+3 = 3+27+11+26+1 = 68,$$

Umlauf II.:

$$15+18+12 = 12+19+14 = 14+20+11 = 11+21+13$$
$$= 13+17+15 = 45.$$

Diese Untersuchungen über magische Vielecke bilden unstreitig ein neues und schönes Capitel der angewandten Zahlentheorie. Endlich kommt noch der vollkommene magische Würfel an die Reihe; die Methoden, welche zu dessen Construction angewendet

werden, bestehen durchweg in Verallgemeinerungen derjenigen, welche sich bereits in der Ebene bewährten; ja es würde offenbar möglich sein, ohne Veränderung des Grundgedankens die Lösung auch auf ein Gitter von beliebig vielen Dimensionen auszudehnen. In dieser Consequenz liegt einer der Hauptvorzüge der Scheffler'schen Theorie.

Anhangsweise zeigt der Verfasser, dass die gewöhnlich nur als eine etwas abstruse Verstandesübung aufgefasste Lehre vom magischen Quadrat in der Combinatorik nicht selten eine zweckmässige Verwendung findet. Da ferner jedes Element eines solchen Quadrates als eine Summe von der Form $(x+y)$ betrachtet wird, so liegt es nahe, zu untersuchen, ob nicht auch die Substitution $(x+yi)$ sich mit Erfolg durchführen liesse. Es ist damit für die bekannte graphische Darstellung der complexen Zahlen die Möglichkeit gegeben, ihren ohnehin schon so reichen Wirkungskreis noch mehr zu erweitern. Gr.

Th. Harmuth. Ueber polydimensionale Zahlenfiguren. Hoppe Arch. LXIX. 90-108

Der Herr Verfasser dehnt seine früheren Untersuchungen über magische Rechtecke und Parallelepipeda nunmehr auch auf den Raum von mehr als drei Dimensionen aus. (Vgl. F. d. M. XII. 1881. 145, 146.) Sn.

Beweise weiterer Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Zahlentheorie von Moret-Blanc, Lionnet, S. Marks, T. Muir, H. L. Orchard, E. Rutter, G. Heppel, G. Eastwood, Morth, G. F. Walker, K. Gale, W. A. Whitworth, Sylvester, W. J. C. Sharp, C. Bickerdike, W. B. Grove, B. Easton, E. Buck, W. W. Taylor finden sich Nouv. Ann. (3) I. 475-476, 476-478; Ed. Times XXXVI. 24-25, 42-43, 48, 66-67, 97-98, 117-118; XXXVII. 24-25, 27, 44, 55-56, 101-102.

Capitel 2.
Theorie der Formen.

POINCARÉ. Sur une extension de la notion arithmétique de genre. C. R. XCIV. 67-69, 124-127.

Die Gauss'sche Einteilung der binären quadratischen Formen nach Ordnungen und Geschlechtern, die dann von Eisenstein auf die quadratischen ternären Formen übertragen wurde, wird hier auf beliebig hohe Formen mit beliebig vielen Variabeln ausgedehnt mittels der beiden Definitionen:

„Zwei algebraisch äquivalente Formen gehören derselben Ordnung an, wenn für beide der grösste gemeinsame Teiler ihrer Coefficienten der gleiche ist, und das Nämliche auch statt hat für die Coefficienten ihrer sämmtlichen invariantiven Bildungen, gleichgültig ob alle diese Formen mit oder ohne Polynomialcoefficienten geschrieben werden."

„Zwei solche Formen gehören demselben Geschlecht an, wenn sie „nach irgend einem Modul äquivalent" sind, d. h. wenn es eine ganzzahlige lineare Substitution der Variabeln giebt, deren Determinante in Bezug auf jenen Modul congruent Eins ist, und welche beide Formen, abgesehen von jenem Modul in einander überführt". Als erstes Ordnungs-Beispiel dienen die quadratischen Formen mit n Variabeln. Es werden drei „Ordnungscharactere" aufgestellt, die sich alle auf die Determinante Δ der Form stützen, von denen z. B. der erste aus den grössten gemeinsamen Teilern aller Unterdeterminanten (von Δ) derselben Ordnung besteht. Damit dann zwei gegebene Formen von derselben Ordnung seien, ist es notwendig und hinreichend, dass zwei der Charactere für beide Formen dieselben sind.

Zweitens werden die cubischen binären Formen in Ordnungen eingeteilt. Hier giebt es einen einzigen Ordnungscharacter, bestehend aus dem grössten gemeinsamen Teiler der Coefficienten der Form, sowie ihrer Hesse'schen, einmal mit, einmal ohne

Binomial-Coefficienten geschrieben, also im Ganzen aus vier Zahlen.

Als erstes Beispiel für die Geschlechtsdefinition werden wiederum die quadratischen Formen mit n Variabeln untersucht. Weiss man von zwei solchen Formen nur, dass sie derselben Ordnung angehören und die gleiche Determinante Δ besitzen, so müssen sie, um auch demselben Geschlecht anzugehören, nach irgend einer Potenz der ungraden Primfactoren von Δ, sowie nach irgend einer Potenz der Zahl Zwei äquivalent sein. Für das Erstere werden die Bedingungen allgemein angegeben, für das Letztere beschränkt sich der Verfasser auf ein Beispiel.

Als letztes Beispiel dienen wieder die cubischen binären Formen, von denen vorläufig mitgeteilt wird, wie sie sich in Geschlechter bezüglich der Moduln 2, 3 und 5 verteilen. Die Wichtigkeit dieser Ausdehnungen braucht wohl kaum bemerkt zu werden. My.

G. Battaglini e F. Brioschi. Relazione sulla memoria del Prof. R. de Paolis: „Sulla espressione di una forma binaria di grado n con una somma di potenze n^{e}“. Rom., Acc. L. (3) VI. 165.

Die Besprechung wird nach dem Erscheinen der Arbeit selbst erfolgen. O.

Hermes. Ein Algorithmus zur Behandlung quadratischer Formen. Hoppe Arch. LXVIII. 432-439.

Geht die binäre Form (a_{n-1}, b_{n-1}, a_n) in bekannter Weise durch die Aequivalentsubstitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ in die benachbarte (a_n, b_n, a_{n+1}) über, so kann man den dritten Coefficienten a_{n+1} entweder mit Hülfe der Determinante D der ursprünglichen Form durch $\frac{b_n^2-D}{a_n}$ oder mit Benutzung der Substitutionscoefficienten

durch

$$a_{n-1} + 2b_{n-1}\delta_n + a_n \delta_n^2$$

darstellen. Dies letztere kann man auch schreiben:

$$a_{n+1} = a_{n-1} - \delta_n r_n,$$

wo

$$r_n = 2m_n - a_n\delta_n, \quad m_n = -b_{n-1}.$$

Es kann also r_n als Rest einer Division aufgefasst werden, bei welcher a_m der Divisor und δ_n der Quotient ist, der ja bekanntlich den Wert $\delta_n = \frac{b_{n-1} - b_n}{a_n}$ besitzt.

Darauf gründet sich ein von numerischen Ausrechnungen begleiteter Algorithmus, der hier eine ähnliche Rolle spielt, wie die Kettendivision bei den linearen diophantischen Gleichungen.

My.

H. Weber. Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. Klein Ann. XX. 301-330.

Wie der Herr Verfasser einleitend bemerkt, hat Dirichlet seine Methoden zum Beweise des Satzes, dass jede arithmetische Reihe unendlich viele Primzahlen enthält, auf quadratische Formen mit regulärer negativer Determinante angewandt. Hier werden nun jene Methoden auf quadratische Formen ohne jede Einschränkung ausgedehnt und der Beweis in übersichtlichem Zusammenhange vollständig dargestellt. Die h Classen von eigentlich primitiven quadratischen Formen einer bestimmten nicht quadratischen Determinante D werden, im Hinblick auf die von Gauss gegebenen Gesetze der Composition, als Elemente einer Abel'schen Gruppe vom Grade h betrachtet; die Hülfssätze über Gruppen (und Charaktere) finden sich in einem besonderen, vorangeschickten Paragraphen. Den „Kern des Beweises" bildet, wie bei den entsprechenden Untersuchungen Dirichlet's, nur dass grade dieser Punkt früher nie völlig erledigt wurde, der Nachweis, dass gewisse Reihen für ein gegebenes Argument einen bestimmten Grenzwert haben sollen; speciell, es sollen die Summen:

$$\Sigma(ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho} - \frac{g}{\varrho},$$

$$\Sigma \frac{l(ax^2+2bxy+cy^2)}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ und irgend ein endliches g endliche Grenzwerte haben. Falls b^2-ac negativ ist, müssen x, y alle positiven und negativen ganzen Zahlen mit Ausnahme der Wertcombination 0, 0 durchlaufen, während für ein positives b^2-ac die Variabeln x, y alle ganzzahligen Werte annehmen, welche den Bedingungen genügen:

$$y \geqq 0, \quad x > \gamma y,$$

wo $\gamma > \beta > \alpha$, wenn α, β die reellen Wurzeln der Gleichung

$$ax^2+2bx+c = 0$$

sind; $a>0$. Die Erledigung dieses Hauptpunktes geschieht durch Anwendung von zweifach unendlichen Thetareihen, gemäss einer Angabe des Herrn Dedekind; und zwar fand sich die anzuwendende Formel für den Fall negativer Determinanten bereits bei Rosenhain, während für positive eine analoge erst noch zu entwickeln war. In einem Schlussparagraphen werden die Formen zweiter Art und die quadratischen Determinanten einfach erledigt.

Sn.

Th. Pepin. Sur la classification des formes quadratiques binaires. Rom., Acc. P. d. N. L. XXXIII. 1881. 354-391.

Beziehungen der Classenzahl für eigentlich primitive und derivirte Formen. Lehrsätze über irreguläre Determinanten; z. B.: ist D eine solche, und ist p ihr Irregularitätsexponent, so ist auch Dm^2 irregulär und der Irregularitätsexponent durch p teilbar. Der Herr Verfasser erledigt einen Zweifel von Gauss, (D. A. art. 306. VIII.), ob es Determinanten unter -10000 gebe, deren Irregularitätsexponent grösser als 3 sei, durch den Nachweis, es habe $-6075 = -243.25$ den Irregularitätsexponenten 9. Auch giebt er Methoden, um Determinanten mit vorgeschriebenen Irregularitätsexponenten zu bilden.

Sn.

A. BERGER. Sur une application des nombres des classes des formes quadratiques binaires pour un déterminant négatif. Upsala, Berling.

Der Verfasser legt seiner Untersuchung den Ausdruck

$$S_m = \sum_{k=1}^{k=p} U_{m+4(k-1)p}$$

zu Grunde, wo $U_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}$ ist (unter $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl verstanden), dem er nach mannigfaltigen Umformungen die Gestalt giebt:

$$S_m = -\frac{1}{2} - \frac{p}{2}(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 2\left[\frac{m}{4p} - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4}\right]$$
$$+4\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\left\{\left[\frac{m}{4p}-\frac{k^2}{p}\right]-\left[\frac{m}{4p}-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4}-\frac{k^2}{p}\right]\right\}.$$

p ist eine positive, ungrade Primzahl.

Hier wird die Grösse $\frac{k^2}{p}$ gemäss der Gleichung umgewandelt:

$$\frac{k^2}{p} = \left[\frac{k^2}{p}\right] + \frac{r_k}{p},$$

wo

$$k^2 \equiv r_k \pmod{p}.$$

Führt man noch das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{k}{p}\right)$ ein, so gelangt man zu der bemerkenswerten, mit dem Ausdruck für S_m zu combinirenden Hülfsgleichung

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\left\{\left[\frac{\beta-r_k}{p}\right]-\left[\frac{\alpha-r_k}{p}\right]\right\} = \frac{[\beta]-[\alpha]}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k>\alpha}^{k\leqq\beta}\left(\frac{k}{p}\right),$$

wo

$$0 \leqq \alpha < \beta < p.$$

Es werden vier Fälle unterschieden:

$p \equiv 1 \pmod{4}$ I. $0 \leqq m < p$, II. $p \leqq m \leqq 4p-1$,
$p \equiv 3 \pmod{4}$ III. $0 \leqq m < 3p$, IV. $3p \leqq m \leqq 4p-1$.

Für den ersten z. B. erhält dann S_m die elegante Darstellung

$$S_m = +1+2 \sum_{k > \frac{m-p}{4}}^{k \leq \frac{m}{4}} \left(\frac{k}{p}\right).$$

und ähnlich in den drei anderen Fällen.

Die Grössen S lassen sich nun ganz und linear durch K_1 und K_2 ausdrücken, d. h. durch die Classenzahlen der quadratischen primitiven Formen erster Art von der Determinante $-p$, resp. $-2p$. So z. B. erhält man für $p \equiv 1 \pmod{8}$

$$S_0 = 1+K_1,\ S_p = -1+K_1,\ S_{2p} = -1-K_1,\ S_{3p} = -1-K_1,$$
$$S_{\frac{p-1}{2}} = 1+K_1+K_2,\ S_{\frac{3p-1}{2}} = -1-K_1,\ S_{\frac{5p-1}{2}} = -1+K_1+K_2,$$
$$S_{\frac{7p-1}{2}} = -1-K_1.$$

Diese Formeln gestatten folgende Anwendung:

Bezeichnet man mit $Q(x)$ die grösste ganze in x enthaltene Quadratzahl, so lässt sich der ursprüngliche Wert für S_m leicht auch so schreiben:

$$S_m = \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{Q[4(K-1)p+m]}.$$

Dann ist z. B. in den eben angeführten Formeln folgender Satz enthalten:

„Unter den p Quadratzahlen

$$Q(0)\ Q(4p)\ Q(8p) \ldots Q[4(p-1)p]$$

giebt es

$$\frac{p+1+K_1}{2},\ \frac{p+1}{2},\ \frac{p+1+K_1}{2},\ \frac{p+1-2K_1}{2}$$

grade Zahlen, je nachdem

$$p \equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7 \pmod{8}.\text{“}$$

Aus der Eigenschaft von K_1 und K_2, wesentlich positiv zu sein, erhalten diese Sätze noch nähere Bestimmungen, deren rein arithmetischer Beweis schwer sein dürfte.

Zum Schluss folgt noch eine Tabelle mit den Zahlen K_1, K_2 für Primzahlen unter 100. My.

H. L. CHARVE. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. Ann. d. l'Éc. Norm. (2) XI. 119-135.

Es wird auf diese Formen die Methode ausgedehnt, die Selling für die Reduction der ternären positiven Formen aufgestellt hat.

Durch eine ganzzahlige Substitution von der Determinante ± 1 gehe die gegebene Form f über in eine äquivalente F. Man führe dann in f eine fünfte Variable u ein, indem man x, y, z, t ersetzt durch $x-u$, $y-u$, $z-u$, $t-u$ und analog in F die neuen Variabeln X, Y, Z, T durch $X-U$, $Y-U$, $Z-U$, $T-U$. So gelangt man zu zwei Formen φ, Φ, die man so schreiben kann, dass sie sich aus den (zehn) Quadraten der Differenzen der fünf Variabeln linear zusammensetzen, uud die für $u=0$, resp. $U=0$ wieder rückwärts in f, resp. F übergehen. Die Substitution, die dann φ in Φ überführt, ist leicht angebbar: ist ihre Determinante gleich ± 1, so sind φ und Φ äquivalent.

Die Aufgabe ist nun, diese neue Form φ mit fünf Variabeln auf ihre reducirte Form zu bringen. Nennt man die Coefficienten succ. a, b, c, ..., l, so heisst die Form eine reducirte, wenn irgend eine der drei (gleichwertigen) Bedingungen erfüllt ist:

1) Alle Coefficienten sind positiv;

2) a ist allein negativ und dem absoluten Werte nach kleiner, als b, c, d, e, f, g;

3) a und h sind allein negativ: daher ist a, absolut genommen, kleiner als b, c, d, e, f, g; und h absolut kleiner als b, c, e, f, k, l; endlich ist noch der absolute Wert von $a+h$ kleiner als b, c, e, f.

Es giebt immer nur eine zu φ äquivalente Form, die eine dieser Bedingungen und damit alle erfüllt. (Dabei sind aber die zwischen den Variabeln möglichen Permutationen ausser Acht gelassen.) Die erforderliche Substitution setzt sich aus folgenden zwei einfachen Substitutionen zusammen:

$$x = T-Z,\quad x = Y-X,$$
$$y = X-U,\quad y = U-T,$$
$$z = Y-U,\quad z = U-Z,$$
$$t = T-U,\quad t = Y-T,$$
$$u = 0,\quad u = 0.$$

My.

E. W. Symons, J. O'Regan, R. Tucker, A. Martin. Solutions of a question (6688). Ed. Times XXXVI. 56.

Sind a, b, c drei solche Grössen, dass die Summe zweier immer grösser als die dritte ist, und sind x, y, z drei Grössen, deren Summe positiv ist, so ist x, y, z negativ, wenn

$$a^2x^{-1}+b^2y^{-1}+c^2z^{-1} = 0.$$

O.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

G. B. MARSANO. Sul numero delle combinazioni a tre a tre dei successsivi intieri 1, 2, 3,..., *B*, aventi ciascuna una somma non maggiore di C. Altra nota. Batt. G. XX. 249-269.

Die vorhergehende Note, auf welche die gegenwärtige Bezug nimmt, ist zu finden l. c. XIX. 156. (s. F. d. M. XIII. 1881. 150.). Die daselbst gestellte und gelöste Aufgabe nahm die Anzahl der aus der Reihe 1, 2, ..., *B* gewählten Elemente beliebig. Sie wird jetzt auf 3 beschränkt, und die Aufgabe direct durch Discussion gelöst. Es ergiebt sich eine Tabelle über die Bestandteile der gesuchten Zahl, welche viele Fälle unterscheidet.

H.

J. BOURGET. Sur les permutations de *n* objets et sur leur classement. C. R. XCV. 508-511.

Der Verfasser stellt folgendes neue Successionsgesetz der Permutirung von *n* Elementen 1, 2, 3, ..., *n* auf. Man permutire cyklisch $n-1$, n; jedes der zwei Glieder des Cyklus stelle man hinter $n-2$ und permutire die drei Elemente cyklisch; jedes der sechs Glieder dieses Cyklus stelle man hinter $n-3$ und permutire die vier Elemente cyklisch, u. s. w. Die schliessliche cyklische

Permutation von 1 und jeder der $(n-1)!$ vorher erhaltenen Permutationen ergiebt sämmtliche $n!$ Permutationen in der gedachten Reihenfolge. Die Aufgabe nun, die ϱ^{te} Permutation bei dieser Anordnung anzugeben, führt auf folgenden Algorithmus, für welchen der Beweis nicht mitgeteilt ist. Man dividire ϱ durch n und notire den Quotienten Q_n und den Rest R_n; man dividire Q_n+1 durch $n-1$ und notire den Quotienten Q_{n-1} und den Rest R_{n-1}; man dividire $Q_{n-1}+1$ durch $n-2$ und notire Quotienten und Rest, u. s. f., bis man die Reihe der Reste $R_1, R_2, \ldots, R_n$ bestimmt hat. Die gesuchte ϱ^{te} Permutation laute $a_1\, a_2 \ldots a_n$. Dann findet man a_k durch Addition der Reste in der bestimmten Folge

$$a_k = R_{n-k+1} + R_{n-k+2} + \cdots + R_n,$$

wenn man h so oft von der bis dahin erhaltenen Summe subtrahirt, als

$$R_{n-k+1} + \cdots R_n > h$$

wird. H.

J. Bourget. Sur un problème de permutations successives nommé battement de Monge. Résal J. (3) VIII. 413-434.

Die Permutation, welche die Elemente

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots n, \quad n+1, \ldots 2n-1, \quad 2n$$

in

$$2n, \; 2n-2, \; 2n-4, \ldots 2, \quad 1, \ldots 2n-3, \; 2n-1$$

überführt, heisst Battement de Monge. Nach einer gewissen Anzahl von Wiederholungen derselben, welche jedem Werte von n zukommt, kehrt stets dieselbe Ordnung wieder. Ein solches System wiederholter Battements de Monge bis zum Schluss der Periode hat mancherlei Eigenschaften, welche hier entwickelt werden. Diese sind untersucht worden von Bachet, Monge, Bouniakowski, Bellavitis und Thomas de Saint-Laurent. Der Letztgenannte hat dabei Fehler begangen. Die einfacheren unter den Eigenschaften sind folgende: Stellt man die Reihen eines Systems über einander, so steht unter jedem Elemente in allen Reihen dasselbe Element. Die Columnen (Verticalreihen) sind

also cyklische Permutationen von einander, soweit sie irgend ein Element gemein haben. In manchen Columnen zerfällt der Cyklus in mehrere Teilcyklen. In jeder Columne, von der Wiederkehr an nach oben gelesen, zeigt das k^{te} Element, welches h laute, an, dass das erste Element in der k^{ten} Reihe die h^{te} Stelle einnimmt. Es wird untersucht, in welchem Falle ein Element beständig seine Stelle behält; hier muss $n = 3p-1$ sein. Ferner der Fall, wo zwei Elemente wechseln. Ferner das Minimum der Periodenlänge. Die Längen der einzelnen Cyklen sind Teiler des Cyklus, welcher das Element 1 enthält. Ein unveränderliches Element hat zweimal soviel Elemente hinter sich als vor sich. H.

SANAT. Ueber Permutationen der Zahlen des dekadischen Systemes. Pr. Drohobycz. Galizien. (Polnisch). I. Teil.

Es sei

$$N = a_n . 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 . 10^2 + a_1 . 10 + a_0$$
$$+ b_1 . 10^{-1} + b_2 . 10^{-2} + \cdots + b_m . 10^{-m};$$

n und m beliebige ganze Zahlen, a und b ganze Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, 3,..., 9. Permutirt man auf verschiedene Weisen die Coefficienten a und b, so erhält man verschiedene Zahlen P. Berechnung der Anzahl aller Zahlen, die nach 2, 3,... μ-maliger Vertauschung der Ziffern entstehen, und Bestimmung der Differenz zwischen der gegebenen und jeder der neu entstandenen Zahlen ist das Ziel dieser Arbeit. Dn.

G. HEPPEL. Solution of two questions (6502, 6589). Ed. Times XXXVI. 57-62.

In

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

stellen die Buchstaben 16 Zahlen einer arithmetischen Reihen dar, für welche die Summe des Anfangs- und Endgliedes s ist. Sie

sind so geordnet, dass $2s$ die Summe von jeder der 24 Gruppen *abcd*, ... *aeim*, ... *afkq*, ... etc. ist. Es wird die Anzahl der Gruppirungen bestimmt, die diesen Bedingungen genügen.

O.

C. F. Malmsten. Generalisering af det s. k. „Femtonspelet" (Boss Puzzle'spel). Göteborg. Handl. 1882. 75-105.

Der Verfasser behandelt hier mathematisch eine Verallgemeinerung des bekannten „Fünfzehn-Spiels", welche man erhält, wenn man mit n^2-1 statt mit 15 Zahlen operirt; er zerteilt die möglichen Fälle in zwei Classen, „0-Gruppen" und „1-Gruppen", und zeigt, dass eine Gruppe der ersten Classe nimeals in eine der zweiten transformirt, dass aber eine beliebige Gruppe immer in eine beliebige Gruppe derselben Classe verwandelt werden kann, und dass es also in jedem Falle möglich sei, anzugeben, ob eine Lösung des Spiels zu finden oder nicht zu finden ist. Schliesslich deutet der Verfasser an, dass eine noch weitere Verallgemeinerung möglich sei, indem seine Sätze auch für $n.m-1$ Zahlen gelten.

E.

H. M. Taylor und R. C. Rowe. Note on a geometrical theorem. Lond. M. S., Proc. XIII. 102-106.

Die Arbeit ist eine Erweiterung der von Euler, J. A. de Segner, Lamé, O. Rodrigues, M. J. Binet und E. Catalan behandelten Aufgabe: Auf wie viele Arten lässt sich ein Vieleck durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in Dreiecke zerlegen? Voraus gehen historische und literarische Notizen. Die Lösung des Urproblems lautet:

$$P_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!},$$

wo $n+2$ die Seitenzahl, P_n die gesuchte Zahl ist. Der Verfasser setzt nun statt der Dreiecke allgemein p-Ecke und fragt nach der Anzahl P_n der Zerlegungen des $[(p-2)n+2]$-Ecks in

solche durch Diagonalen, die sich nicht schneiden. Er findet die Relation

$$P_n = \Sigma P_a P_b P_c \ldots,$$

wo a, b, c, ... die möglichen ganzen Zahlen einschliesslich 0, für welche

$$a+b+c+\cdots = n-1,$$

und deren Anzahl stets $= p-1$ ist, bedeuten. Setzt man nun

$$f(x) = 1+P_1 x+P_2 x^2+\cdots,$$

so findet man bei obiger Relation:

$$f(x) = 1+xf(x)^{p-1}.$$

Entwickelt man f in die Lagrange'sche Reihe nach Potenzen von x, so ergiebt die Coefficientenvergleichung:

$$P_n = \frac{[(p-1)n]!}{n![(p-2)n+1]!}$$

als Lösung der allgemeinen Aufgabe. H.

LAISANT. Remarques sur la théorie des régions et des aspects. S. M. F. Bull. X. 52-55.

Zieht man durch je zwei unter n beliebigen Punkten in der Ebene unbegrenzte Gerade, so wird die Ebene in ϱ Regionen geteilt. Unter diesen sind

$$\varrho_l = \frac{1}{8}(n-1)\ (n-2)\ (n^2-3n+4)$$

begrenzt, und

$$\varrho_i = n(n-1)$$

nicht begrenzt. Von allen Punkten einer Region gesehen erscheinen die n Punkte in derselben Reihenfolge. Daher ist ϱ eine obere Grenze der möglichen verschiedenen Aspecte. Die Zahl der Aspecte hängt nicht bloss von n, sondern auch von der Lage der n Punkte ab. Ihre Bestimmung ist eine schwierige Aufgabe, die hier nicht in Angriff genommen wird.

H.

Perrin. Sur le problème des aspects. S. M. F. Bull. X. 103-127.

Das Problem der Aspecte, zuerst formulirt von Halphén, ausser ihm von Laisant in Angriff genommen, stellt die Frage, in wie vielen verschiedenen circulären Reihenfolgen n in einer Ebene liegende Punkte von allen Punkten der Ebene aus gesehen werden. Der Verfasser fährt in der von Laisant begonnenen orientirenden Betrachtung fort: durch je zwei der n Punkte (Ecken) werden unbegrenzte Gerade gelegt; jede besteht aus drei Stücken, einem inneren zwischen den Ecken und zwei äusseren; sie schneiden sich, die Ecken ungerechnet, in $\varDelta$ weiteren Punkten (Knoten), und diese heissen äussere, innere oder gemischte, je nachdem sie von zwei äusseren, zwei inneren oder einem inneren und einem äusseren Stück gebildet werden, deren Anzahlen sind δ, δ', δ''. Die Anzahl der Regionen, in welche die ganzen Geraden die Ebene teilen, war nun (nach Laisant) eine obere Grenze der Aspectanzahl. Tilgt man aber alle inneren Stücke, so ist noch immer der Aspect innerhalb jeder Region unveränderlich. Die Anzahl der so restirenden Regionen ist also eine weit engere obere Grenze der gesuchten. Sie ist $R=(n-1)^2+\delta$. Tilgt man statt der inneren die äusseren Stücke, so reducirt sich die Anzahl der Regionen auf

$$R'=\frac{1}{2}(n^2-3n+4)+\delta'.$$

Darauf untersucht der Verfasser, wie sich δ und δ' mit der Lage der Ecken ändern. Geht man von einer beliebigen Configuration, z. B. einem convexen Polygon aus, wo δ_0, δ'_0, δ''_0 die Werte von δ, δ', δ'' seien, so kann man jede andere daraus ableiten, indem man irgend welche Ecken über die Verbindende zweier anderer hinwegschiebt. Mögen dann unter den $n-3$ übrigen Ecken sich p vor, p' nach der Verschiebung auf derselben Seite der Verbindenden befinden, dann ist nach Herstellung der actuellen Configuration

$$\delta = \delta_0 - 2\Sigma(p-p') = 2\left(\frac{\Delta}{3} - \varepsilon\right),$$

$$\delta' = \delta'_0 - \Sigma(p-p') = \frac{\Delta}{3} - \varepsilon,$$

$$\delta'' = \delta''_0 + 3\Sigma(p-p') = 3\varepsilon,$$

und es wird

$$R = \frac{1}{12}(n-1)(n^3 - 5n^2 + 18n - 12) - 2\varepsilon,$$

$$R' = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 48) - \varepsilon,$$

woraus:

$$R - 2R' = n - 3,$$

wo $\varepsilon = \Sigma(p-p')$ (jeden Term positiv oder negativ gerechnet, je nachdem ein inneres oder äusseres Stück überschritten wird) die charakteristische Zahl für die Configuration ist. Für $\varepsilon = 0$, d. i. für das convexe Polygon, ist $R = R_0$ der grösste Wert von R, gleichwol eine kleinere obere Grenze der Aspectzahl, als die von Laisant aufgestellte ϱ, zu der sie in der Beziehung steht:

$$R_0 = \frac{2\varrho - n + 1}{3}.$$

Es folgen einige Specialbetrachtungen und der Satz: „Eine beliebige Gerade geht höchstens durch zwei bestimmte Regionen, welche denselben bestimmten Aspect geben, und in diesem Falle liegen alle Ecken auf derselben Seite der Geraden.“ Noch ist einer eingeschalteten Betrachtung zu gedenken, welche eine später speciell angewandte Relation von der Ebene auf Oberflächen offener oder geschlossener Räume in beliebig vielfachem Zusammenhang ausdehnt. H.

G. Hagen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3te Auflage. Berlin. Ernst u. Korn.

Durch die Tatsache, dass dieses zuerst 1837 erschienene Buch im Jahre 1867 die zweite, und jetzt die dritte Auflage erfährt, dürfte die Nützlichkeit desselben am besten erwiesen sein. Dasselbe wendet sich in erster Reihe an die Jünger der Bau-

kunst und der Ingenieurwissenschaften im weitesten Sinne, um denselben den Weg zu zeigen, auf welchem sie die durch Beobachtungen und Messungen gewonnenen Daten, den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechend verwerten und anwenden können.

Es werden daher die allgemeinen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung kurz abgeleitet, und dann wird die grosse Wichtigkeit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Beobachtungsresultate, auf die Ermittelung der in denselben liegenden Fehler und auf die zur Erklärung der Erscheinungen aufgestellten Hypothesen gezeigt.

Der zweite Abschnitt handelt von den Beziehungen zwischen der Grösse der Beobachtungsfehler und der Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens. Der Hauptsatz dieser Beziehungen wird aus den Binomial-Coefficienten abgeleitet, indem der Beobachtungsfehler als die Differenz zwischen den Summen der in unendlicher Anzahl auftretenden positiven und negativen kleinsten Fehler aufgefasst wird. Die Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen und praktischen Regeln für die Ausführung der Rechnung bildet den dritten Abschnitt, während der vierte der Erläuterung des mittleren und wahrscheinlichen Fehlers, der Wahrscheinlichkeit der ermittelten Constanten, ihrer wahrscheinlichen Fehler etc. gewidmet ist. Im fünften Abschnitt giebt der Verfasser einige Beispiele von der Anwendung der von ihm vorgetragenen Lehren, und im sechsten Abschnitt zeigt er specieller die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Nivelliren. Der Anhang enthält eine Quadrat-Tabelle, eine Tabelle der relativen Wahrscheinlichkeit der Fehler und eine Tabelle der Wahrscheinlichkeit des Ueberschreitens verschiedener Fehlergrenzen.

Aus dieser Inhaltsübersicht wird ersichtlich, dass der Verfasser überall den praktischen Zweck in's Auge fasst, und dem entsprechend hat er den Stoff mit grossem Geschick behandelt. Die theoretische Begründung der einzelnen Sätze ist klar und präcise und vermeidet geflissentlich jedes Eingehen auf Nebenfragen, welche von der Hauptsache abführen.

Die dritte Auflage bringt manche Zusätze und Aenderungen,

um, wie der Verfasser in dem Vorwort hervorhebt „das Verständnis zu erleichtern und möglichen Bedenken vorzubeugen.“ Die Anwendungsbeispiele sind zum Teil verändert. Ls.

J. Bertrand. Sur la théorie des épreuves répétées.
C. R. XCIV. 185-186.

Der Verfasser giebt folgende Ableitung des Bernoulli'schen Satzes. Es seien p und q die Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter Ereignisse, von denen das Eine oder das Andere eintreffen muss; mithin giebt die Entwickelung des Binoms

$$(p+q)^{\mu} = \Sigma A_k p^k q^{\mu-k}$$

die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Combinationen, in welchen die beiden Ereignisse bei μ Versuchen auftreten können. Es wird angenommen, dass Jemand sich verpflichtet habe, nach μ Versuchen die Summe $\left(\frac{n}{\mu}-p\right)^2$ zu bezahlen, wo n die Anzahl der Fälle bezeichnet, in denen das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, aufgetreten.

Die mathematische Hoffnung E desjenigen, dem das Versprechen gemacht worden, ist augenscheinlich gleich

$$\Sigma\left(\frac{k}{\mu}-p\right)^2 A_k p^k q^{\mu-k}$$

$$=\frac{1}{\mu^2}\Sigma k^2 A_k p^k q^{\mu-k}-\frac{2p}{\mu}\Sigma k A_k p^k q^{\mu-k}+p^2\,\Sigma A_k p^k q^{\mu-k};$$

und da, wie man leicht findet,

$$\Sigma A_k p^k q^{\mu-k} = 1,$$
$$\Sigma k A_k p^k q^{\mu-k} = \mu p,$$
$$\Sigma k^2 A_k p^k q^{\mu-k} = \mu p + \mu(\mu-1)p^2,$$

so ergiebt sich

$$E = p\frac{(1-p)}{\mu} = \frac{pq}{\mu}.$$

Mit wachsendem μ convergirt also E gegen 0, und folglich muss auch $\left(\frac{n}{\mu}-p\right)$ mit wachsendem μ gegen 0 convergiren.

Ls.

Em. Barbier. Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face. C. R. XCIV. 1461-1463.

Werden $2n$ Münzen geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass n Münzen auf die Bildseite, n Münzen auf die Schriftseite fallen:

$$P = \frac{2n.2n-1\dots n+1}{n!\ 2^{2n}} = \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2^n},$$

und mithin unter Anwendung der Formel von Wallis

$$P \text{ näherungsweise } = \sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$

1. Werden mit den $2n$ Münzen unendlich viele Würfe gemacht, und nennt man die durchschnittliche Anzahl der Würfe, unter denen einer ist, bei welchem n Münzen auf die Bildseite, n Münzen auf die Schriftseite fallen, M, so folgt

$$M = \frac{1}{P}, \text{ also } \frac{M^2}{n} = \pi.$$

2. Entwickelt man für eine unendliche Zahl von Würfen die Differenz der Münzen, welche Schrift und Bild zeigen, wobei die Differenz stets positiv genommen wird, wenn sie nicht gleich Null ist, und nennt man den Mittelwert dieser Differenz D, so ergiebt sich

$$D = 2nP, \text{ also } \frac{4n}{D^2} = \pi.$$

Die Werte $\frac{M^2}{n}$ und $\frac{4n}{D^2}$ geben auch bei einer endlichen Anzahl von Versuchen Näherungen für π. Ls.

Weitere Lösungen von Aufgaben über Wahrscheinlichkeit von Seitz, Matz, B. Easton, D. McAlister, McFarlane, S. Tebay, Ch. Ladd, W. A. Whitworth, J. O'Regan, W. H. Blythe, G. Heppel, E. Blackwood, K. Gale finden sich Ed. Times XXXVI. 50, 85, 94-96; XXXVII. 40-42, 52, 67, 68, 71, 121-122.

O.

A. VOGLER. Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Braunschweig. Vieweg u. Sohn.

Das Buch ist wesentlich für praktische Geometer bestimmt und behandelt die Vorschriften der Ausgleichungsrechnung mit einer dem genannten Zwecke entsprechenden Vollständigkeit und Ausführlichkeit unter Einfügung zahlreicher Beispiele. Da der Inhalt materiell nichts Neues giebt, so sei hier nur erwähnt, dass die Darstellung mit ganz elementaren Hülfsmitteln operirt und wohl geeignet ist, solche Leser in die Methode der kleinsten Quadrate einzuführen, denen es wesentlich nur auf die praktische Anwendung, jedoch nicht auf eine vollkommen strenge Begründung der Principien ankommt. B.

P. VAN GEER. Over het gebruik van determinanten by de methode der kleinste kwadraten. Nieuw Arch. IX. 180-188.

Eine frühere Arbeit des Verfassers über die Anwendung der Determinanten bei der Methode der kleinsten Quadrate (s. F. d. M. VII. 1875. 114) und eine Arbeit Glaisher's in den Monthly Notices of the R. Astron. Society (F. d. M. XIII. 1881. 162) haben die Veranlassung zu der vorliegenden Note gegeben, welche dieselbe Aufgabe behandelt. Einige der in diesen Arbeiten erhaltenen Resultate und Eigenschaften sind bereits in einer Abhandlung von Jacobi: De formatione et proprietatibus determinantium (Crelle J. Bd. XXII. p. 285) mitgeteilt. G.

TH. WITTSTEIN. Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Astr. Nachr. 2446.

Wenn y eine gegebene nicht lineare Function der gesuchten Unbekannten, M den beobachteten Wert von y, und p sein Gewicht bedeutet, so verlangt die gewöhnliche Rechnungsvorschrift die Einführung genäherter Werte für die Unbekannten, um den Fehlergleichungen die lineare Form geben zu können. Diese Substitution lässt sich, wie gezeigt wird, umgehen, sobald eine

bestimmte Function $f(y)$ von y in Bezug auf die Unbekannten linear ist; man hat nur nötig, den in der Form

$$f(M) = f(y)$$

angesetzten Fehlergleichungen das Gewicht

$$p_1 = \frac{p}{\left(\frac{df(M)}{dM}\right)^2}$$

zu geben. B.

Th. Wittstein. Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Schlömilch Z XXVII. 315-317.

Anknüpfend an die Schwierigkeiten, denen man begegnet, wenn man die Methode der kleinsten Quadrate in solchen Fällen anwenden will, in welchen die Function, von welcher eine Reihe beobachteter Werte vorliegt, in Bezug auf die zu bestimmenden Constanten nicht linear ist, also entweder eine höhere algebraische oder eine transcendente ist, zeigt der Verfasser, wie es für eine gewisse Klasse von Functionen möglich ist, diese Schwierigkeit zu beseitigen, nämlich für alle solche Functionen, die sich durch die gewöhnlichen Operationen in eine andere, welche linear ist, umformen lassen.

Der Verfasser stützt sich dabei auf einen Lehrsatz, den er folgendermassen ausdrückt: Wenn von einer Function y eine Reihe von bestimmten Werten mit den Gewichten p versehen, gegeben ist, so kann man zur Bestimmung der in der Function enthaltenen unbekannten Constanten, anstatt die Summe der Fehlerquadrate dieser Function zu einem Minimum zu machen, vollkommen correct auch so verfahren, dass man die Summe der Fehlerquadrate einer beliebigen Function von y, welche $f(y)$ sei, zu einem Minimum macht, dabei jedoch jeder Beobachtung ein Gewicht p' beilegt, welches zu dem vorigen p in der Beziehung steht:

$$\frac{p}{p'} = k\left(\frac{df(M)}{dM}\right)^2,$$

wo k eine willkürliche und für alle Beobachtungen identische positive Constante bedeutet.

Der Beweis gründet sich darauf, dass man an die Stelle des Verhältnisses der kleinen Differenzen $f(y)-f(M)$ und $y-M$ das Verhältnis ihrer Differentiale setzen darf.

Schliesslich zeigt der Verfasser die Anwendung seines Verfahrens an einigen Beispielen. Ls.

G. A. Maggi. Intorno ad alcune formole relative al calcolo degli errori d'osservazione. Lomb. Rend. (2) XV. 351-358.

Der Verfasser giebt die Ableitung für die Berechnung der wahrscheinlichsten Werte eines Systems von Unbekannten, welche in linearer Form in einer Function auftreten, wenn Werte dieser Function durch überzählige Beobachtungen gegeben sind. Durch Einführung des Präcisions-Modulus und des mittleren Beobachtungsfehlers wird gezeigt, welchen Gesetzen die Fehler dieser wahrscheinlichsten Werte unterworfen sind, und endlich wird der mittlere Beobachtungsfehler aus den Resultaten der Beobachtung bestimmt. Ls.

P. Harzer. Ueber die Wahrscheinlichkeit, einen Cometen aufzufinden als Function seines geometrischen Winkelabstandes von der Sonne. Astr. Nachr. 2453.

Die genannte Aufgabe ist in dem Briefwechsel zwischen Bessel und Olbers behandelt, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Helligkeit des Cometen umgekehrt proportional den Quadraten seiner Abstände von Sonne und Erde ist. Verfasser zeigt, dass das von Olbers gefundene Resultat nicht correct ist, und leitet unter gewissen, praktisch zulässigen Vereinfachungen für die Wahrscheinlichkeit, dass der Comet in dem Winkelabstande $\pi-\varphi$ von der Sonne entdeckt werde, den angenäherten Ausdruck

$$C\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

ab, wo C eine Constante ist, deren Wert von dem Flächenstück der Himmelskugel abhängt, das man, als bei vorliegender Aufgabe auszuschliessen, um die Sonne abzugrenzen hat.

B.

T. W. Wright. On the computation of probable errors. Anal. IX. 74-78.

Tafeln für die Werte der Multiplicationsconstanten in Bessel's und Peters' Formeln für den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung und des arithmetischen Mitteln von m Beobachtungen. Schreibt man

$$r = \frac{0{,}6745}{\sqrt{m-1}}\sqrt{[\nu^2]} = \lambda_1\sqrt{[\nu^2]},\quad r_0 = \frac{0{,}6745}{\sqrt{m(m-1)}}\sqrt{[\nu^2]} = \lambda_2\sqrt{[\nu^2]},$$

$$r = \frac{0{,}8453}{\sqrt{m(m-1)}}[\nu = \lambda'[\nu,\quad r_0 = \frac{0{,}8453}{m\sqrt{m-1}}[\nu = \lambda''[\nu,$$

so geben die Tafeln die Werte von λ_1, λ_2, λ' und λ'' für $m=2$ bis $m = 100$ auf vier Decimalstellen. Jn. (O.).

E. L. de Forest. On an unsymmetrical probability curve. Anal. IX. 135-141, 161-168.

Der Verfasser sucht zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeitscurve von der Form

$$y = \frac{adx}{\Gamma(a^2b)}(ax)^{a^2b-1}e^{-ax}$$

sei, wo a und b constant sind. Jn. (O.).

E. L. de Forest. Law of error in the position of a point in space. Anal. IX. 33-40, 65-74.

Der Verfasser sucht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz aufzustellen, ohne die Annahme, dass der Fehler in einer Richtung unabhängig ist von dem Fehler in einer anderen zur ersten senkrechten Richtung. Jn. (O.).

Weitere Lösungen von Aufgaben über mittlere Werte von W. J. C. SHARP, J. L. KITCHIN, C. MORGAN, B. EASTON, H. G. DAY, S. TEBAY, T. R. TERRY, K. GALE, SEITZ, D. EDWARDES, MATZ finden sich Ed. Times XXXVI. 34-35, 47, 52, 53, 53, 71-72, 84; XXXVII. 42-44, 109-111, 120.

O.

W. MAXIMOWITSCH. Interpolation der impliciten Functionen und die Berechnung der Wurzeln. Kazan Ber. 1881-1882. (Russisch).

Es wird hier zur Interpolation der Function x von y, die durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

definirt ist, die bekannte Interpolationsformel von Newton für ungleiche Zwischenräume angewendet unter der Voraussetzung, dass der Wert von x zwischen solchen von seinen Werten a und b liegt, zwischen welchen die Gleichung $f'(x) = 0$ keine Wurzeln hat. Dann wird eine Regel zur Beurteilung der Genauigkeit dieser Formel gegeben, gestützt auf ein Lemma über Newton's Interpolationsformel, die nur im letzten § III. bewiesen wird; ferner wird das Restglied dieser Formel gefunden und zuletzt gezeigt, dass in dem Falle, wo die zur Interpolation gebrauchten Werte von y sich unendlich nahe rücken, diese Formel in die von Taylor mit Lagrange'schem Restgliede übergeht. Im § II werden aus den beiden erwähnten Formeln zwei andere, zur Berechnung von Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ dienende Formeln gewonnen, von denen die zweite die von Euler in seiner Differentialrechnung Bd. II. Cap. 9 § 234 gegebene ist, nur dass sie jetzt mit einem Restgliede erscheint.

Ty.

R. S. WOODWARD. On the actual and probable values of interpolated values derived from numerical tables by means of first differences. Anal. IX. 143-149, 169-175.

Der Verfasser betrachtet vorzugsweise interpolirte Werte, in

denen die Correction der genaue Proportionalteil der Tafeldifferenz ist, so dass der Fehler $(1-t)\varepsilon_1 + t\varepsilon_2$ ist, wenn ε_1 und ε_2 die Fehler der Tafelwerte sind Verfasser findet als den wahrscheinlichen Fehler r:

$$r = \frac{1}{4}(1-t), \qquad \text{wenn } 0 < t < \frac{1}{3},$$
$$r = \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{2t(t-1)}\right], \qquad ,, \quad \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3},$$
$$r = \frac{1}{4}t, \qquad ,, \quad \frac{2}{3} < t < 1 .$$

Er betrachtet ferner die gewöhnlichen interpolirten Werte, in denen die Correction aus der nächsten Einheit in der letzten Stelle der Tafelwerte gezogen ist, und findet für $t = \frac{1}{2}$ den wahrscheinlichen Fehler 0,29, im Gegensatz zu Bremiker, der in der Einleitung zu seinen sechsstelligen Tafeln 0,26 dafür giebt. Zur Probe wurden 500 solche Werte aus einer fünfstelligen Logarithmentafel genommen. Es ergab sich, dass 49,8 pro 100 kleiner und 50,2 pro 100 grösser als 0,29 waren. Der Verfasser findet $r = 0{,}26$ für $t = \frac{1}{3}$ und $r = 0{,}27$ für $t = \frac{1}{4}$.

Jn. (O.).

— —

C. P. J. van den Berg. The theory of wages. Transl. fr. the Dutch. London. E. Marlborough & Co.

Ausgehend von der mathematischen Betrachtungsweise, welche Stanley Jevons, Léon Walras und d'Auluis de Bourouill in die Behandlung der Probleme der National-Oekonomie eingeführt haben, und fussend auf den von diesen aufgestellten Grundsätzen untersucht der Verfasser die Lohnfrage. Er zeigt, dass die verschiedenen früher aufgestellten Behauptungen und Erklärungen einer wissenschaftlichen Beleuchtung nicht stand halten, und dass die Höhe der Löhne unabhängig von jeder Willkür durch natürliche Gesetze auf Grund des Verhältnisses zwischen dem Vorrat von Capital zu dem Vorrat von Arbeitskraft geregelt wird.

Es giebt für jeden Lohnsatz einen Gleichgewichtszustand für das Verhältnis des Arbeiters zum Capitalisten, und somit würde die Frage nach der Höhe der Löhne unbestimmt bleiben, wenn zu der Gleichgewichtsbedingung nicht noch eine fernere Bedingung hinzukäme. Diese ergiebt sich aus der Tatsache, dass für die Erzeugung einer bestimmten Quantität von Producten Capital und Arbeit in verschiedener Weise mit einander combinirt werden können, und dass diejenige Combination gewählt werden wird, welche die vorteilhafteste ist; diese Combination ist wieder vom Lohnsatz abhängig.

Der Zweck des Verfassers gipfelt darin, zu zeigen, dass bei freier Concurrenz zwischen Capitalisten und Arbeitern der Lohnsatz die höchste Höhe erreichen muss, welche mit Notwendigkeit aus den vorhandenen socialen Beziehungen hervorgeht.

Ls.

A. Morgenbesser. Die mathematischen Grundlagen des gesammten Versicherungswesens. **Berlin. Puttkammer und Mühlbrecht.**

Das Buch erfüllt keineswegs das, was der Titel desselben verspricht, denn es enthält nur eine Zusammenstellung der am häufigsten vorkommenden Formeln für die Berechnung der Lebensversicherungs-Prämien, deren Gebrauch, wie der Verfasser in dem Vorwort selbst sagt, es dem Lebensversicherungsbeamten möglich macht „ohne zeitraubendes Nachschlagen in voluminösen Büchern und weiteres Eingehen in die Theorie der betreffenden Versicherung die Höhe des fraglichen Betrages sofort zu ermitteln“.

Ob für eine solche „Zusammenstellung“ ein Bedürfnis vorhanden ist, vermögen wir nicht zu beurteilen. Neues haben wir in dem Buche nicht gefunden. Zu loben ist es indes, dass der Verfasser die von den Lebensversicherungstechnikern im Jahre 1864 vorgeschlagene Bezeichnungsweise adoptirt hat.

Ls.

Institute of Actuaries. Textbook of the principles of interest (including annuities certain), life annuities and assurances, and their practical application. Part. I. Wm. Sutton. Interest including annuities certain. G. King. The theory of finance. London. C. & E. Layton.

Diese beiden Erscheinungen sind nach verschiedenen Richtungen so nahe mit einander verwandt, dass es erlaubt sein wird, um Wiederholungen zu vermeiden, sie gemeinsam zu besprechen.

Der Mangel eines vollständigen Lehrbuchs der Lebensversicherungstechnik, in welchem die modernen Anschauungen und Methoden ihre Berücksichtigung finden, hatte schon vor mehreren Jahren das Institute of Actuaries veranlasst, sich mit der Herausgabe eines solchen zu beschäftigen und Herrn W. Sutton damit zu beauftragen.

Der erste Teil dieses mit Spannung erwarteten Werkes, dem von vornherein ein autoritativer Charakter gesichert ist, liegt jetzt vor. Derselbe enthält eine vollständige Theorie der Zinsrechnung mit Einschluss der unbedingten Renten und umfasst 163 Seiten und einen Anhang von elf Seiten. Man darf aber keineswegs glauben, dass die einzelnen Fragen mit besonderer Breite behandelt würden, oder dass der Autor Ueberflüssiges oder nicht dahin Gehöriges in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen hätte. Im Gegenteil, Herr Sutton hat es verstanden, sich überall der grössten Kürze, welche mit einer erschöpfenden Darstellung vereinbar ist, zu befleissigen, so dass eine gedrängtere Behandlung kaum möglich gewesen wäre, wenn die Absicht, überall auf eine praktische Verwertung der dargestellten Sätze zu verweisen, erreicht werden sollte.

Der Stoff ist in sieben Capitel gegliedert: I. Zinsen. Betrag eines Capitals mit Zinsen. Gegenwärtiger Wert einer später fälligen Summe. Discont. II. Renten. a) Rente und Zinsen jährlich zahlbar; b) Rente und Zinsen in gleichen aber unterjährlichen Terminen zahlbar; c) Rente und Zinsen in Perioden von verschiedener Dauer zahlbar. III. Renten, bei denen die Beträge in den einzelnen Terminen ungleich sind, die Termine selbst constant oder veränderlich. IV. Bestimmung des Zinsfusses, wenn das zurückgezahlte Capital dem vorgeschossenen gleich

ist. Näherungsmethoden. Die Bestimmung des wirklich gezahlten Zinsfusses, wenn das zurückgezahlte Capital von dem Betrag des vorgeschossenen verschieden ist. V. Praktische Beispiele und Erläuterungen. VI. Die Anwendung der höheren Analysis auf die Theorie der Zinseszinsen. VII. Ueber Zinsentabellen.

Fast gleichzeitig mit dem Textbook ist die Arbeit von King erschienen. Dieselbe bezeichnet sich als eine kurze Abhandlung über die Lehre von den Zinsen und den unbedingten Renten und bildet die No. 8 der neuen Reihenfolge der Transactions of the Actuarial Society of Edinburgh. Das Buch ist hervorgegangen aus den Vorlesungen, welche von dem Verfasser zur Vorbereitung auf das Mittelexamen bei dem Institute of Actuaries gehalten werden. Diese Vorlesungen umfassen auch die mathematische Theorie der Lebens-Versicherungsrechnung, und der Verfasser hatte ursprünglich die Absicht gehabt, das ganze Gebiet dieser Vorlesungen unter dem Titel Elements of Actuarial Science zu behandeln. Dieser Plan ist jedoch aufgegeben, denn nachdem der erste Teil des Textbooks veröffentlicht worden, hat Herr Sutton dem Institute of Actuaries erklärt, seine anderweitigen Beschäftigungen liessen ihm nicht die erforderliche Zeit für die Bearbeitung des zweiten Teils, und in Folge dessen hat das Institute diese Arbeit dem Herrn King übertragen.

Die Theory of Finance unterscheidet sich von dem Textbook in der Hauptsache nur dadurch, dass es den behandelten Gegenstand etwas enger begrenzt hat; es umfasst 92 Seiten Text und 5 Seiten Tabellen.

Wir dürfen beide Bücher auf das Wärmste empfehlen.

Ls.

G. F. Hardy. An improved method of approximating to the value of annuities involving three lives. J. Inst. Act XXIII. 274-285.

Das gewöhnliche Verfahren zur näherungsweisen Berechnung des Leibrentenwertes für drei verbundene Personen $R(x, y, z)$, wo x, y, z die Alter sind, und zwar x das jüngste, besteht bekanntlich

darin, dass man mit Hülfe einer Rententabelle für zwei verbundene Personen und für einfache Leibrenten zunächst das Alter w bestimmt, so dass

$$R(w) \text{ näherungsweise gleich } R(y, z);$$

dann giebt

$$R(x, w) \text{ eine Näherung für } R(x, y, z).$$

Die Methode würde ein streng richtiges Resultat liefern, wenn die Sterblichkeit der Gompertz'schen Hypothese entspräche, was bekanntlich nicht der Fall ist. Besser schliesst sich ihr die Makeham'sche Hypothese an, und so erlangen wir auch genauere Resultate, wenn wir diese bei unserm Verfahren dadurch berücksichtigen, dass wir bei Gleichsetzung von $R(w)$ mit $R(y, z)$ den ersteren Wert aus einer Tafel mit einem andern Zinsfuss wählen.

Nach den Untersuchungen des Verfassers genügt es, wenn man diesen Zinsfuss, welcher von dem Wert h in der Makeham'schen Formel $G.K^{q^t h^t}$ abhängt, um ein halbes Procent erhöht. Bezeichnen wir den Rentenwert aus der Tafel mit einhalb Procent höheren Zinsen durch $\underline{R}$ statt R, so würde w so zu bestimmen sein, dass

$$R(y, z) \text{ näherungsweise gleich } \underline{R}(w)$$

ist, und dann folgert man

$$R(x, y, z) \text{ näherungsweise gleich } \underline{R}(x, w).$$

Ls.

M. N. Adler. A method of solving approximately questions in compound interest without the aid of tables. J. Inst. Act. XXIII. 359-360.

Bezeichnet man den Betrag, auf welchen das Capital 1 nach x Jahren zum Zinsfuss p angewachsen ist, mit m, so folgt

$$m = (1+p)^x,$$

und folglich

$$x = \frac{lm}{l(1+p)},$$

wo l logar. natur. bedeuten soll.

Es ergiebt sich leicht

$$x \text{ näherungsweise gleich } \frac{lm}{p}\left(1+\frac{p}{2}\right).$$

Setzt man $m = 2$, so wird $lm = 0{,}6931$, und man findet die Zeit, welche erforderlich ist, damit sich ein Capital bei dem Zinsfuss p verdoppelt:

$$\frac{0{,}6931}{p}\left(1+\frac{p}{2}\right).$$

Wird p gleich 2, so wird die vorstehende Formel $\frac{70}{2}$, und man erkennt leicht, dass man bei jeder Steigerung des Zinsfusses um drei Procent die Zahl 70 um eine Einheit erhöhen muss, um dann durch Division mit der Zahl, welche den Zinsfuss in Procenten ausdrückt, die Anzahl der Jahre zu finden, die erforderlich ist, damit sich das Capital verdoppelt. Ebenso findet man die Zeit, welche dazu erforderlich ist, damit das Capital 1 sich erhöht auf

$$1\tfrac{3}{4} \text{ gleich } \frac{0{,}56}{p},$$

$$1\tfrac{1}{2} \quad " \quad \frac{0{,}40}{p},$$

$$1\tfrac{1}{4} \quad " \quad \frac{0{,}23}{p}.$$

Mit Hülfe dieser vier Zahlen ist es aber leicht, die Aufgaben der Zinseszinsrechnung zu lösen, wie der Autor an zahlreichen Beispielen zeigt. Ls.

G. F. Hardy. On the rate of interest in annuities certain. J. Inst. Act. XXIII. 266-274.

Für die Berechnung des Zinsfusses einer Rente, welche eine bestimmte Reihe von Jahren gezahlt werden soll, und für welche der gegenwärtige Wert und der Betrag der Rente gegeben ist, muss man bekanntlich Näherungsformeln anwenden.

Der Verfasser giebt deren zwei neue, welche wenig Arbeit machen und sehr genaue Resultate geben.

Es sei a der Kaufpreis einer n Jahre dauernden Rente von 1 jährlich, x der gesuchte Zinsfuss, und seien a_1, a_2, a_3 die in den Zinstabellen aufgeführten Rentenwerte für eine n Jahre dauernde Rente mit dem Zinsfuss x_1, x_1+h, x_1+2h. Wenn a_1 und a_2 so gewählt werden, dass sie den Wert a einschliessen, dann liegt offenbar auch x zwischen x_1 und x_1+h.

Setzen wir $x = x_1+\varrho$, und bezeichnen wir die ersten und zweiten Differenzen zwischen a_1, a_2, a_3 durch Δ und Δ^2, so sind die beiden Näherungsformeln

$$1)\qquad \varrho = h \left\{ \frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{a-a_1} + \frac{\frac{1}{2}\Delta^2}{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2} \right\}^{-1},$$

$$2)\qquad \varrho = h \frac{\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2}{\frac{(\Delta)^2}{a-a_1} + \frac{1}{2}\Delta^2}.$$

Ls.

D. J. McG. McKenzie. On the transformation of annuities and annuity values payable yearly into the like, when payable in fractional intervals of a year by means of constant factors. J. Inst. Act. XXIII. 162-187.

De Moivre behandelt in seiner Doctrine of Chances die beiden Probleme: 1) wie gross müssen die halbjährlichen Rentenzahlungen sein, wenn der Kaufpreis der jährlich zahlbaren Rente bestimmt ist? 2) wie steigert sich der Kaufpreis der Rente, wenn statt der Jahreszahlung halbjährliche Zahlung im Betrage der Hälfte der Jahresrente gewährt werden soll?

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit hat diese Aufgaben dahin erweitert, dass er nicht nur die halbjährlich, sondern allgemein die in verschiedenen Jahresbruchteilen zahlbaren Renten in's Auge fasst. Er berechnet constante Factoren, mit deren Hülfe die Umrechnung geschieht, und hat solche in Tabellenform veröffentlicht. Ls.

C. J. Malmstén. Zur Theorie der Leibrenten. Act. Math. I. 63-76.

Der Verfasser behandelt die Aufgabe: Wie wird der Wert einer Leibrente, welche bezahlt werden soll, so lange noch v Personen von n Personen des Alters $x_1, x_2, \ldots, x_n$ am Leben sind, ausgedrückt durch die Werte der Verbindungsrenten für $v, v+1, v+2, \ldots, n$ Personen vom gegebenen Alter $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

In der für die Lebensversicherungstechnik üblichen Bezeichnung bedeutet $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den Wert der Verbindungsrente für n Personen vom Alter $x_1, x_2, \ldots, x_n$; bezeichnen wir mit

$$\Sigma R(x_1, x_2, \ldots, x_{v+p})$$

die Summe der Werte aller Verbindungsrenten für die verschiedenen Combinationen von $(v+p)$ Personen, welche aus n Personen vom Alter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildet werden können, so findet der Verfasser den Wert der gesuchten Leibrente, welche gezahlt werden soll, so lange noch v Personen von n Personen des Alters $x_1, x_2, \ldots, x_n$ am Leben sind, gleich

$$\sum_{p=0}^{p=n-v} \left\{(-1)^p \, (v+p-1)_p \;\; \Sigma R(x_1, x_2, \ldots, x_{v+p})\right\},$$

wo $(v+p-1)_p$ die bekannte Bezeichnung des Binomial-Coefficienten sein soll. Ls.

J. J. Sylvester and F. Franklin. On a logical problem connected with assecurances on joint lives. J. Hopkins Circ. 1882. 202.

Einige Formeln der mathematisirten Logik lassen sich zur Lösung von Aufgaben aus dem Gebiete des Versicherungswesens verwenden. Mi.

L. W. Meech. System and tables of life insurance. Norwich. Conn.

Dieses Werk ist durch die Untersuchungen der Sterblichkeitserfahrungen von dreissig Lebensversicherungs-Gesellschaften der Vereinigten Staaten Nordamerikas veranlasst worden. Die

denselben zu Grunde liegenden Beobachtungen erstrecken sich bis zum 31. December 1874 und umfassen mehr als eine Million versicherter Leben mit einer Beobachtungsdauer von durchschnittlich circa $4\frac{1}{2}$ Jahren für jedes Leben. Das Beobachtungsmaterial wurde einem Comité von Actuarien abseiten der einzelnen Gesellschaften in Form von Zählkarten überliefert und dort nach den verschiedensten Richtungen bearbeitet. Das schliessliche Ergebnis dieser Arbeit ist durch den Vorsitzenden des Comités, L. W. Meech veröffentlicht worden und liegt uns in einem stattlichen Folio-Bande von 550 Seiten vor. Derselbe zerfällt in zwei Teile.

I. Teil: Unmittelbare Beobachtungen und Tabellen.

Der Text bringt eine genaue und in's Einzelne gehende Beschreibung, wie die von den Gesellschaften beobachteten Erfahrungen auf die Zählkarten eingetragen, wie diese revidirt, geordnet und bearbeitet worden, um daraus die Sterblichkeitserfahrungen nach den verschiedensten Richtungen abzuleiten. Dieselben sind bezogen auf die versicherten Personen und auf die versicherten Summen, sie sind unterschieden nach dem Geschlecht und nach jährlichen Altersklassen der Versicherten mit der Unterteilung der Versicherungsdauer; Letzteres zu dem Zweck, um den Einfluss, welchen die Selection auf die Sterblichkeit ausübt, zu bestimmen. Diese Selection wird beim Versicherungsabschluss von der Versicherungsanstalt auf Grund der stattfindenden ärztlichen Untersuchung gegen die sich zur Versicherung meldenden Personen geübt, da die Anstalten nur solche Anträge annehmen, bei denen kein Bedenken gegen die Gesundheitsverhältnisse obwalten. Nach dem Versicherungsabschluss tritt aber eine Selection der Versicherten gegen die Anstalt in entgegengesetzter Richtung ein, weil nur diejenigen Versicherten, deren Gesundheitsverhältnisse sich dauernd günstig erhalten, von dem Recht, bei Lebzeiten wieder von der Versicherung zurückzutreten, Gebrauch zu machen pflegen. Versicherte, deren Gesundheit gelitten hat, geben die Versicherung nicht wieder auf, und während die Beobachtungen der Anstalt kurze Zeit nach dem Abschluss der Versicherung sich auf ausgewählte gesunde Personen beziehen, kann leicht

das Verhältnis sich später so weit umkehren, dass die Sterblichkeitsverhältnisse der versicherten Personen sogar unter dem Sterblichkeitsdurchschnitt der allgemeinen Bevölkerung stehen. Die Resultate werden ausserdem dargestellt, gesondert für die verschiedenen klimatischen Zonen und nach den Krankheiten, welche den Tod herbeigeführt haben.

Ueber alle diese Punkte werden ausführliche Erläuterungen gegeben, unter stetem Hinweis auf die darauf bezügliche in dem Journal des Institute of Actuaries enthaltene Literatur. Es ist darin freilich nicht viel Neues enthalten, und wir hätten gewünscht, dass der Verfasser auch den von den Seinigen abweichenden Methoden und Ansichten etwas mehr Beachtung geschenkt hätte; aber wir erkennen gern an, dass hier eine ausführliche und zusammenhängende Darstellung des ganzen Verfahrens zur Ableitung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Lebensversicherungsanstalten gegeben wird. Diesem ersten Teil sind die vollständigen Resultate der unmittelbaren Beobachtungen nach den bezeichneten Richtungen in Tabellenform angefügt.

II. Teil: Leibrenten und Lebensversicherungen.

Ausgehend von den einfachsten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie von den Sätzen über die mathematische und die moralische Hoffnung entwickelt der Verfasser das ganze System der Lebensversicherungs-Rechnung. Aus den im ersten Teil enthaltenen unmittelbaren Beobachtungen leitet er zunächst die „Nordamerikanische Sterblichkeitstafel“ ab und zwar mit Unterscheidung der Geschlechter. Er findet dabei, dass bei der Sterblichkeitstafel für Männer nur ganz unbedeutende Ausgleichungen in den niedrigsten und höchsten Altersclassen erforderlich waren, um sie und zwar für die Alter von 10 bis 99 Jahren vollkommen mit der Makeham'schen Sterblichkeitsformel in Einklang zu bringen, wo, die Anzahl der Lebenden vom Alter x

$$= ks^x g^{q^x}$$

gesetzt,

$$s = 0{,}9936957, \quad g = 0{,}9993122, \quad q = 1{,}099713375$$

ist.

Bei der Sterblichkeitstafel für das weibliche Geschlecht, für

welche keine sehr zahlreichen Beobachtungen zu gebote standen, waren besonders für die Altersclassen über 70 Jahr grössere Ausgleichungen zur Herstellung der Regelmässigkeit erforderlich. Die schliessliche Ausgleichung geschah hier nach dem Verfahren von Woolhouse. Auch diese Tabelle umfasst die Alter von 10 bis 99 Jahren.

Wir haben es zu bedauern, dass der Autor nicht auch die unausgeglichenen Tafeln veröffentlicht hat, weil wir jetzt eines unmittelbaren Urteils über die Wirkung seiner Ausgleichung entbehren.

Es folgt dann eine sehr vollständige Ableitung der verschiedenen bei der Lebensversicherung gebrauchten Rechnungsformeln, sowol zur Bestimmung der Prämien wie auch der Reserven, und eine ausgedehnte Sammlung von Tabellen und Hülfstafeln auf Grund der Nordamerikanischen Sterblichkeitstafel und des Zinsfusses, bei den Haupttafeln mit 3, 3½, 4, 4½, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Procent.

Ls.

Wolf. Ein Beitrag zur Invalidenfrage. D. Vers. Z. XXIII. No. 56.

W. Küttner. Die Activitätswahrscheinlichkeit. D. Vers. Z. XXIII. No. 89.

Dr. Wolf stellt die Hypothese auf, dass bei dem Zusammentreffen mehrerer von einander nicht unabhängiger Ereignisse, welche er so berechnet, als ob die Ereignisse von einander unabhängig wären, die Anzahl der Fälle, in denen das eine Ereignis zuerst auftritt, zur Anzahl der Fälle, in denen das andere zuerst auftritt, sich verhält wie die Wahrscheinlichkeit des einen Ereignisses zur Wahrscheinlichkeit des anderen. Er untersucht auf Grund dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, nach Verlauf eines Jahres als Activer zu leben, wenn die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr zu sterben durch x, die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr invalide zu werden durch y bezeichnet wird. Wären diese beiden Ereignisse von einander unabhängig, so würden unter n Personen nxy Fälle vorkommen, in denen

sowol der Tod wie auch Invalidität eintreten würde, und nach der Annahme des Verfassers wären darunter $nxy\frac{y}{x+y}$ Fälle, in denen zuerst Invalidität und dann der Tod, $nxy\frac{x}{x+y}$ Fälle, in denen zuerst der Tod und dann die Invalidität eintreten würde. Diese letztern sind wegen der Abhängigkeit der Ereignisse von einander unmöglich. Die Gesammtheit der Fälle, wo entweder der Tod oder die Invalidität oder beides zugleich auftritt, ist also bei n Personen nicht $nx+ny-nxy$, sondern

$$nx+ny-n\frac{y}{x+y}xy,$$

und mithin wird die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit als Nichtinvalider (Activer) am Ende des Jahres zu leben:

$$1-x\quad y+\frac{xy^2}{x+y}.$$

Es werden ausserdem die Formeln von Heym, Behm und Zeuner betrachtet.

Küttner wendet gegen diese Ableitung ein, dass sie von der Betrachtung von Ereignissen ausgeht, die von einander unabhängig sind, und zeigt, wie sich die verschiedenen aufgestellten Formeln ergeben, wenn man von den geeigneten Voraussetzungen über die Verteilung der Invaliditäts- und der Sterbefälle über die in Betracht gezogene Zeitstrecke ausgeht. Er weist auch die Berechtigung der Wolf'schen Formel nach, nachdem er die Voraussetzungen, aus denen dieselben abgeleitet werden kann, erörtert hat, und zeigt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Formeln. Ls.

A. Amthor. Ueber einige Arten der Aussteuerversicherung insbesondere die Militairdienstversicherung. Pr. Dresden.

Der Verfasser beabsichtigt, für alle die zahlreichen Formen, in denen die Militärdienst-, die Aussteuer- und die Altersversor-

gungsversicherung aufzutreten pflegt, die Formeln für die Berechnung der Prämien und der Reserven zu geben, so dass man nur nachzuschlagen braucht, um jede gewünschte Formel zu finden, und es wird gewiss Niemand dem Fleiss und der Ausdauer, welche diese Arbeit kennzeichnet, seine Anerkennung versagen. Mit den aufgestellten Formeln können wir uns aber nur teilweise einverstanden erklären, und müssen daher eine Prüfung der Formeln vor dem Gebrauch derselben für notwendig halten. Insbesondere halten wir die Formeln für die Militärdienstversicherung, (mit welcher sich die Abhandlung vorwiegend beschäftigt), wenn es sich um andere als einmalige Prämien handelt, für irrig.

Zur Bestimmung der Prämien muss natürlich die Leistung der Anstalt der Gegenleistung der Versicherten als gleichwertig gegenüber gestellt werden. Dabei behandelt der Verfasser Dienstuntauglichkeit, welche die Befreiung vom Militär nach sich zieht, so, als ob dieselbe ausschliesslich erst dann in die Erscheinung tritt, wenn das dienstpflichtige Alter gekommen ist, anstatt dieselbe ihren Ursachen nach in zwei Teile zu zerlegen, in diejenigen Fälle, welche bis zu der von den Militärärzten vorgenommenen Untersuchung mindestens zweifelhaft bleiben, und in diejenigen Fälle, welche während der Versicherungsdauer alljährlich zweifellos erkennbar werden, und welche das Aufhören der Versicherung und der dadurch bedingten Prämienzahlung nach sich ziehen. Der Umstand, dass das statistische Material nicht vorhanden ist, um diese Trennung rechnerisch auszuführen, entschuldigt es nach unserer Meinung durchaus nicht, dass die Formel unrichtig aufgestellt worden; derselbe hätte vielmehr nur dazu führen dürfen, die Unmöglichkeit einer richtigen Berechnung der Prämien darzutun. Liegen die Verhältnisse hier doch nicht anders, wie auf manchen anderen Versicherungsgebieten, wie z. B. bei der Invaliditätsversicherung, für welche man die richtigen Formeln aufgestellt hat, bei denen aber die Prämienberechnung so lange unterbleiben muss, bis die statistischen Verhältnisse erforscht sind.

Der Verfasser berechnet die Leistung der Anstalt mit Hülfe

desjenigen Verhältnisses, welches sich aus allgemeinen Beobachtungen für die Einstellung im militärpflichtigen Alter ergeben hat, und stellt derselben die Gegenleistung der Versicherten so gegenüber, als ob die Jahresprämien für alle diejenigen Knaben, welche am Leben bleiben, bei der Anstalt eingehen würden, während doch diejenigen, bei denen es zweifellos wird, dass sie zum Militärdienst untauglich geworden, ihre Versicherung sofort aufgeben werden und die weiteren Prämienzahlungen unterlassen. Die Anzahl der Zahlenden ist also nicht den Lebenden gleich. Letztere werden vielmehr alljährlich um einen später durch die Beobachtung zu ermittelnden Bruchteil zu verkleinern sein, und dieses hätte in der Formel ausgedrückt werden müssen. Die Gesammtleistung des Versicherten ist also geringer als die Formel des Verfassers ergiebt, und die Prämie stellt sich in Folge dessen höher. Wie gross der ziffermässige Unterschied ist, das wird sich freilich erst dann ermitteln lassen, wenn die Statistik dafür vorhanden ist; die Ansicht, die Differenz sei erheblich, hat vorläufig, wenn man die Nebenumstände berücksichtigt, wol mehr Berechtigung als die gegenteilige.

Auch demjenigen, was der Verfasser über die Wahl der Zahlen, welche in die Formeln einzuführen sind, äussert, können wir durchaus nicht zustimmen. Wenn derselbe meint, dass bei den von ihm in Betracht gezogenen Versicherungsarten diejenigen statistischen Verhältnisse, welche sich aus der allgemeinen an der Bevölkerung gemachten Beobachtung ergeben, den Berechnungen zu Grunde gelegt werden dürften, so übersieht er, dass hier ein Factor in Wirksamkeit tritt und eine grosse Rolle spielt, den die Engländer sehr treffend „Selection" benennen. Bei Versicherungen, welche bei Erreichung eines gewissen Alters fällig werden, darf man keineswegs mit dem Verfasser annehmen, die Sterblichkeit unter den Versicherten werde derjenigen, wie sie unter der allgemeinen Bevölkerung beobachtet worden, nahezu gleichkommen.

Und gerade bei der Militärdienstversicherung werden vorzugsweise nur solche Kinder beteiligt werden, bei denen man wegen ihrer kräftigen Constitution erwarten darf, dass sie das

militärpflichtige Alter erreichen und auch militärpflichtig befunden werden. In erhöhtem Masse richten sich diese Bedenken gegen die Annahme des Verfassers, es werde der Procentsatz der von den versicherten Personen zum activen Dienst herangezogenen 42 Procent nicht übersteigen, weil dies Verhältnis bei der allgemeinen Bevölkerung kaum erreicht werde. Wir möchten vielmehr annehmen, dass der Procentsatz aus der ausgewählten Gesellschaft der Versicherten ungleich höher ausfallen wird als bei der allgemeinen Bevölkerung, weil hier diejenigen, welche wegen ihrer Gebrechen oder Fehler vom Militärdienst befreit sind, fast gänzlich fehlen werden.

Und da über diese Verhältnisse das statistische Material bis jetzt nicht vorhanden ist, so halten wir die Folgerung des Verfassers, dass eine Versicherungs-Gesellschaft im Stande sein werde, mit den Prämien, wie sie sich auf Grund des von ihm empfohlenen Verfahrens berechnen, den übernommenen Verpflichtungen zu genügen, für eine überaus gewagte. Ls.

D. McAlister. On probability and Listerism. Ed. Times XXXVII. 40-42, 59-61.

McFarlane. On probability and Listerism. Ed. Times XXXVII. 77-80, 92.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, ist folgende: Von zehn Fällen, die nach der Lister'schen Methode behandelt wurden, verliefen sieben Fälle glücklich, während drei durch Blutvergiftung endeten; von vierzehn Fällen, bei denen gewöhnlicher Verband angewendet wurde, verliefen neun Fälle glücklich, während in fünf Fällen Blutvergiftung eintrat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Erfolg der Lister'schen Methode dem Zufall zuzuschreiben ist?

Ueber die Lösung der Aufgabe hat sich unter den Obengenannten eine Polemik entsponnen, an welcher sich auch H. MacColl, Miss Eliza Blackwood, Mr. Whitworth beteiligten. Die Lösungen, welche gegeben werden, sind die folgenden:

Dr. Macfarlane. Die Wahrscheinlichkeit des Erfolges einer Behandlung nach der Lister'schen Methode werde durch p, diejenige bei gewöhnlichem Verband durch q bezeichnet; dann ist $p-q$ die Wahrscheinlichkeit der Wirkung des antiseptischen Mittels, und die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gegebenen Falle der Erfolg der Lister'schen Methode nicht auf Rechnung ihres charakteristischen Teils zu setzen ist, findet er gleich $\frac{q}{p-q}$, das ist für die gegebene Aufgabe $\frac{45}{4}$.

Dr. Mc. Alister. Die Aufgabe hätte auch so eingekleidet werden können: Es sind zwei Urnen A und B vorhanden; in jeder derselben befindet sich eine grosse Anzahl weisser und schwarzer Kugeln. Aus A werden der Reihe nach $a+b$ Kugeln gezogen, davon sind a Kugeln weiss; aus B werden $p+q$ Kugeln gezogen, davon sind p Kugeln weiss. $\frac{a}{a+b}$ ist grösser als $\frac{p}{p+q}$, und die Aufgabe besteht darin, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass das Verhältnis der weissen Kugeln zu den schwarzen in der Urne B kleiner ist, als in der Urne A. Er berechnet dann für die vorliegenden Zahlen, dass man $3:2$ wetten kann, dass die Wahrscheinlichkeit des Erfolges bei der Lister'schen Methode der Methode selbst, und nicht dem Zufall zuzuschreiben ist.

Whitworth bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses unter der gewöhnlichen Methode durch p, unter der Lister'schen Methode durch μp, dann ist die a priori Wahrscheinlichkeit des beobachteten Gesammt-Ereignisses

$$P = p^8\,(1-p)^3\,(\mu p)^7\,(1-\mu p)^3,$$

wo μ irgend einen Wert zwischen 0 und $\frac{1}{p}$ haben kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass $\mu<1$, d. h. dass die Lister'sche Methode keinen Nutzen hat, ist

$$\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=1} P}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=\frac{1}{p}} P} = \frac{\int_0^1 \mu^7\,(1-\mu p)^3\,d\mu}{\int_0^{\frac{1}{p}} \mu^7\,(1-\mu p)^3\,d\mu} = 165p^8-440p^9+360p^{10}-120p^{11}.$$

Dies ist, $p = \frac{9}{14}$ gesetzt, gleich 0,0078, mithin ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit = 0,9922. Man kann also nach ihm 229 gegen 2 wetten, dass die Lister'sche Methode von Nutzen ist. Wir haben geglaubt, dass die grosse Verschiedenheit der Lösungen interessant genug sei, um hier mitgeteilt zu werden; auf die darüber geführte Polemik können wir nicht näher eingehen. Ls.

E. Césaro. Une question de probabilité. Math. II. 177-179.

Eine Stange von der Länge l wird in drei Stücke zerbrochen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei der Stücke kleiner sind als eine gegebene Länge a? Die Lösung erfolgt geometrisch, indem die Längen der drei Stücke durch die trilinearen Coordinaten eines Punktes dargestellt werden. Mn. (O.).

F. J. van den Berg. Over een meetkundig vraagstuk van kansberekening. Nieuw Arch. IX. 32-59.

Behandelt die öfters besprochene Aufgabe: wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Linie, welche einen gegebenen Kreis schneidet, ausserdem noch einen zweiten gegebenen Kreis schneiden wird? Die Auflösungen von Schoute und Crofton (Phil. Transact. 1868) gründen sich auf die Voraussetzung, dass schon von Anfang an die Geraden über die ganze Ebene in allen Teilen gleichmässig verteilt gedacht werden, und dass also in dieser Hinsicht die Beziehung, in welcher sie zu der ersten gegebenen Curve stehen, keinen Einfluss hat. Bei der vorliegenden Auflösung wird indessen angenommen, dass die in Rede stehenden Geraden von Anfang an auf eine andere mehr willkürliche Weise auf der Ebene liegen. Eingehender wird die Aufgabe behandelt für den Fall, dass die beiden Punkte, welche jede Schnittlinie mit dem ersten Kreis gemeinschaftlich hat, gleichmässig über den Kreisumfang verteilt sind, so dass sie als die Gesammtheit aller Seiten und Diagonalen eines regelmässigen in den Kreis beschriebenen

Vielecks von unendlich vielen Seiten angesehen werden können. Alle Fälle, welche von der gegenseitigen Lage der Kreise abhängen, werden dabei angegeben, ebenso wird die Formel für die geforderte Wahrscheinlichkeit aufgestellt und in die Form eines bestimmten Integrals gebracht. Dies Integral kann auch in eine unendliche Reihe entwickelt werden. G.

A. PÁNEK. Eine geometrische Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Cas. XI. 121-123. (Böhmisch).

Der kurze Aufsatz behandelt die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass zwei beliebige Punkte einer Dreiecksfläche vom Inhalte 1 auf derselben Seite einer durch andere zwei beliebige Punkte gezogenen Linie liegen. Der Verfasser findet hierfür den Wert

$$W = \frac{11}{18}.$$

Std.

CAVALLIN, D. EDWARDES. Solutions of a question (6743). Ed. Times XXXVII. 24.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Umfang eines Dreiecks, dessen Ecken in dem Mittelpunkte eines Kreises mit dem Radius r und zwei beliebigen Punkten auf diesem Kreise liegen, kleiner ist als $3r$, ist

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}6285\ldots .$$

O.

Weitere Lösungen von Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit von MATZ, T. R. TERRY, MC FARLANE, G. F. WALKER, H. MC COLL, L. TANNER, W. J. C. MILLER, D. EDWARDES, B. EASTON, J. HAMMOND, SEITZ, CH. LADD, NASH finden sich Ed. Times XXXVI. 24, 27-28, 55-56, 72, 83, 101-102, 114; XXXVII. 27-28, 82-83, 85-86, 92-93, 101.

O.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

O. Hölder. Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze. Klein Ann. XX. 535-549.

Wenn die Partialsummen

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n$$

für $\lim n = +\infty$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen G_1, H_1 besitzen, so convergirt die Potenzreihe

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

für alle Werte $-1 < x < +1$, und ihre Summe $f(x)$ hat beim Grenzübergange $\lim x = 1-0$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen G_2, H_2, deren Unterschied nicht grösser sein kann als $H_1 - G_1$. Im Falle, dass für s_n ein Grenzwert bei $\lim n = +\infty$ existirt, geht der Satz in einen bekannten Abel'schen über. Sind die $s_1, s_2, s_3, \ldots$ nicht endlich, so bilde man

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s'_n.$$

Dann gilt der vorstehende Satz auch, wenn man s'_n setzt statt s_n, und enthält als speciellen Fall einen Satz von Frobenius (siehe F. d. M. XII. 1880. p. 188). Ihn weiter zu verallgemeinern gestatten wenigstens die Beweise des Herrn Verfassers nicht. Da-

gegen zeigt er den Satz: „Wenn $\lim s'_n$ für $\lim n = +\infty$ nicht existirt, so setze man

$$\frac{s'_1+s'_2+\cdots+s'_n}{n} = s''_n$$

. . . .

$$\frac{s_1^{(\gamma-1)}+s_2^{(\gamma-1)}+\cdots+s_n^{(\gamma-1)}}{n} = s_n^{(\gamma)};$$

ist nun $\lim_{n=\infty} s_n^{(\gamma)} = c$ (endlich), so folgt $\lim_{x=1} f(x) = c$.“ Der Satz gilt auch für complexe Werte der a_n.

Analoge Verallgemeinerung lässt der folgende auf Dirichlet zurückzuführende Satz zu: Es ist

$$\lim_{w=+0} \left\{ w \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} \right\} = c,$$

wenn

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = c.$$

St.

T. J. Stieltjes jr. Over eenige theorema's omtrent oneindige reeksen. Nieuw Arch. IX. 98-106.

In Borchardt's J. IXC. (s. F. d. M. XII. 1880. p. 188) stellt Herr G. Frobenius in der Arbeit über die Leibniz'sche Reihe den Satz auf: „Ist s_n eine von n abhängige Grösse, und nähert sich

$$\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n}$$

bei wachsendem n einer bestimmten, endlichen Grenze, so nähert sich

$$(1-x)\ (s_0+s_1x+s_2x^2+s_3x^3+\cdots),$$

falls x beständig zunehmend gegen 1 convergirt, derselben Grenze.“

In der vorliegenden Arbeit wird diesem Satz die folgende Erweiterung gegeben. Unter derselben Voraussetzung sollen, wenn $u>0$ ist, die Reihen

$$(1-x)^u \left[s_0 + \frac{u}{1} s_1 x + \frac{u(u+1)}{1.2} s_2 x^2 + \frac{u(u+1)(u+2)}{1.2.3} s_3 x^3 + \cdots \right]$$

und

$$\frac{s_1 x + \frac{1}{2} s_2 x^2 + \frac{1}{3} s_3 x^3 + \frac{1}{4} s_4 x^4 + \cdots}{l\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

nach derselben Grenze convergiren.

Der Beweis stimmt mit dem von Frobenius völlig überein. Als Beispiel wird die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

genommen unter der Voraussetzung, dass die Reihe für $x = 1$ divergirt. G.

R. Mildner. Ueber Ableitung neuer unendlicher Reihen aus einer gegebenen durch Umstellung der Vorzeichen nach einem bestimmten Gesetze. Wien. Ber. LXXXVI. 999-1051.

Es handelt sich um die Aufgabe: aus dem gegebenen Werte einer Potenzreihe

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots \qquad (|x| < a)$$

den Wert derjenigen Reihe zu ermitteln, die aus jener hervorgeht, wenn abwechselnd eine beliebige Anzahl k auf einander folgender Glieder unverändert gelassen wird, während die Vorzeichen der nächsten k Glieder umgekehrt werden, d. h. der Reihe

$$R = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_{k-1} x^{k-1}) - (A_k x^k + \cdots + A_{2k-1} x^{2k-1}) + (A_{2k} x^{2k} + \cdots) - \cdots .$$

Von der bekannten Beziehung ausgehend, dass die aus der obigen abgeleitete neue Reihe

$$A_0 + A_k x^k + A_{2k} x^{2k} + \cdots = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{k-1} f\left(x e^{\frac{2\pi i g}{k}}\right) \qquad (|x| < a)$$

ist, leitet der Verfasser als Lösung der Aufgabe die für $|x| < a$ gültigen Formeln ab:

$$R = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{k-1} \left(i . tg \frac{g\pi}{k} + 1\right) f\left(-x e^{\frac{2g\pi i}{k}}\right),$$

die nur für ungrade k gilt; und

$$R = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{k-1}\left(1-i.\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\right)f\left(xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}\right),$$

die für alle ganzzahligen Werte k gültig ist. Aehnliche Formeln ergeben sich für:

$$R' = (A_1x+A_2x^2+\cdots+A_kx^k)-(A_{k+1}x^{k+1}+\cdots+A_{2k}x^{2k}) + (A_{2k+1}x^{2k+1}+\cdots)-\cdots.$$

Als Beispiele werden nach dieser Richtung hin die einfachsten der fundamentalen Reihen der Analysis ausführlich behandelt.

T.

J. Marchand. Note sur un développement d'une fonction en série. Nouv. Ann. (3) I. 450-458.

Es wird ausgegangen von der Beziehung

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)\,dx = \int_{\mu_1}^{\mu} F(\mu_1+\mu-x)\,dx;$$

dieselbe wird auf $\int_{\mu_1}^{\mu} F'(x)\,dx$ angewendet; durch nachherige Anwendung von Integrationen nach Teilen ergiebt sich die MacLaurin'sche und Taylor'sche Formel mit ihren Restgliedern. Ferner wird namentlich auf die Anwendbarkeit der aus obiger Beziehung sich ergebenden Folgerungen:

$$\int_{\mu_1}^{\mu} f_1(\mu_1+\mu-x)\,f_2(\mu_1+\mu-x)\cdots f_p(\mu_1+\mu-x)\,f_{p+1}(x)\cdots f_n(x)\,dx$$
$$= \int_{\mu_1}^{\mu} f_1(x)\,f_2(x)\cdots f_p(x)\,f_{p+1}(\mu_1+\mu-x)\cdots f_n(\mu_1+\mu-x)\,dx$$

und

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)dx = \int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu}{2}} F(x)\,dx + \int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu}{2}} F(\mu_1+\mu-x)\,dx$$
$$= \int_{\frac{\mu+\mu_1}{2}}^{\mu} F(x)dx + \int_{\frac{\mu+\mu_1}{2}}^{\mu} F(\mu_1+\mu-x)dx$$

aufmerksam gemacht und beispielsweise

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \pi$$

hergeleitet. T.

J. S. Hayes. A demonstration of Maclaurin's theorem. Anal. IX. 12-14.

Fortsetzung der Arbeit aus Anal. VIII. p. 154. s. F. d. M. XIII. 1881. p. 174. Jn. (O.).

J. M. Rodrigues. Sobre a formula de Lagrange. Teixeira J. IV. 121-176. (Portugiesisch).

Die Reihe von Lagrange lässt sich nach der Richtung verallgemeinern, dass man mehr als eine der Wurzeln einer vorgelegten Gleichung entwickeln kann. Der Verfasser geht von der Gleichung

$$f(x) \pm a\varphi(x) = 0$$

aus und zeigt, dass sich eine Function $F(x)$ einer Wurzel dieser Gleichung entwickeln lässt mit Benutzung der Formel

$$F(x) = F(a) + \sum_i (-1)^i \frac{a^i}{1.2\dots i} \frac{d^{i-1}}{da^{i-1}} \left[F'(a)\left(\frac{\varphi(a)}{f'(a)}\right)^i\right],$$

wenn a eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0, \text{ und mod. max.} \left[a\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right] < 1$$

ist. Bei algebraischen Gleichungen

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_0 = 0$$

setzt Herr Rodrigues

$$x^n + A_0 = f(x),$$

was n Werte für die Wurzel a giebt, die in die obige Reihe eintritt.

Herr Rodrigues stellt auch $F(x)$ durch ein bestimmtes Integral dar, in welches a eintritt. Ferner leitet er aus seiner Formel

einige andere bekannte Reihenentwickelungen her und schliesst mit der Entwickelung einer Reihe von Resultaten, die für algebraische Gleichungen von Interesse sind. Tx. (O.).

T. J. Stieltjes jr. Over Lagrange's interpolatie-formule. Amst.; Versl. en Meded. XVII. 239-254.

Der Zweck dieser Untersuchung ist, den Rest der Lagrange'schen Interpolationsformel in eine einfachere Gestalt als die eines bestimmten Integrals zu bringen und auch ohne Integralrechnung abzuleiten, ebenso, wie dies mit dem Rest der Taylor'schen Reihe geschieht. Der Verfasser benutzt hierzu eine Erweiterung des Theorems von Rolle, und bringt die Reihe auf die Form:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x-x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p) + \frac{\varphi(x)}{1.2.3\ldots n} f^n(\xi),$$

wo

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

und ξ einen Wert hat, welcher zwischen dem grössten und dem kleinsten Wert der Zahlen $x, x_1, \ldots, x_n$ liegt.

Hieraus werden einige Folgerungen gezogen.

G.

H. Poincaré. Sur les séries trigonométriques. C. R. XCV. 766-768.

Die Reihe $\varphi(t) = \Sigma A_p \sin \alpha_p t$, worin A_p, α_p positive Zahlen bezeichnen, convergirt, falls $\Sigma A_p \alpha_p$ convergirt. Nimmt man an, dass $\frac{1}{A_p}$ und α_p für $\lim p = +\infty$ den Grenzwert 0 haben, so kann $\varphi(t)$ dem absoluten Betrage nach jede Zahl überschreiten; eine Bemerkung, welche für die Mechanik des Himmels nicht ohne Interesse ist. St.

W. Veltmann. Die Fourier'sche Reihe. Schlömilch Z. XXVII. 193-235.

Die Abhandlung untersucht das Verhalten der Fourier'schen Reihe im Anschluss an eine frühere Arbeit des Herrn Verfassers (vgl. d. Jahrb. XIII. 1881. 327). Von den einleitenden Sätzen über Potenzreihen ist hier zu erwähnen der Satz V., der übereinstimmt mit dem ersten Satze des Herrn Hölder, welchen wir oben p. 180 angeführt haben.

Die Fourier'sche Reihe wird gebildet mit einer Function $f(\gamma)$, welche für die Werte $0 \leqq \gamma \leqq 2\pi$, die auf einer Kreislinie vom Radius 1 construirt werden, in folgender Art definirt ist. Innerhalb eines jeden Bogens, sei er auch noch so klein, ist ein Bogen vorhanden, für dessen Punkte (die Grenzen ausgeschlossen) $f(\gamma)$ eindeutig definirt und stetig ist. Dabei liegen sämmtliche Werte $f(\gamma)$ zwischen denselben endlichen Zahlen. Zufolge dieser Annahme haben wir in jedem nicht im Innern eines Stetigkeitsbogens liegenden Punkte (p) endliche Unbestimmtheits-Grenzen für $f(\gamma)$, sowohl von rechts als auch von links her; die beiden ersteren, sowie die beiden letzteren können auch zusammenfallen. Als $f(p)$ kann jeder Wert gelten, der zwischen den am weitesten von einander abstehenden unter diesen vier Zahlen liegt. Die Stetigkeitsbögen können nach ihrer Grösse geordnet werden, wobei zu beachten ist, dass ihre Summe auch kleiner als 2π sein kann. (Vergl. eine ähnliche Bemerkung bei Herrn Harnack, Klein Ann. XIX. p. 238, siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 182). Die auf die angegebene Art definirten Functionen zerfallen in zwei Klassen, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ integrirbaren und die nicht integrirbaren. Die ersteren sind dadurch charakterisirt, dass die Summe derjenigen Zwischenbögen n^{ter} Ordnung (d. i. derjenigen Bögen, welche von der ganzen Kreislinie nach Ausscheidung der Stetigkeitsbögen 1ter bis n^{ter} Grösse übrig bleiben), in deren jedem die Differenz des grössten und kleinsten Functionswertes (richtiger: der oberen und unteren Grenze von $f(\gamma)$) grösser als eine gegebene, sonst beliebige Grösse δ ist, mit wachsendem n zur Grenze Null convergirt. Nicht integrirbar im Intervalle $(0, 2\pi)$ ist $f(\gamma)$, wenn eine bestimmte Grösse δ existirt, so dass die soeben erwähnte Summe bei noch so grossem n nicht kleiner als eine bestimmte Grösse b wird. Beide

Sätze folgen unmittelbar aus dem Riemann'schen Begriffe der integrirbaren Function.

Die allgemeinen Sätze über die Summe der Fourier'schen Reihe scheinen im Wesentlichen nichts Neues darzubieten. (Vgl. z. B. Dini, Serie di Fourier I. p. 100). Beachtenswert ist eine vom Herrn Verfasser aufgestellte specielle Fourier'sche Reihe, die divergent ist in Punkten, welche die ganze Kreislinie in lauter unendlich kleine Teile zerlegen, während sie für andere Punkte, welche ebenfalls überall einander unendlich nahe sind, convergirt, und ihre Summe gleich ist dem Werte der Function, aus welcher sie abgeleitet ist. Am Schlusse der Abhandlung wird noch die Frage erörtert, ob eine Function $f(y)$ von den bisher vorausgesetzten Eigenschaften auf mehr als eine Weise in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann. St.

A. Harnack. Théorie de la série de Fourier. Darb. Bull. (2) VI. 242-260, 265-280, 282-300.

G. Halphén. Sur la série de Fourier. C. R. XCV. 1217-1219.

Herr Harnack hat die im vorigen Bande p. 182 angezeigte Abhandlung nach Massgabe des von ihm selbst darin gefundenen Fehlschlusses neu redigirt. Der § I, 14 Lehrsätze enthaltend, auf denen einige von den folgenden Sätzen beruhen, ist unverändert geblieben, und bietet somit noch immer Anlass zu Bedenken. Auch der fünfte Satz erscheint dem Referenten jetzt nicht mehr als völlig sicher.

Eine trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

heisst im Intervalle (a, b) „im Allgemeinen" convergent, wenn die Werte x, in denen die Differenz der Unbestimmtheitsgrenzen von

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

für $\lim n = +\infty$ grösser als eine beliebige positive Zahl δ oder unendlich ist, eine discrete Menge bilden. Convergirt eine solche

Reihe in einem beliebigen Intervalle im Allgemeinen, so folgt sofort $\lim a_n = \lim b_n = 0$ für $\lim n = +\infty$. Sind die Unbestimmtheitsgrenzen von $s_n(x)$ für $\lim n = +\infty$ im Intervalle $(-\pi, +\pi)$ nur in discreten Punkten, absolut genommen, grösser als eine beliebige Zahl $\delta > 0$, so ist

$$a_n = b_n = 0. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist nicht allein $f(x)$ im Intervalle $(-\pi, +\pi)$ integrabel, sondern auch $[f(x)]^2$, so hat man stets

$$(1) \qquad \lim_{n=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx = \lim_{n=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0.$$

Es folgt dies einfach aus der Betrachtung des Integrales

$$(2) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - s_n(x)]^2\, dx,$$

unter $s_n(x)$ die Summe der $(n+1)$ Anfangsglieder der Fourier'schen Reihe verstanden. Man findet ferner

$$(3) \qquad \lim_{n=+\infty} \int_{x_0}^{x_1} s_n(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Für das Verhalten der Fourier'schen Reihe für einen bestimmten Wert von x ist nur das des Integrales

$$\int_0^{\delta} [f(x+\beta) + f(x-\beta)] \frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta \qquad (\delta > 0)$$

bei $\lim n = +\infty$ massgebend. Ist $f(x+0) + f(x-0)$ eine endliche Zahl y, so convergirt sie demnach zum Werte $\frac{1}{2}y$ nur, wenn

$$\lim_{n=+\infty} \int_0^{\delta} [f(x+\beta) + f(x-\beta) - y] \frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta = 0,$$

woraus die wichtigsten der bisher bekannten Sätze über die Convergenz der Fourier'schen Reihe abgeleitet werden.

Wenn $f(x)$ integrabel ist, $[f(x)]^2$ aber nicht, so bestehen die Sätze (1) und (3) noch fort, falls $f(x)$ innerhalb der bezüglichen Intervalle absolut integrabel ist.

Nun folgt der Nachweis des Satzes von P. du Bois-Reymond (jede trigonometrische Reihe, welche eine integrable Function

definirt, ist eine Fourier'sche Reihe), und der Nachweis der von Riemann angegebenen Entwickelungen einer gewissen nicht-integrabeln Function in eine trigonometrische Reihe.

Am Schlusse findet man Regeln über die Differentiirung und Integrirung von trigonometrischen Reihen.

Auf dieselbe Weise wie Herr Harnack beweist Herr Halphén den Satz (1). Er bemerkt (gegen Herrn Hugoniot), dass das Verschwinden des Integrales (2) bei $\lim n = +\infty$ allein nicht berechtige, auf die Convergenz der Fourier'schen und ähnlicher Reihen zu schliessen. St.

A. Harnack. Berichtigung. Klein Ann. XIX. 524-529.

Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 182.

F. Lindemann. Ueber das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen. Klein Ann. XIX. 517-523.

Durch Rechnung wird direct gezeigt, dass die Fourier'sche Reihe gleichmässig convergirt an einer Stelle, wo die dargestellte Function stetig ist (was Heine zuerst bewiesen hat); und dass die Convergenz derselben unendlich verzögert wird, wenn sich das Argument einer Stelle nähert, wo die dargestellte Function unstetig ist (was Seidel zuerst dargelegt hat). St.

David. Application de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes. Résal J. (3) VIII. 61-72.

Siehe Abschn. III. Cap. 1. p. 129.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

O. Schier. Ueber Potenzsummen rationaler Zahlen. Wien. Gerold's Sohn.

Al. Zdrahal. Ueber eine Eigenschaft der Binomial-Coefficienten. Cas. XI. 47. (Böhmisch).

Enthält einen neuen, auf combinatorischer Basis aufgebauten Beweis des Satzes, dass

$$\Sigma\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}\cdots=\binom{a+b+c+\cdots}{r},$$

falls die Bedeutung

$$r=\alpha+\beta+\gamma+\cdots$$

eingeführt wird, und $\binom{m}{\mu}$ symbolisch einen Binomialcoefficienten bezeichnet. Std.

J. C. O'Neil de Medeiros. Sobre um problema de algebra elementar. Teixeira J. IV. 177-184.

Entwickelung von x^m+x^{-m} nach Potenzen von x^1+x^{-1}.
Tx. (O.).

H. J. Krantz. Solution d'une question (1322). Nouv. Ann. (3) I. 419-421.

$\sqrt{5}$ ist die Grenze des Verhältnisses der beiden Reihen

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{34^2}+\frac{1}{89^2}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{3}{8}-\frac{4}{21}+\frac{5}{55}-\frac{6}{144}+\cdots.$$

O.

R. RAWSON, R. KNOWLES. Solution of a question (7049). Ed. Times XXXVII. 109.

Beweis, dass

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{12}-\cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\pi+\log(\sqrt{2}-1)\right\}.$$

O.

V. JAMET. Sur le développement de arctang x en série convergente. Math. II. 52-57.

Die Entwickelung geschieht ohne Benutzung der Differential- und Integralrechnung. Mn.

T. J. STIELTJES jr. Over een algorithmus voor het meetkundig midden. Nieuw Arch. IX. 198-211.

Diese Arbeit schliesst sich an eine andere desselben Verfassers an, welche sich in Borchardt J. LXXXIX. p. 343 (siehe F. d. M. XII. 1880. p. 189) findet. Die Beweise der dort gegebenen Sätze über das geometrische Mittel einiger reeller Zahlen werden hier ausführlich mitgeteilt und durch Beispiele erläutert. Für complexe Werte der Zahlen liefert die Anwendung im Allgemeinen grosse Schwierigkeiten, welche nur verschwinden, wenn man sich auf zwei Zahlen beschränkt. G.

A. SACHSE. Ueber die Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten. Hoppe Arch. LXVIII. 427-432.

Siehe Abschn. II. Cap. 3. p. 110.

M. A. STERN. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen. Kronecker J. XCII. 349-351.

Während schon Euler in seiner Differentialrechnung gezeigt hat, dass die Bernoulli'schen Zahlen allmählich in's Unendliche

wachsen, hat der Herr Verfasser noch nirgends die einfache Eigenschaft dieser Zahlen bewiesen oder auch nur ausgesprochen gefunden, dass dieselben von der vierten an ohne jede Unterbrechung wachsen. Der Beweis hierfür wird ohne Schwierigkeit geführt, indem von der Euler'schen Definition der ν^{ten} Bernoulli'schen Zahl ausgegangen wird:

$$B_\nu = \frac{1 \cdot 2 \dots 2\nu}{2^{2\nu-1}\pi^{2\nu}} S_{2\nu},$$

wo

$$S_{2\nu} = 1 + \frac{1}{2^{2\nu}} + \frac{1}{3^{2\nu}} + \cdots$$

ist. Aus den bekannten Werten für die ersten Bernoulli'schen Zahlen ergiebt sich weiter, dass es deren nur zwei, nämlich B_2 und B_4 giebt, die einander gleich sind, und dass B_2 und B_3 kleiner als B_ν für $\nu > 4$ sind, während $B_1 < B_\nu$ für $\nu > 5$ ist.

T.

A. Berger. Elementära bevis för några formler i differenzkalkylen. Stockh. Öfv. XXXVII. 39-53.

Eine bekannte Relation der Bernoulli'schen Zahlen, sowie Ausdrücke für Σk^m (m positiv, ganz) und $\Sigma \log k$ werden auf neue Art hergeleitet. Ausserdem wird folgende halb-convergente Entwickelung für ein beliebiges reelles $\mu < 1$ gegeben:

$$1^\mu + 2^\mu + \cdots + x^\mu$$
$$= \frac{x^{\mu+1}-1}{\mu+1} + \frac{x^\mu}{2} + K_\mu + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1} B_k(\mu)_k}{2kx^{2k-1-\mu}}$$
$$+ (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}(\mu)_{2n+1}}{2(n+1)x^{2n+1-\mu}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

wo die Constante K_μ durch eine unendliche Reihe dargestellt ist.

H.

G. F. Walker. On a certain inequality and a limit. Mess. (2) XII. 37-38.

Beweis, dass für alle Werte von p und q, ausser 0, $\frac{x^p - y^p}{x^q - y^q}$

zwischen $\frac{p}{q}x^{p-q}$ und $\frac{p}{q}y^{p-q}$ liegt. Daraus folgt, wie der Verfasser zeigt, dass für $m=\infty$

$$\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+m^p}{m^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$

Glr. (O.).

J. Thomae. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. (Fortsetzung). Schlömilch Z. XXVII. 41-56.

Zwischen je drei Lösungen der im Früheren (Schlömilch Z. XXVI., vgl. F. d. M. XIII. 1881. p. 196) aufgestellten dreigliedrigen Recursionsformel mit linearen Coefficienten in n findet eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten statt, um deren Bestimmung es sich zunächst handelt. Da der Recursionsformel durch hypergeometrische Reihen genügt wird, in in denen das letzte Element x als Parameter auftritt, so hat die Lösung dieser Aufgabe zugleich Wichtigkeit für die Frage der Fortsetzung der durch die hypergeometrische Reihe definirten Function ihres letzten Elements über das Convergenzgebiet hinaus. Diese Frage wird hier dadurch erledigt, dass die Reihen, als Lösungen der Recursionsformel, zwischen denen der Zusammenhang festgestellt wird, als Functionen von n überall, und als Functionen von x in verschiedenen Gebieten, die gemeinsame Teile haben, convergiren. Die erhaltenen Resultate liefern dann das Mittel, die hypergeometrische Reihe als Function ihres letzten Elements vollständig zu definiren und ihren Verlauf in der ganzen Ebene, insbesondere ihr Verhalten bei Umkreisungen der singulären Punkte 0, 1, ∞ zu bestimmen.

Hr.

G. Heppel and T. R. Terry. Solutions of a question (6978). Ed. Times XXXVII. 98-100.

Die von Herrn Sylvester gestellte Aufgabe war die, nachzuweisen, dass, wenn i und j zwei ganze positive Zahlen, und j nicht grösser als i,

$$(x-1)(x-2)\dots(x-i+1) - \frac{j}{i-j+1}\,x(x-1)\dots(x-i+2)$$
$$+\frac{j(j-1)}{(i-j+1)(i-j+2)}(x+1)\,x\dots(x-i+3)$$
$$-\frac{j(j-1)(j-2)}{(i-j+1)(i-j+2)(i-j+3)}(x+2)(x+1)\dots(x-i+4)+\cdots$$
$$=\frac{i-j}{i}\,\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-i)}{x+j-i}$$

ist. Diese merkwürdige Relation wird von Herrn Heppel durch den Schluss von j auf $j+1$ bewiesen. Herr Terry benutzt zum Beweise die bekannte Reihe

$$1-\frac{i}{1}\,\frac{p}{(i-p+1)}+\frac{i(i+1)}{1.2}\,\frac{p(p-1)}{(i-p+1)(i-p+2)}+\cdots=0$$

für positive ganze p. Am Schluss wird auf den Zusammenhang der obigen Reihe mit der hypergeometrischen Reihe

$$F(i,\ -p,\ i-p+1,\ 1)$$

hingewiesen. M.

M. d'Ocagne. Sommation d'une série remarquable. Nouv. Ann. (3) I. 171-173.

Für die von Stainville (Gergonne Ann. t. IX.) und dann von Gergonne und Ampère (ib. t. IX. und XV.) behandelte verallgemeinerte Exponentialreihe

$$S = 1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+\cdots$$
$$+a(a+k)\dots(a+[n-1]k)\frac{z^n}{1.2\dots n}+\cdots\left(z<\frac{1}{k}\right)$$

wird die Differentialgleichung $\frac{dS}{dz}=\frac{a}{1-kz}S$ hergeleitet und aus dieser ihre Summe $S=(1-kz)^{-\frac{a}{k}}$ erhalten.

T.

E. Catalan. Sur un article des Nouvelles Annales de Mathématiques. Math. II. 101.

Die Reihe

$$1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots$$

von de Stainville, Gergonne, Ampère und M. d'Ocagne ist ein Specialfall der Binomialreihe und hat zur Summe

$$(1-kz)^{-\frac{a}{k}}.$$

Mn. (O.).

M. d'Ocagne. Sur le développement des logarithmes et des exponentielles. Nouv. Ann. (3) I. 241-245.

Um aus einer der folgenden Reihen

$$f(x) = A_0+A_1\varphi(x)+A_2\varphi(x)^2+\cdots+A_n\varphi(x)^n+\cdots,$$
$$\log f(x) = a_0+a_1\varphi(x)+a_2\varphi(x)^2+\cdots+a_n\varphi(x)^n+\cdots$$

die Coefficienten der anderen zu bestimmen, wird die erste logarithmisch, die zweite gewöhnlich nach x differentiirt; durch Vergleichung der Coefficienten erhält man zwischen den a und den A eine fortlaufende Reihe von Gleichungen folgender Art:

$$nA_n = na_nA_0+(n-1)a_{n-1}A_1+(n-2)a_{n-2}A_2+\cdots+a_1A_{n-1},$$
$$(a_0 = \log A_0,\; A_0 = e^{a_0}),$$

mit Hülfe deren sich sowohl die a durch die A, wie umgekehrt, recurrirend oder auch durch Determinanten darstellen lassen. Die Entwickelungen von $\log(1+x)$ und e^x nach Potenzen von x dienen als Beispiele. T.

Macfarlane. Solution of a question (6859). Ed. Times XXXVI. 116-117.

Mit Hülfe der Formel

$$\log[a^2+b^2+2ab\cos(\alpha-\beta)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\log a+\frac{b}{a}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2(\alpha-\beta)+\cdots,$$

wo a, b; α, β resp. Längen und Winkel zweier Vectoren in einer Ebene sind, wird bewiesen, dass

$$\log\left(1-\frac{2\eta}{1+\eta^2}\cos x\right)=-\eta^2+\frac{1}{2}\eta^4-\frac{1}{3}\eta^6+\cdots$$
$$-2\eta\cos x-\frac{1}{2}\cdot 2\eta^2\cos 2x-\frac{1}{3}\cdot 2\eta^3\cos 3x-\cdots$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\eta^{2i}}{i}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\eta^i}{i}\cos ix.$$

M.

J. Cohn. Beweis einer Entwickelung einer Function der Länge und der Lage einer geraden Linie in eine gewisse unendliche Reihe. Warsch. J. 1881. (Polnisch).

Der Verfasser zeigt, wie eine von C. A. Bjerknes in der Schrift: „Sur le mouvement simultané des corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible“ ohne Beweis gegebene Entwickelung einer gewissen Function erhalten werden kann. Dn.

Tanner, R. Harley. Solutions of a question (6919). Ed. Times XXXVII. 42-43.

Wenn

$$u_{x+1}-u_x^2+u_x-1=0,$$

so ist

$$\Sigma\frac{1}{u_x}=\frac{1}{u_0-1}-\frac{1}{u_{x+1}-1}.$$

O.

Weitere Lösungen von Aufgaben über specielle Reihen von W. J. C. Sharp, A. McMurchy, A. Cohen, K. Gale, T. R. Terry, S. Marks finden sich Ed. Times XXXVI. 35; XXXVII. 50, 112.

O.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

O. Schlömilch. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. II. Aufgaben aus der Integralrechnung. 3[te] Aufl. Leipzig. B. G. Teubner.

Die in dieser reichen Sammlung enthaltenen, teils die einfachen Fälle erschöpfenden, teils als besonders instructiv ausgewählten Aufgaben beziehen sich auf Integration entwickelter Functionen einer Variabeln, Quadratur, Rectification, Cubatur, Complanation, Berechnung bestimmter Integrale, Reihen, Doppel- und dreifache Integrale, Mittelwerte, Differentialgleichungen erster und höherer Ordnungen. Regeln sind überall beigegeben.

H.

M. Pasch. Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig. B. G. Teubner.

Der Verfasser findet, dass die Principien der Differential- und Integralrechnung, mit wenigen Ausnahmen in den Lehrbüchern nicht mit der gegenwärtig erreichbaren Strenge entwickelt sind.

Er lässt zu und rechtfertigt es, dass Vorlesungen für Anfänger nicht auf alle, im Grunde notwendigen Fragen eingehen, weil doch der Erfolg zweifelhaft sei; doch nur in sofern ein späterer Cursus die Strenge nachholen könne. Grade in Rücksicht auf diesen Fall sei aber ein Buch nützlich, welches sich mit Beschränkung auf die principiellen Lehren die Strenge mit grösster Ausführlichkeit zur Hauptaufgabe macht. Unter diesem Gesichtspunkt ist das vorliegende Buch bearbeitet. Des Verfassers erste Sorge ist, den Begriff der Irrationalzahl klar zu machen. Es wird der Begriff einer „Zahlenstrecke“ mit Beschränkung der Zahl auf positive ganze und Quotienten solcher als eine Gruppe von Zahlen von folgenden drei Eigenschaften definirt: Die Gruppe umfasst nicht alle Zahlen; wenn die Zahl x zur Gruppe gehört, so gehören zu ihr auch alle kleineren Zahlen; es giebt keine grösste Zahl in der Gruppe. Dieser Begriff vermag den der rationalen und irrationalen Zahl vollkommen zu ersetzen. Da der Name nach seiner Substitution frei wird, kann man statt Zahlenstrecke Zahl sagen. Der Erklärung gehen Sätze über Potenzen voraus, welche für die Theorie der irrationalen Potenzwurzeln gebraucht werden. Es folgt ihr der Nachweis, dass der neue Zahlbegriff für die algebraischen Operationen tauglich ist.

Ueber das Vorstehende können wir ohne Kritik nicht hinweggehen. Die im Vorwort ausgesprochenen Motive und allgemeinen Grundsätze bezüglich der Strenge lassen die Unterscheidung zwischen Bündigkeit und Ausführlichkeit sehr vermissen. Letztere ist es, welche sich nachholen lässt, nicht erstere. Der Verfasser macht die unbegründete Voraussetzung, dass Strenge und Einfachheit unvereinbar seien. Ihm ist also auch die Erfahrung fremd, dass die allseitige Strenge den Weg zur einfachsten Methode eröffnet. Um das Ziel zu erreichen, darf man sich nicht mit der ersten bündigen Feststellung begnügen, wie es hier geschieht.

Gehen wir auf die Ausführung ein, so ist der Begriff der Zahlenstrecke, als deren Autor Dedekind genannt wird, nebst seiner Anwendung und seiner Substitution für den Zahlenbegriff mit grosser Sorgfalt und Umsicht dargelegt. Was aber den ver-

meintlichen Erfolg betrifft, so sind ganz wesentliche Einwände dagegen zu erheben. Die Substitution des Begriffs der Zahlenstrecke für den Zahlbegriff entzieht ersterem den Boden. Denn bei ihrer durchgehenden Anwendung ist die Zahlenstrecke eine Gruppe von Zahlenstrecken, die Erklärung also ein Cirkel. Es leuchtet hiernach und zwar nicht erst hiernach, ein, dass wir den gewöhnlichen Zahlenbegriff nicht entbehren können; und dann ist es nicht gestattet, den Namen Zahl für die Zahlstrecke zu gebrauchen. Es ist eine Täuschung, wenn der Verfasser meint, einen umfassenderen Zahlbegriff gewonnen zu haben, da derselbe ohne Recurs an den ursprünglichen nie gedacht werden kann. Ist jedoch das Ziel auch nicht erreicht, so ist der Weg, auf dem der Begriff der Irrationalzahl gesucht wird, darum nicht zu verwerfen, auch ist der Fehler, welcher am Mislingen schuld war, leicht genug zu enthüllen. Beruht in der Tat, was zugestanden sein mag, der Begriff der Irrationalzahl auf der Zahlenstrecke, so folgt daraus nicht, dass beide identificirt werden müssen. Dieses voreilige Zuwerkegehen, welches die Wurzel des Begriffs unmittelbar zum Begriff selbst stempelt (z. B. die Sinnesempfindungen dem Körper begrifflich gleich setzt), hat schon oft in Sackgassen geführt. Da in der Tat die Irrationalzahl der Grenzwert der Zahlenstrecke ist, so ist der bei Identificirung begangene Fehler genau derselbe, wie überhaupt bei Identificirung von Function und Grenzwert, derselbe also auch, welcher alle vermeintlichen Schwierigkeiten im Begriff der unendlichen Grössen verursacht hat. Statuirt man zwei Begriffe, Zahlenstrecke und Zahl, die ungleich sind, deren erstere aber die Grösse der letzteren bestimmt, so sind der logische Mangel und die übrigen Inconvenienzen sofort beseitigt.

Im Anschluss an obige Theorie erklärt der Verfasser 0 und ∞ für „Zahlen", deutet also damit an, dass sie in der Definition als Zahlenstrecken mit enthalten seien. Dies ist jedoch unrichtig; denn ∞ erfüllt die erste der drei Bedingungen nicht, und auf 0 lässt sich die Definition nicht anwenden, weil es keine kleineren Positiven giebt. Der Verfasser will zwar auf das Nähere nicht eingehen; da jedoch die Zeichen 0 und ∞ nachher ohne Er-

klärung häufig vorkommen, so war es nötig, die erweckte Meinung, als sei der Begriff für das absolute Unendliche gefunden, zu widerlegen.

Die erschöpfende Gründlichkeit und Consequenz, mit welcher der Anfang bearbeitet war, ist jedoch auch mit diesem Anfang zu Ende. Was folgt, charakterisirt sich durch folgende Eigentümlichkeiten. Mit dem vorher erklärten neuen Zahlbegriff steht es in keiner sichtlichen Verbindung. Die ferneren Erklärungen gehen nicht direct auf ihr Ziel aus; sondern beginnen mit Beispielen, ohne hernach den allgemeinen Begriff davon sichtlich zu unterscheiden und zu kennzeichnen. In die Erklärungen von Grenzwert und Differentialquotient wird gleich von Anfang die Bemerkung eingemischt, dass es sich bei praktischer Verwendung immer nur um begrenzte Genauigkeit handeln kann. Die exacte Geltung dieser Begriffe so abzuleugnen, konnte der Verfasser in methodischen Schwierigkeiten keinen Grund finden; denn, was den exacten Begriff ausmacht, kommt reichlich an anderen Stellen vor; nur fehlt dann immer der Name Grenzwert. Ebenso wird, so oft unendlich kleine Grössen vorkommen, der Name immer durch umständliche Umschreibung umgangen. Eine Klärung der Begriffe, wenn sie überhaupt beabsichtigt war, ist durch ein solches Verfahren nicht zuwege gebracht. Die Gegenstände sind die gewöhnlichen; wenn ein brauchbarer methodischer Gedanke in der Behandlung enthalten sein sollte, so ist er in einem so unfertigen Werke schwer heraus zu finden. H.

C. Jordan. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. T. I. Calcul différentiel. Paris. 1882. Darb. Bull. (2) VI. 262-264.

Kurze Angabe des Inhalts des genannten Werkes.

T.

P. Mansion. Cours d'analyse infinitésimal de l'École du génie civil. 2[me] année. 4°. Autographirt.

I. Theorie der Differentialgleichungen und der linearen Gleichungen mit partiellen Derivirten. II. Bestimmte Integrale. III. Differenzenrechnung. IV. Variationsrechnung. Das Buch enthält im 3ten und 4ten Teil einige Beweise des Verfassers, die strenger sind, als man sie gewöhnlich zu geben pflegt, nämlich 1) Aequivalenz der Grenze einer dreifachen Summe und eines dreifachen Integrals. 2) Derivation eines bestimmten Integrals nach einem beliebigen Parameter, wo die Grenze des Integrals und die integrirende Function Functionen dieses Parameters sind. 3) Fundamentaleigenschaften der Euler'schen Integrale. 4) Bedingung des Maximums und Minimums in der Variationsrechnung in Form einer Differentialgleichung. Mn. (O.).

H. A. Lorentz. Leerboek der differentiaal- en integraalrekening en van de eerste beginselen der analytische meetkunde met het oog op de toepassingen in de natuurwetenschap. Leiden. Brill.

Ein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von ganz besonderem Charakter. Die mathematische Strenge, die ausführliche Entwickelung von Formeln und Theorien, welche noch keine Anwendung gefunden haben, sind in den Hintergrund geschoben, aber die Anwendungen auf Mechanik und Physik besonders hervorgehoben. Auf diese Weise wird das ganze Gebiet durchlaufen und jedesmal nur so viel von den Theorien mitgeteilt, als für die Anwendungen nötig ist.

Voran geht eine kurze Uebersicht der Functionenlehre und der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume. Dann folgt die Differentialrechnung. Hier werden die wichtigsten Regeln für das Differentiiren mitgeteilt, auch die Differentialquotienten höherer Ordnung neben den partiellen Differentialquotienten kurz behandelt. Alsdann wendet sich der Verfasser zu den Grundbegriffen und Grundformeln der Integralrechnung, wobei die doppelten und vielfachen Integrale betrachtet werden. Nun folgt der Taylor'sche Satz, die Behandlung einiger bestimmter Integrale, der Satz von Fourier und eine kurze Uebersicht der

Theorie der Differentialgleichungen. Jedem Abschnitt sind viele Anwendungen, hauptsächlich aus der theoretischen Physik, zugefügt, deren Auflösung am Schlusse des Werkes mitgeteilt wird.

G.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

T. J. Stieltjes jr. Eenige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke. Nieuw Arch. IX. 106-111.

Einige Bemerkungen über die Differentialquotienten einer Function einer Veränderlichen. Besonders wird gezeigt, dass es für die Gültigkeit von

$$\lim \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(X)$$

notwendig ist, dass $f'(x)$ für $x = X$ stetig sei, wie an einigen Beispielen gezeigt wird. Weiter wird bewiesen, dass der Ausdruck

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{1}{1.2\ldots n} f^{(n)}(X),$$

wobei

$$r(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}), \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1},$$

giltig bleibt, wenn bei der Convergenz x_1 und x_{n+1} immer X einschliessen und $f^{(n-1)}(x)$ für den besonderen Wert $x = X$ einen endlichen Differentialquotienten $f^{(n)}(X) = k$ hat. G.

W. W. Johnson. On certain symbolic relations. Mess. (2) XI. 191-192.

Es wird bewiesen, dass Operatoren von der Form

$$x^{n-r} \frac{d^n}{dx^n} x^r$$

commutativ sind, wie z. B.

$$\frac{d^m}{dx^m} x^{m+p} \frac{d^p}{dx^p} = x^p \frac{d^{m+p}}{dx^{m+p}} x^m.$$

Dazu werden Anwendungen gegeben.

Glr. (O.).

D. L. P. da Silva. Derivadas de ordem qualquer de y em ordem a x quando è $f(x, y) = 0$. Teixeira J. IV. 109-118.

Herr Silva sucht den analytischen Ausdruck der Derivirten n^{ter} Ordnung von y nach x, wenn y durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist. Er bestimmt zuerst die Form dieses Ausdruckes mit Hülfe auf einander folgender Differentiationen und bestimmt dann die Coefficienten durch Betrachtung des speciellen Falles:

$$y^{\frac{1}{p}}(x+x^2+\cdots+x^n)-1 = 0.$$

Tx. (O.).

G. Darboux. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables et sur une propriété des fonctions algébriques. C. R. XCIV. 575-577.

Der Verfasser knüpft nochmals an den Satz von Hermite an, von welchem er in den C. R. XCII. 1123. (s. F. d. M. XIII. 1881. 209) ausgegangen war, indem er die allgemeine Bedingung der betreffenden Eigenschaft algebraischer Functionen suchte, um nun die Eigenschaft selbst zu verallgemeinern. Durch eine algebraische Gleichung zwischen $z, x_1, x_2, \dots, x_\mu$ wird z als Function der x bestimmt. Die Gleichung sei vom Grade m sowol in Bezug auf z als auf die Gesammtheit der Variabeln. Differentiirt man sie $(m+1)$-mal, indem man alle dx als constant betrachtet, so lässt sich beweisen, dass kein Term ohne ein höheres Differential von z als Factor vorkommt, so dass man auf viele Arten die Form erhält:

$$(2) \qquad d^{m+1}z = A_1 d^m z + A_2 d^{m-1} z + \cdots + A_{m-1} d^2 z.$$

Dies ist die beabsichtigte Gleichung. Für $m = 2$ zeigt sich daraus, dass d^2z Factor von d^3z, folglich auch, wie bei immer neuer Differentiation hervorgeht, Factor von d^4z, d^5z, etc. ist, entsprechend dem ursprünglichen Satze. Eine fernere Betrachtung ergiebt folgende Sätze. Damit die in (2) enthaltenen Relationen durch Elimination der willkürlichen Coefficienten in den A zu partiellen Differentialgleichungen führen, denen die Function z zu genügen hat, muss die Anzahl der Coefficienten in den A kleiner sein als die Anzahl der Differentialquotienten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von z. Zwischen der Function z und m seiner Derivirten oder zwischen $m+1$ Derivirten besteht immer eine homogene lineare Relation, deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variabeln sind. Sind alle betrachteten Derivirten mindestens von der Ordnung m, so findet die Relation zwischen nur m Derivirten statt. H.

M. Falk. Om derivator och differentialen af en funktion af två obervende variabler. Zeuthen T. (4) VI. 164-182.

Die hier gegebene ausführliche Darstellung der Bedingungen für die Existenz von partiellen und vollständigen Differentialquotienten einer reellen Function von zwei reellen veränderlichen Grössen schliesst sich eng an die von Herrn J. Thomae in seinen beiden Werken „Abriss einer Theorie der complexen Functionen etc." (siehe F. d. M. V. 1873. 218) und „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" (siehe F. d. M. VII. 1875. 153) gemachten Untersuchungen. Der Verfasser bezweckt, teils die Aufmerksamkeit auf diese Fragen hinzuleiten, teils zu zeigen, dass es bei einer strengen und gründlichen Erörterung keineswegs sicher ist, dass eine Function ein vollständiges Differential besitzt, selbst dann, wenn die partielle Derivirte einen Sinn hat. Ferner wird der Zusammenhang der behandelten Frage mit gewissen Continuitätsfragen dargestellt. Die Abhandlung ist ein Auszug aus den Vorlesungen des Verfassers über bestimmte Integrale, gehalten an der Universität Upsala im Herbstsemester 1882.

Gm.

P. Mansion. Méthode dite de Fermat pour la recherche des maxima et des minima. Math. II. 193-202.

1) Geschichtliches. Die nach Fermat benannte Methode verdanken wir in Wirklichkeit Descartes oder vielmehr Huygens. Die in den „Varia opera“ von Fermat aus einander gesetzte Methode ist in ihrem Princip mit der gewöhnlich in der Differentialrechnung aus einander gesetzten Methode gleich. 2) Die Methode von Huygens besteht in Folgendem: Wenn $F(b)$ ein Maximal- oder Minimalwert von $F(x)$ ist, so ist

$$F(a) = F(c), \quad a < b < c.$$

Daraus folgt unter der Voraussetzung, dass $F'(x)$ einen einzigen Wert für $x = b$ hat, leicht, dass

$$\lim \frac{F(c)-F(a)}{c-a} = F'(b) = 0,$$

wenn a und c gegen b convergiren. Daraus ergiebt sich die Regel: Wenn $F(b)$ ein Maximal- oder Minimalwert von $F(x)$ ist, so ist die Derivirte $F'(x)$ gleich 0 für $x = b$, oder hat nicht nur einen einzigen Wert. (Beispiel: $F(x) = x \,.\, Th \dfrac{1}{x}$ für $x = 0$). Der zweite Teil dieses letzten Schlusses wird häufig nicht beachtet. Die Theorie lässt sich übrigens völlig ohne Zuhülfenahme des Taylor'schen Satzes aus einander setzen. Mn. (O.).

W. Walton. On the method of finding maxima and minima of functions of one variable and of two independent variables. Mess. (2) XII. 14-20.

Methode, um zwischen Maximum und Minimum ohne Benutzung der zweiten Derivation zu entscheiden. Glr. (O.).

W. Walton. On the determination of the maxima and minima of a function of any number of independent variables. Mess. (2) XII. 42-43.

Ausdehnung der Resultate der obigen Arbeit auf n unabhängige Variabele. Glr. (O.).

A. GRÜNWALD. Ueber die Entwickelung der begrenzten Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index und die damit zusammenhängende Logialrechnung. Prag. Abh. (3) XI. 1-63.

Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 211. H.

A. V. LETNIKOFF. Neue Untersuchungen über trigonometrische Functionen. Mosk. S. X. Lief. 3. (Russisch).

Der Verfasser dieser grossen Abhandlung (von 84 Seiten) hat schon früher in seiner Dissertation „Ueber Integrale vom Typus:

$$\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\, du \text{“},$$

die im Bd. VII. der Mosk. S. erschien, eine ausführliche und strenge Theorie der von Liouville gegebenen Methode des Differentiirens mit beliebigem Ordnungsindex nebst einigen Anwendungen veröffentlicht. Unter den Resultaten dieser Arbeit ist die Integration der Gleichung:

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2z}{dx^2}+(c+hx)\frac{dz}{dx}+kz=0$$

hervorzuheben. In der vorliegenden Abhandlung wird dieselbe Methode auf die Gleichung:

$$(x^2-1)\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}-m^2z=0$$

angewendet, der die Function

$$z = c_1 \sin(m \arccos x) + c_2 \sin(m \arccos x)$$

genügt. Durch diese Methode erhält der Verfasser neben vielen bekannten Formeln auch mehrere neue von der Art, wie sie von Jacobi und Hermite gegeben sind. Zusammen mit den beiden Functionen $\sin m\theta$ und $\cos m\theta$ wird auch die Function

$$\xi = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^m}$$

betrachtet, die den beiden ersten so gegenüber steht, wie die

Function $Q^n(x)$ der Function $P^n(x)$ in der Theorie der Kugelfunctionen oder $O^n(x)$ zu $J^n(x)$ in der der Bessel'schen.

Ty.

A. Buchheim. Some applications of symbolic methods.
Mess. (2) XI. 143-145.

Die Arbeit enthält Beweise mittels symbolischer Methoden: 1) der Formel für die n^{ten} Differentialcoefficienten der Function einer Function, 2) von Euler's Satz über homogene Functionen, 3) von Staudt's Satz über Bernoulli'sche Zahlen.

Glr. (O.).

M. S. Meyer, Matz. Solutions of a question (6889).
Ed. Times XXXVII. 45.

$$D^r x^r F(x) = 1.2 \ldots r\Big[F(x) + xF'(x) + \frac{1}{2!}Dx^2F'(x) + \frac{1}{3!}D^2x^3F'(x) + \cdots\Big] \qquad (r+1)\text{Glieder.}$$

Beweis mittels des Schlusses von n auf $n+1$.

O.

E. Busk, Matz. Solutions of a question (6796).
Ed. Times XXXVII. 26.

Beweis, dass

$$e^{DxD}\, e^{hx} = \frac{1}{1-h}\, C^{\frac{hx}{1-h}}.$$

O.

J. J. Walker. Solution of a question (6738). Ed. Times XXXVI. 63.

Beweis, dass

$$D^n f(xD) X = f(xD+n)\, D^n X.$$

O.

Capitel 3.

Integralrechnung.

P. du Bois-Reymond. Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen. Klein Ann. XX. 122-124.

Der im Bd. XVI. der Clebsch Ann. p. 112 ohne Beweis veröffentlichte, in diesem Jahrb. Bd. XII. 1880. p. 211 wiedergegebene allgemeine Satz über die Integrirbarkeit einer Function von integrirbaren Functionen wird bewiesen. Ausgegangen wird hierbei von folgendem Satze: Teilt man das Intervall (a, b) in n gleiche Teile, und bezeichnet $\delta^{(n,\varepsilon)}$ einen jeden dieser Teile, in welchem die Schwankung einer Function $\varphi(x)$ eine beliebig zu wählende Grösse ε nicht übersteigt, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrirbarkeit von $\varphi(x)$ im Intervalle (a, b), dass für jeden noch so kleinen Wert ε die Summe $\Sigma\delta^{(n,\varepsilon)}$ den Grenzwert $b-a$ habe. Ist nun $f(x) = F(\varphi(x))$, sind α und β die untere und obere Grenze der Werte $\varphi(x)$ im Intervalle (a, b), in welchem $\varphi(x)$ integrirbar sei, und ist $F(\varphi)$ im Intervall (α, β) von φ stetig, so erhellt mit Hülfe des erwähnten Satzes durch eine einfache Betrachtung, dass auch $f(x)$ im Intervalle (a, b) integrirbar ist. Weiter wird dann gezeigt, dass, wenn $f(x) = F[\varphi(n), \psi(x)]$, auch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ im Intervalle (a, b) integrirbar sind, und in diesem Intervalle $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ resp. zwischen den Grenzen (α, β) und (α_1, β_1) liegen, $f(x)$ wiederum im Intervalle (a, b) integrirbar ist, falls $F(\varphi, \psi)$ eine im Gebiet

$$\alpha \leqq \varphi \leqq \beta, \quad \alpha_1 \leqq \psi \leqq \beta_1$$

stetige Function von φ und ψ ist. Die Ausdehnung dieses Beweises auf eine stetige Function einer beliebigen Anzahl integrirbarer Functionen ist hierdurch unmittelbar gegeben. Hr.

Ed. Weyr. Ueber Integration von rationalen Differentialausdrücken. Cas. XI. 125. (Böhmisch).

Wie Hermite in seinem „Cours d'Analyse de l'École polytechnique" gezeigt hat, kann man beim Integral

$$\int \varphi(x)dx,$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function bedeutet, den diesbezüglichen algebraischen Teilwert bestimmen, ohne die Wurzelwerte des in $\varphi(x)$ vorkommenden Nenners zu kennen.

Der Verfasser entwickelt nun in der I. Abt. die Methode von Hermite und wendet sie ausser den bekannten Fällen auch auf

$$\int \frac{dx}{(x^5+5px^4+q)^2}$$

an und zeigt in einer II. Abt., wie man durch fortschreitende Reduction das allgemeine Integral bestimmen kann, falls die linearen Factoren des Nenners bekannt sind, wobei er mit der Darstellung von

$$\int \frac{F(z)dz}{(z+a_1)^{\lambda_1}(z+a_2)^{\lambda_2}\dots(z+a_n)^{\lambda_n}}$$

im Allgemeinen und Speciellen schliesst. Std.

W. Kapteyn. Over den vorm van zekere differentialen, wier integralen zuiver algebraische functien zijn en over hunne integralen. Amst., Versl. en Meded. XVII. 93-128.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Form gewisser Differentiale, deren Integrale rein algebraische Functionen sind, und ihrer Integrale. Zunächst wird

$$\int \sqrt[q]{F(x)}\,dx,$$

worin $F(x)$ eine rationale Function von x und q eine ganze positive Zahl bedeutet, besprochen und die allgemeinste Form angegeben, welche $F(x)$ besitzen kann, wenn das genannte Integral ein rein algebraisches sein soll. Weiter werden die Fälle untersucht, in denen $F(x)$ auf die Form gebracht ist:

$$(x-\alpha)^m(\beta+\gamma r+\cdots+\lambda x^n)^\nu,$$

wo

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda, m, n, p$$

Constante sind, welche gewissen Bedingungen genügen. Besondere Fälle sind: $x^m(a+bx^n)^p$ und $x^m(a+bx+cx^{2n})^p$. Die betreffenden Integrale werden bestimmt. Darauf wird gezeigt, in welchen Fällen

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

rein logarithmisch ist, und welches die allgemeinen Reductionsformeln dieses Integrals sind. Hinsichtlich der letztgenannten Form kommt der Verfasser zu dem Schluss: Wenn in

$$x^m(a+bx+cx^{2n})^p dx$$

die Exponenten den Bedingungen

$$p = -\frac{2k+1}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$m = k_1 n - 1 \quad (k_1 = 1, 2, \ldots, 2k)$$

genügen, so ist das Integral rein algebraisch, und zwar gleich

$$\frac{C}{C^{1+p}}(a+bx^n+cx^{2n})^{1+p}(X^{rn}+A_n X^{(r-1)n}+\cdots+A_{rn}),$$

worin sich die Unbekannten

$$\frac{C}{C^{1+p}}, A_n, A_{2n}, \ldots A_{rn}$$

aus $r+1$ bekannten linearen Gleichungen ergeben und

$$r = 2k-1$$

ist. G.

H. B. D. Solution d'une question (1415). Nouv. Ann. (3) I. 526-527.

Es handelt sich um das Integral

$$\int \frac{\alpha x+(n-1)\beta}{x} \frac{(\alpha x+\beta)^{\frac{n}{2}-1} dx}{\sqrt{x^{n+1} \mp (\alpha x+\beta)^n}} = \frac{2}{\sqrt{\pm 1}} \operatorname{arctang}\left(\frac{z}{\sqrt{\pm 1}}\right) + b,$$

wo

$$z = \sqrt{\frac{x^{n+1} \mp (\alpha x+\beta)^n}{(\alpha x+\beta)^n}}$$

ist. O.

F. Borletti. Solution d'une question (1377). Nouv. Ann. (3) I. 376-377.

Es handelt sich um specielle Fälle des Integrals

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi^m(x)-1}} = \frac{2}{m} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\varphi^m(x)-1} + C.$$

O.

S. Réalis. Sur quelques intégrales indéfinies. Nouv. Ann. (3) I. 343-351.

Eine grosse Anzahl von Integralen, welche die Form elliptischer Integrale dritter Gattung haben, wird durch irrationale Substitution aus der Arcustangensformel hergeleitet; sie sind teils neu, teils schon von Euler und Anderen behandelt.

H.

P. H. Philbrick. Integration of some general classes of trigonometric functions. Anal. IX. 177-180.

Reductionsformeln für

$$\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^n}$$

und ähnliche Formen, in denen $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ an Stelle von $\sin x$ stehen. Jn. (O.).

D. L. P. da Silva. Sobre alguns integraes indefinidos. Teixeira J. IV. 87-90.

Herr Silva zeigt, dass man durch Vereinigung der Methode der teilweisen Integration mit der Substitution zu folgenden Integralen gelangen kann:

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \frac{u}{v}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

etc., wo

$$u = x\sin x + \cos x, \quad v = \sin x - x\cos x;$$

ein Resultat, das sich übrigens auch in Hermite's Cours d'analyse findet. Tx. (O.).

A. Steen. Om Anvendelsen af delvis Integration. Zeuthen T. (4) VI. 51-55.

Die partielle Integrationsmethode wird hier auf einige Beispiele angewendet, die verschiedenen Verfassern entnommen sind, namentlich auf solche, wo dieselbe als nicht durchführbar erschienen ist. Besonders bemerkenswert sind die vier Beispiele, welche von Hermite (Cours d'analyse de l'École polyt. 1873 p. 260,) angeführt sind. Die folgenden Andeutungen, bei denen die Hermite'schen Bezeichnungen beibehalten sind, werden den Vorgang hinreichend erläutern.

$$\int \frac{x^2dx}{u^2} = -\int \frac{x}{\cos x}\cdot d\frac{1}{u},$$

$$\int \frac{bx^2dx}{(au+bv)^2} = -\int \frac{bx}{a\cos x+b\sin x}\cdot d\,\frac{1}{au+bv},$$

$$\int \frac{adx}{[a+(ax+b)\operatorname{tg}x]^2} = \int \frac{a\cos x}{ax+b}\cdot\frac{(ax+b)\cos x\,dx}{(a\cos x+(ax+b)\sin x)^2}.$$

Gm.

J. Griffiths, Hadamard. Solutions of a question (6789). Ed. Times XXXVII. 26-27.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der Gleichung

$$x^4-\mu x^3-\left(\frac{t^2}{e^2}+1-\frac{\mu^2}{4}\right)x^2+\mu x+\frac{t^2}{e^4}-\frac{\mu^2}{4}=0,$$

wo t variabel, μ und e constant sind, so ist

$$\int\left(\frac{1-e^2x^2}{1-x_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx_1+\int\left(\frac{1-e^2x^2}{1-x_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx_2+\cdots=2t+c.$$

O.

R. Hoppe. Zwei reciproke Relationen einer Integralfunction, nebst Anwendung. Hoppe Arch. LXVII. 412-424.

Es werden die zwei Relationen hergeleitet:

$$\int_{u=0}\operatorname{arctg}\frac{v\sqrt{u^2+\sin^2\beta}}{u\cos\beta}\,d\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{u^2+\sin^2\beta}}{\cos\beta}$$

$$+\int_{v=0}\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}{v\sin\beta}\,d\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}{\sin\beta}=\operatorname{arctg}u\operatorname{arctg}v$$

und

$$\int\limits_{v=0} \operatorname{arctg} \frac{v \sin\beta}{u\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}\, d\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}$$

$$+\int\limits_{v_1=0} \operatorname{arctg} \frac{v_1 \sin\beta_1}{u_1\sqrt{v_1^2+\cos^2\beta_1}}\, d\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta_1}{\sqrt{v_1^2+\cos^2\beta_1}} =$$

$$R(\operatorname{arctg} u+\operatorname{arctg} u_1 - R) - \operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta_1}{\sqrt{v_1^2+\cos^2\beta_1}},$$

in welcher letzteren

$$\sin\beta = u\operatorname{tg}\beta_1;\ \sin\beta_1 = u_1\operatorname{tg}\beta$$

ist. Reducirt man beständig abwechselnd mit beiden Relationen einen beliebigen Wert der Function

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}\int_\delta^\beta \psi d\varphi,$$

wo

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\alpha\sin\beta}\right)^2 = 1;\ \sin\delta = \sin\beta\cos\gamma$$

ist, auf einen neuen, so gelangt man nach sechs Reductionen wieder auf den ursprünglichen Functionswert. Der so gebildete Cyklus von sechs Functionswerten, entsprechend sechs Wertsystemen der α, β, γ, die in bestimmten einfachen trigonometrischen Beziehungen stehen, ist verbunden durch die sechs Beziehungen:

$$\begin{aligned}
2(W+W_1) &= R(\alpha+\alpha_1-R)-\gamma_3\gamma_4,\\
2(W_1+W_2) &= R(\alpha+\alpha_3-R)-\gamma_1\gamma_2,\\
2(W_2+W_3) &= R(\alpha_2+\alpha_3-R)-\gamma_5\gamma,\\
2(W_3+W_4) &= R(\alpha_2+\alpha_5-R)-\gamma_3\gamma_4,\\
2(W_4+W_5) &= R(\alpha_4+\alpha_5-R)-\gamma_1\gamma_2,\\
2(W_5+W) &= R(\alpha_4+\alpha_1-R)-\gamma_5\gamma.
\end{aligned}$$

Die Function $W(\alpha, \beta, \gamma)$ drückt die Grösse des Winkels von vier Dimensionen aus, dessen vier Kanten die Grenzpunkte der Strecken einer orthogonalen gebrochenen Linie mit dem Ende derselben verbinden, und zwar bezeichnen α, β, γ die spitzen Winkel, welche die successiven Strecken, von der 2ten an, mit der Geraden zwischen ihrem Endpunkt und dem nächstvorhergehenden Grenzpunkt bilden. Ein solcher Winkel wird ein Elementartetratop genannt. Aus den Relationen ergeben sich viele Specialwerte der Function,

namentlich die der inneren Winkel aller regelmässigen Figuren von vier Dimensionen. H.

H. Resal. Note sur l'application d'un théorème de Poncelet au calcul approximatif des arcs de courbes planes. C. R. XCIV. 1375-1377.

Der Satz von Poncelet lautet: Variirt man u und v so, dass $\frac{u}{v}$ beständig zwischen den Grenzen $\operatorname{tg}\vartheta_1$ und $\operatorname{tg}\vartheta_2 > \operatorname{tg}\vartheta_1$ bleibt, und setzt man

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_1);\ \beta = \frac{\cos(\vartheta_1+\varepsilon)}{\cos^2\frac{1}{2}\varepsilon};\ \alpha = \frac{\sin(\vartheta_1+\varepsilon)}{\cos^2\frac{1}{2}\varepsilon},$$

so differirt $\sqrt{u^2+v^2}$ von $\beta u+\alpha v$ höchstens um $\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varepsilon$. Dieser Satz auf das Bogenelement $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ angewandt, giebt:

$$s = \beta(x''-x')+\alpha(y''-y')+\cdots,$$

wo der Rest bekannte Grenzen hat. Zur annähernden Berechnung eines Curvenbogens ist dann dieser in Stücke zu teilen, innerhalb deren die Neigung der Tangente höchstens soviel variirt, als dem vorgeschriebenen Fehlermaximum $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon$ entspricht. Hierzu folgt eine numerische Tabelle der β und α für $\varepsilon = 4^\circ$ und für die Reihe der ϑ_1 durch alle 8°. Anlass zur Aufstellung der Methode war die Berechnung der Länge gelegter Kabel.

H.

G. Pfeiffer. Formeln für den Inhalt der Kegelfläche. Pr. Berlin. Sep. Weidmann.

Ausgehend von der unbestimmt begrenzten beliebig konischen Fläche, welche ein einfaches Integral ergiebt, wird zum Kegel 2[ten] Grades mit Begrenzung durch eine Ebene übergegangen und der Fall eines symmetrischen Kegelmantels, wo das Integral elliptisch ist, ausführlich discutirt. H.

G. Orlow. Sur une intégrale double. Nouv. Ann. (3) I. 311-318.

Didon hat in den Ann. de l'Éc. Norm. VII. 89. (s. F. d. M. II. 1870. 302) das Doppelintegral

$$\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(1-2ax+a^2)^{-\frac{\mu}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{\mu}{2}}dx\,dy,$$

wo x, y innerhalb $x^2+y^2\leqq 1$ variiren, für positive ganze μ entwickelt dargestellt, und es hat sich dabei gezeigt, dass es allein Function von ab ist. Letzteres Resultat gilt jedoch für jedes reelle positive μ. Der Beweis dafür ist der Inhalt des Gegenwärtigen. Dabei ergiebt sich ferner, dass zwei Formeln, welche Didon anwendet, als Specialfälle in einer allgemeineren enthalten sind.

H.

Capitel 4.
Bestimmte Integrale.

Selivanoff. Sur les intégrales définies uniformément convergentes. S. M. F. Bull. X. 147-157.

Der Verfasser sucht die Bedingung, unter der die Derivirte eines bestimmten Integrals für die Grenze unendlich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gefunden wird, und wendet, da seine Betrachtung nicht zum Ziele führt, die Methode von Weierstrass an, die, bezüglich auf unendliche Reihen, den Begriff der gleichmässigen Convergenz (convergence uniforme) einführt. In Bezug auf Integrale lautet die Definition: Das Integral

$$\Phi(x)=\int_a^{\infty} f(x,z)dz$$

heisst gleichmässig convergent, wenn man für alle Werte von x innerhalb eines Bezirks eine Zahl p so bestimmen kann, dass

für $m \overline{\gtrless} p$

$$\text{mod.} \int_m^x f(x, z)dz < k$$

wird, wo k eine beliebig klein gegebene Grösse bezeichnet. Er leitet dann den Satz her: „Wenn das Integral gleichmässig convergirt, so ist es eine für alle Werte des Parameters innerhalb des Bezirks der gleichmässigen Convergenz stetige Function, und man kann dieselbe durch Differentiation unter dem Integralzeichen differentiiren.“ Hierzu folgen einige Beispiele. H.

A. Dawidoff. Sur une formule générale des intégrales définies. Résal J. (3) VIII. 389-412.

Ein reducirter rationaler echter Bruch $f(x):F(x)$, wo die Wurzeln $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ von

$$F(x) = 0$$

alle ungleich sind, wird in Partialbrüche zerlegt und dann die Entwickelung mit $F(x)$ multiplicirt. Es sei ferner $\varphi(x)$ eine beliebige in die Taylor'sche Reihe entwickelbare Function, deren Discontinuitätsmodul grösser als alle α, $f(x)$ die Summe der n ersten Terme, ε^x der Rest. Dann ergiebt sich nach Substitution von $\varphi(x) - \varepsilon_x$ für $f(x)$

$$\varphi(x) = \Sigma \frac{\varphi(x)}{F'(x)} \frac{F(x)}{x-\alpha} + e,$$

wo e für $n = \infty$ verschwindet. Diese Gleichung und das Integral derselben:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)dx}{x-\alpha} + e_1$$

sind die beabsichtigten Resultate. Der Verfasser behauptet, dass sich daraus fast alle bekannten Sätze über bestimmte Integrale herleiten lassen, und giebt einige Beispiele der Anwendung. Es ist dabei zu bemerken, dass nicht nur $F(x)$, sondern auch alle α sich mit n verändern müssen, da $F(x)$ als vom n^{ten} Grade vorausgesetzt ist. Hiermit sind in der Tat die Beispiele in Ueberein-

stimmung, nicht aber mit der Voraussetzung, dass $F(x)$ ein Polynomen sei; denn es wird u. a. $F(x) = \sin mx$ gesetzt, d. h. der Grenzwert eines Polynomens als Polynomen betrachtet.

H.

G. Dillner. Sur les intégrales définies des fonctions d'une variable complexe. Stockh. Handl. XVIII. No. 6.

Der Verfasser beabsichtigt in der ersten Abteilung dieser Abhandlung, eine allgemeine Integrationsformel zu geben, die nicht nur für rationale, sondern auch für doppelt-periodische und gewisse andere Functionen gilt. Diese Formel wird in folgender Form hergestellt:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} M_\nu \int_\nu^x \frac{\psi(x)dx}{(x-a)^s F_1(x)} = \frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{da^{s-1}}\left[\frac{\psi(a)}{F'(a)}\log\frac{\Pi(a)}{\Pi_1(a)}\right]$$

$$+\frac{\psi(a_1)}{F(a_1)}\log\frac{\Pi(a_1)}{\Pi_1(a_1)}+\cdots+\frac{\psi(a_k)}{F(a_k)}\log\frac{\Pi(a_k)}{\Pi_1(a_k)},$$

worin $F_1(x)$ und $\psi(x)$ rationale ganze Functionen von x sind;

$$F(x) = (x-a)^s F_1(x),$$
$$F_1(x) = (x-a_1)\dots(x-a_k),$$
$$\Pi(x) = (x-x_1)^{M_1}\dots(x-x_\mu)_{M_\mu},$$
$$\Pi_1(x) = (x-h_1)^{M_1}\dots(x-h_\mu)_{M_\mu},$$

wozu noch die Bedingungen kommen, dass $F(x)$ von höherem Grade ist als $\psi(x)$, sowie dass $F(x)$ und $\psi(x)$ nicht gemeinsame Wurzeln haben. In der zweiten Abteilung untersucht der Verfasser, unter welchen Bedingungen seine Integrationsmethode in der Theorie der Quaternionen angewandt werden kann.

E.

Laguerre. Sur quelques équations transcendantes. C. R. XCIV. 160-163.

Laguerre. Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière. C. R. XCIV. 635-638.

LAGUERRE. Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. C. R. XCV. 828-831.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 57.

—

W. GOSIEWSKI. Ueber stetige Functionen, für welche die Existenz des allgemeinen Integrales nicht festgestellt werden kann. Im Buche „Ognisko". (Polnisch).

Herr Cohen Stuart hat in einer im XI. Bande der „Archives Néerlandaises" erschienenen Arbeit die Bemerkung gemacht, dass die Grundformel der Integralrechnung

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

nicht immer richtig zu sein braucht, wenn auch die Function $F'(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich und stetig bleibt, und hat als Beispiel dazu die für $x = 0$ discontuirliche Function

$$F(x) = e^{-e^{\frac{1}{x}}}$$

gewählt. Integrirt man nämlich die Function

$$F'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}}}}{x^2},$$

so erhält man nach Cohen Stuart das allgemeine Integral

$$e^{-e^{\frac{1}{x}}} + C,$$

welches für $x = 0$ keinen Sinn hat.

Dieses Resultat, welches die Richtigkeit der obigen Bemerkung beweisen sollte, ist aber nach Herrn Gosiewski's Meinung unrichtig. Das richtige Resultat ist die Function

$$e^{-e^{\frac{1}{x}}} E\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\pi}\right) + C,$$

wo das bekannte Zeichen E den ganzen Teil der in den Klam-

mern stehenden Zahl bedeutet; diese letzte Function ist aber endlich und stetig von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$.

Herr Gosiewski zeigt an einem anderen Beispiele die Richtigkeit der Cohen Stuart'schen Bemerkung. Für die endliche und stetige Function

$$F'(x) = -\frac{\pi}{4}\frac{\sin(\pi\,\mathrm{tg}\,x)}{\cos^2 x\sqrt{(E\,\mathrm{tg}\,x)^6+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{tg}\,x\right)}}$$

findet der Verfasser

$$\int_{+0}^{a} F'(x)dx = \sqrt{(E(\mathrm{tg}\,x))^6+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{tg}\,x\right)} - 1$$
$$-\sum_{n=1}^{n=E(\mathrm{tg}\,x)}\left[\sqrt{n^6+\cos^2 n\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(n-1)^6+\cos^2 n\cdot\frac{\pi}{2}}\right].$$

Für $x < \frac{\pi}{2}$ ist $\int_0^x f'(x)dx$ endlich und stetig; für $x = \frac{\pi}{2} - 0$ wird das Integral unbestimmt $(\infty - \infty)$ und bleibt unbestimmt für alle Werte von x, die grösser sind als $\frac{\pi}{2}$ u. s. f. So lange also für diese Werte die Summe

$$\sum_{n=1}^{n=E(\mathrm{tg}\,x)}\sqrt{n^6+\cos^2 n\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(n-1)^6+\cos^2 n\frac{\pi}{2}}$$

nicht in eine neue Form, in welcher die Unbestimmtheit verschwindet, verwandelt werden kann, so lange können wir auch nicht behaupten, dass die Function $F(x)$ das allgemeine Integral der Function $F'(x)$ darstellt. Dn.

R. Hoppe. Infinitärer Hauptwert und approximative Entwickelung. Hoppe Arch. LXVIII. 37-52.

Im Anschlusse an einen Aufsatz von Schröder und Schlömilch (vgl. d. Jahrbuch XII. 1880. p. 225) giebt der Herr Verfasser eine Entwickelung des bestimmten Integrals

$$C_n = \int_0^1 (u)_n du$$

für grosse Werte von n. Darnach kann die approximative Formel $(-1)^{n-1} C_n \log^2 n = 1$, welche, obwol bei $\lim n = +\infty$ richtig, doch selbst bei hohen Werten von n als sehr ungenau sich herausgestellt hat, verbessert werden. Vorher geht eine infinitäre Darstellung der Facultät n^{ten} Grades und des Binomialcoefficienten $(u)_n$. St.

W. H. L. Russell. On certain definite integrals. No. 10. Edinb. Proc. XXXIII. 258-262.

W. Spottiswoode. Note on Mr. Russell's paper: „On certain definite integrals.“ Edinb. Proc. XXXIII. 341-343.

Herr Russell hatte zur Bestimmung gewisser bestimmter Integrale die Transformation

$$(a,\ b, \dots)\ (x,\ 1)^4 = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)\ (\lambda x^2 - 2\mu x + \nu,\ 1)^2$$

angewandt. Herr Spottiswoode beschäftigt sich mit ihr hinsichtlich ihrer Existenz und der allgemeinen Frage ähnlicher Transformationen einer gegebenen Function von grader Ordnung. Cly. (O.).

J. W. L. Glaisher. Expression for arg sn a and (arg sn a)^2 as definite integrals. Quart. J. XIX. 71-74.

Die genannten Functionen werden dargestellt in der Form:

$$\arg\mathrm{sn}\, a = \frac{1}{\pi}\int_0^{K'} \log \frac{1+\mathrm{dn}(u,k')}{1-\mathrm{dn}(u,k')}\, du,$$

$$(\arg\mathrm{sn}\, a)^2 = \frac{2}{\pi}\Big[K' \int_0^{K} \log\,(1-a^2k^2\mathrm{sn}^2 u)\,du$$

$$- K\int_0^{K} \log\,(1-a^2\mathrm{dn}^2 u)\,du\Big].$$

Die zwei Formeln sind zuerst gefunden durch Entwickelung der Logarithmen nach Potenzen von dn u, sn u. Die erste erhält man noch leichter durch Integration von

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha\, d\varphi}{\mathrm{dn}^2\alpha - k'^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\sin^2\varphi} \qquad (\mathrm{sn}\,\alpha = a)$$

nach a. Für $a = 1$ ergeben sich bemerkenswerte Formeln. Die zweite Formel wird noch transformirt: die zwei Integrale lassen sich in imaginärer Form auf eins reduciren, dann auch durch ein Doppelintegral ausdrücken. Aehnlich werden dargestellt:

$$\arg \operatorname{cn} a = K - \frac{2}{\pi} \int_0^{K+iK'} \operatorname{arctg}\left(\frac{ak \operatorname{cn} u}{k'}\right) du,$$

$$\arg \operatorname{dn} a = K + iK' + \frac{1}{\pi} \int_{K'}^{K'+iK} \log \frac{1 - a \operatorname{sn}(u, k')}{1 + a \operatorname{sn}(u, k')} du;$$

in ersterer Formel ist $a \gtrless 1$ und $\gtreqless \frac{k'}{k}$, in letzterer $a \gtreqless k'$.

H.

A. Steen. Om et bestemt Integral som diskontinuert Funktion. Zeuthen T. (4) VI. 65-68.

Das Integral (m eine ganze Zahl)

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^m ax}{x^m} dx = \pm \frac{\pi a^{m-1}}{2.4 \ldots 2(m-1)} \left\{ m^{m-1} - \frac{m}{1} (m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} (m-4)^{m-1} - \ldots \right\}$$

zeigt für $a = 0$ eine besondere Discontinuität, welche in der graphischen Darstellung nur sichtbar für $m = 1$ oder $m = 2$ hervortritt, während sie für grössere m sich nur in den $(m-1)^{\text{ten}}$ und höheren Differentialquotienten erkennen lässt.

Gm.

Wolstenholme, C. B. S. Cavallin. Solutions of a question (6507). Ed. Times XXXVI. 86-87.

Sind $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ lauter positive Grössen, so ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_n x \cos b_1 x \cos b_2 x \ldots \cos b_m x \sin \lambda x}{x^{n+1}} dx$$

gleich $\frac{\pi}{2} a_1 a_2 \ldots a_n$, wenn λ einen Wert hat, der nicht kleiner als $\Sigma(a) + \Sigma(b)$ ist.

O.

T. R. Terry, Matz. Solutions of a question (6655). Ed. Times XXXVI. 52.

Je nachdem q eine ganze Zahl, grösser oder kleiner als p, ist, ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \cos^2 q\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2^{2p+2}} \frac{(2p)!}{(p!)^2}$$

oder

$$= \frac{\pi}{2^{2p+2}} \left\{ \frac{(2p)!}{(p!)^2} + \frac{(2p)!}{(p+q)!\,(p-q)!} \right\}.$$

O.

Wolstenholme. Two notes: 1) A definite integral; 2) Equation of the director-circle of a conic. Lond., M. S. Proc. XIII. 185-188.

1) Ist $\frac{x^n}{n!}$ X der Rest der Maclaurin'schen Reihe für $f(x)$, so wird gefunden:

$$\int_0^\infty \frac{X}{x^r}\, dx = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r)}{\Gamma(n+r)} \int_0^\infty \frac{f^{(n)}(x)dx}{x^r},$$

wo r eine Constante < 1. Zur Herleitung sind jedoch divergente Integrale verwandt worden.

2) Die Gleichung des Director-Kreises, in Cartesischen Coordinaten ausgedrückt:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}^{\frac{1}{2}} \cos\omega,$$

wo $u = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts, ω den Winkel zwischen den Axen der x und y bezeichnet, wird in homogenen und in trilinearen Coordinaten dargestellt. Ferner werden die Gleichungen der Brennpunkte

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}^{\frac{1}{2}} \sec\omega$$

in die für Arealcoordinaten transformirt. H.

A. BERGER. Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres. Upsala. E. Berling. 4°.

Siehe Abschn. III. Cap. 1. p. 128.

J. J. THOMSON. Note on $\int_0^\infty \frac{\cos sx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}}\,dx$. Quart. J. XVIII. 377-381.

Das Integral ist ein Specialfall dessen, welches Glaisher in seinem Aufsatz „On Riccati's equation" Phil. Trans. 1881 (siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 273.) behandelt hat, nämlich der einzige, auf den dessen Ausdruck nicht anwendbar ist. Es lässt sich zunächst leicht auf den Wert für $p=0$ reduciren, was hier in der Form geschieht:

$$v_p = s^{-p}\int_0^\infty \frac{\cos sx\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}} = \frac{\left(-\frac{2s}{a^2}\right)^p}{1.3\ldots(2p-1)}\,\frac{d^pv_0}{(d\,.\,s^2)^p},$$

und genügt der Gleichung

$$\frac{d^2v_p}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dv_p}{ds}-\left(\frac{p^2}{s^2}+a^2\right)v_p=0,$$

woraus zunächst:

$$\frac{d^2v_0}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dv_0}{ds}-a^2v_0=0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nach Stokes (Cambr. Phil. Trans. 1880):

$$v_0=\left(E+\frac{1}{2}D\log\frac{1}{a^2s^2}\right)\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(as)^{2k}}{2^{2k}k!^2}+D\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(as)^{2k}}{2^{2k}k!^2}\sum_{h=1}^{h=k}\frac{1}{h}.$$

Für den vorliegenden Fall muss v_0 für $r=\infty$ verschwinden. Unter dieser Bedingung fand Stokes:

$$\frac{E^{*)}}{D}=k=\log 8+\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}11593.$$

---

*) Im Text verdruckt.

Aus der Bedingung für $s = 0$, dass $sv_1 = a^{-2}$ werden muss, ergiebt sich $D = 1$, also $E = k$: Nachdem hiermit v_0 bestimmt ist, folgt der Wert von v_p. Da für grosse as die Reihen erst sehr spät zu convergiren anfangen, so entwickelt der Verfasser v_0 noch in folgender Form:

$$v_p = \frac{e^{-as}}{\sqrt{s}}\left(A_0 + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \cdots\right)$$

und findet:

$$A_k = \frac{A_0}{(2a)^k} \prod_{h=0}^{h=k} \left[p^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right],$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{a^{-p}}{1.3\ldots(2p-1)}.$$

H.

A. Winckler. Ueber die Entwickelung einiger von dem Euler'schen Integrale zweiter Gattung abhängiger Ausdrücke in Reihen. Wien. Ber. LXXXV. 1039-1067.

Durch Zerlegung des Intervalls in die Vielfachen von ϱ wird gefunden:

$$\int_{\varrho}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^{k=\infty} (a-1)(a-2)\ldots(a-k)\, \varphi(n)\psi(a-n-1),$$

$$\varphi(n) = 1 - \left(1 + \frac{\varrho}{1!} + \cdots \frac{\varrho^n}{n!}\right) e^{-\varrho};\ \psi(a) = \sum_{k=1}^{k=\infty} (k\varrho)^a e^{-k\varrho},$$

das ist mit einer Umformung von $\varphi(n)$ ein Resultat von Hermite, Demnächst wird die Entwickelung

$$[\Gamma(a+p+1)]^r = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n a^n \quad (p \text{ positive ganze Zahl})$$

in Angriff genommen, welche Bourguet für zwei Specialfälle untersucht hatte. Voraus bekannt ist

$$K_0 = (p!)^r;$$

dadurch sind die übrigen Coefficienten recurrirend bestimmt nach der Relation

$$K_n = \frac{r}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k s_k K_{n-k},$$

wo

$$-s_1 = \Gamma'(1) + \sum_{h=1}^{h=p} \frac{1}{h}; \quad s_k = \sum_{h=p+1}^{h=\infty} h^{-k}.$$

Es wird weiter gezeigt, welche Mittel zur Berechnung zu Gebote stehen, namentlich für die von Bourguet behandelten Fälle $r = 1$ und $r = -1$. H.

J. TANNERY. Sur les intégrales eulériennes. C. R. XCIV. 1698-1701.

J. TANNERY. Rectification à une communication antérieure sur les intégrales eulériennes. C. R. XCV. 75.

Das Gegenwärtige knüpft an Prym's Zerlegung

$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(x+k)} + Q(x)$$

an, wo $Q(x)$ nach Potenzen von x entwickelt und die Coefficienten durch bestimmte Integrale dargestellt sind. Der Verfasser stellt dafür folgenden Ausdruck auf:

$$eQ(x) = \cfrac{1}{2-x-\cfrac{1(1-x)}{4-x-\cfrac{2(2-x)}{6-x-\cfrac{3(3-x)}{8-x-\cdots}}}},$$

bewiesen nur für reelle x. Der Beweis stützt sich auf folgenden Satz. „Sind $U = \Sigma u_n x^n$ und $V = \Sigma v_n x^n$ zwei Reihen, die für $0 < x < a$ convergiren, für $x = 0$ divergiren, sind u_n und v_n positiv und ist, für $n = \infty$, $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lambda$, so ist auch $\lim \frac{U}{V} = \lambda$." Dabei wird bemerkt, dass ein specieller Fall dieses Satzes von Appell in den C. R. LXXXVII. 690, s. F. d. M. X. 1878. 184 publicirt ist. In dem späteren Artikel wird hinzugefügt, dass Appell in Grunert Arch. 1879 (LXIV.) 387, siehe F. d. M. XII. 1880. 185 den Satz selbst gegeben hat. Der Appell'sche Satz ist nicht auf die Voraussetzung einer gemeinsamen Grenze der Convergenz und auf diese Grenze beschränkt, sondern behauptet schlechthin die Gleichheit des Grenzwerts des Quotienten der divergenten

Reihensummen mit dem der allgemeinen Glieder, wofern letzterer existirt. Die Herleitung des obigen Ausdrucks für Q beruht auf der Zerlegung des unbestimmten Integrals in den Quotienten der zwei Grössen

$$z = e^{\frac{1}{1-x}}(1-x)^p,\quad u = e^{\frac{1}{1-x}}(1-x)^p \int_0^x \frac{dx}{(1-x)^{p+1} e^{\frac{1}{1-x}}}$$

und Entwickelung derselben nach Potenzen von x. Dann nämlich ist

$$Q(p) = \lim \frac{u}{z} \quad (x = 1).$$

Für u und z werden Differentialgleichungen gefunden, daraus Relationen für die Coefficienten hergeleitet und diese durch obigen Kettenbruch gelöst. Zum Schlusse wird Q in folgende Reihe entwickelt:

$$eQ(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{n!\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n)}{q_n\, q_{n+1}},$$

$$q_n = \sum_{h=0}^{h=n} \frac{n(n-1)\ldots(n-h+1)\,(n-x)\,(n-1-x)\ldots(n-h+1-x)}{h!}.$$

H.

A. Berger. En generalisation af några formler i Gammafunktionens teori. Stockh. Öfv. 1881. 13-30.

Zu einer, die Γ-Function speciell enthaltenden gleichen und analogen Relationen unterworfenen allgemeineren Function gelangt der Verfasser auf folgende Weise. Die Function $f(x)$ sei endlich und stetig für $x>0$, ferner verschwinden alle ihre Derivationen für $x=\infty$. Dann ist die in Rede stehende Function, als Verallgemeinerung von $\log \Gamma(x+1)$:

$$F(x+1) = xf(1) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \{f(k) - f(k+x) + x\,[f(k+1) - f(k)]\}.$$

Namentlich ergiebt sich:

$$F(x+1) - F(x) = f(x);\quad F(1) = 0;$$

$$F(x) + F(1-x) = -f(x) + \sum_{k=1}^{k=x} \{-f(k-x) + 2f(k) - f(k+x)\}$$

nebst speciellen Folgerungen. Besonders eingehend wird der

Rest der Bernoulli'schen Reihenentwickelung untersucht. Schliesslich wird speciell $f(x) = \log x$ gesetzt, wodurch $F(x)$ in $\log\Gamma(x)$ übergeht, und eine Reihe bekannter Relationen der Γ-Function als Resultate zusammengestellt. Unter diesen finden sich jedoch nicht der Ausdruck von $\Sigma \log\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)$ und der Gauss'sche Ausdruck von $\Gamma'\left(\frac{k}{n}\right):\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)$, denen entsprechend also kein Analogon für $\Sigma F\left(x+\frac{k}{n}\right)$ und $F'\left(\frac{k}{n}\right)$ gefunden ist.

H.

J. W. L. Glaisher. On certain definite integrals involving the exponential-integral. Quart. J. XVIII. 370-377.

Das Exponentialintegral wird definirt für positive und negative x durch

$$\mathrm{Ei}\,x = \gamma + \frac{1}{4}\log(x^4) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k\,.\,k!}, \quad \text{wo } \gamma = -\Gamma'(1).$$

Diese Function wird nach Multiplication mit Exponentialfunctionen integrirt, und folgende Formeln werden gefunden:

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax^n)dx = -\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)a^{-\frac{1}{n}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{Si}\,bx\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{Ci}\,bx\,dx = -\frac{1}{2a}\log\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax)\,e^{-bx}dx = -\frac{1}{b}\log\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax)\sin bx\,dx = -\frac{1}{2b}\log\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax)\cos bx\,dx = -\frac{1}{b}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax)\mathrm{Si}\,bx\,dx = -\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a} + \frac{1}{2b}\log\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax)\mathrm{Ci}\, bx\, dx = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{1}{2a}\log\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax)\,\mathrm{Ei}(-bx)dx = \log\left\{\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}\right\}^{\frac{1}{ab}},$$

wo

$$\mathrm{Si}\, x = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du; \quad \mathrm{Ci}\, x = \int_\infty^x \frac{\cos u}{u}\, du.$$

H.

R. Lipschitz. Sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b}\cos(a-b)x\, dx$.

Darb. Bull. (2) V. 387-388. 1881.

Durch Einführung der imaginären Exponentialfunctionen in das Integral

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b}\cos(a-b)\, x.dx$$

und Integration der beiden einzelnen Glieder ergiebt sich die von Cauchy gefundene Formel

$$J = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(1+a+b)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+b)}.$$

M.

C. B. S. Cavallin. Ett sätt att härleda och generalisere Legendre's formel $\int_0^{2\pi} p d\omega = L$. Zeuthen T. (4) VI. 1-2.

Beweis der genannten Formel zur Berechnung der Länge einer geschlossenen convexen Curve, nebst der folgenden Erweiterung. Bezeichnet ψ für einen Punkt P der Curve das Gewicht der Längeneinheit, ϱ den Krümmungsradius des Punktes, und ω wie in der obigen Formel den Winkel, welchen die Senk-

rechte vom Pole O auf die Tangente in P mit einer festen Axe bildet, so wird das Gewicht der Curve durch die Formel $\int_0^{2\pi} \varrho\psi d\omega$ ausgedrückt sein.

Gm.

J. W. L. Glaisher. Formulae for the rth integral of a Legendrian coefficient and of the logarithm-integral. Mess. (2) XII 120-128.

I. Legendre'sche Coefficienten. Es wird eine Formel gegeben für

$$\left\{\int_1^x dx\right\}^r P_n$$

ausgedrückt durch $P_{n+r}, P_{n+r-2}, \dots P_{n-r}$. Für $r=3$ heisst die Formel z. B.

$$\int_1^x\int_1^x\int_1^x P_n dx dx dx = \frac{P_{n+3}}{(m+4)(m+2)m} - \frac{3P_{n+1}}{(m+4)m(m-2)}$$
$$+ \frac{3P_{n-1}}{(m+2)m(m-4)} - \frac{P_{n-3}}{m(m-2)(m-4)},$$

wo $m=2n+1$.

II. Logarithmische Integrale. Die Formel, die Verallgemeinerung einer Bessel'schen Formel, lautet:

$$\left\{\int_0^x dx\right\}^r x^m \operatorname{li} x^n = \frac{x^{m+r}}{(m+1)(m+2)\dots(m+r)} \operatorname{li} x^n$$
$$-\frac{1}{m+1}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\operatorname{li} x^{m+n+1} + \frac{1}{m+2}\frac{x^{r-2}}{(r-2)!\,1!}\operatorname{li} x^{m+n+2}$$
$$-\frac{1}{m+3}\frac{x^{r-3}}{(r-3)!\,2!}\operatorname{li} x^{m+n+3} + \dots + (-1)^r\frac{1}{m+r}\frac{1}{(r-1)!}\operatorname{li} x^{m+n+r}.$$

Die Formel wird auch in symbolischer Form aufgestellt.

Glr. (O.).

A. Buchheim and Evans. Solutions of a question (6257). Ed. Times XXXVI. 75.

Erstreckt man die Integration des dreifachen Integrals

$$\iiint \frac{\sum_1^3 x_i^6 + 3\sum_1^3 \sum_1^3 x_i^2 x_j^4 + 2 x_1^2 x_2^2 x_3^2.}{\left(\sum_1^3 x_i^2\right)^6} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

über den Raum ausserhalb der Fusspunktenfläche eines Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c in Bezug auf den Mittelpunkt derselben, als Anfangspunkt der Coordinaten, so ist der Wert dieses Integrals gleich $\frac{4\pi}{3\,abc}$.

M.

A. J. Davidoff. Ueber eine allgemeine Formel in der Theorie der bestimmten Integrale. **Mosk. S. X. Lief. I (Russisch).**

Die Formel ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\, dx}{x-\alpha} + e.$$

Hier ist $\varphi(x)$ eine Function, die sich nach steigenden Potenzen von x für alle Werte von x entwickeln lässt, und deren Modul kleiner als ϱ ist; $F(x)$ bezeichnet eine ganze Function vom Grade n, deren n Wurzeln α sämmtlich im Convergenzkreise der Reihe liegen; die Summation erstreckt sich auf alle diese Wurzeln; e ist eine Grösse, deren Grenze für $n = \infty$ Null ist. Diese Formel wird auf verschiedene Formen der Function $F(x)$ angewendet, wie zum Beispiel auf $F(x) = x^n - p^n$, wo $p < \varrho$ ist, was durch Grenzübergang zur Formel von Cauchy:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \varphi(pe^{ui})\, du$$

führt; ferner auf

$$F(x) = \sin\, mx,$$

was die Formel

$$\lim \int_0^a \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2} \varphi(0)$$

ergiebt, u. s. w. Zuletzt wird daraus die Gauss'sche Methode zur angenäherten Berechnung der bestimmten Integrale entwickelt.

Ty.

P. Mansion. Sur les cubatures approchées. Brux. S. sc. VI. B. 228-232.

Man denke sich eine convexe Fläche, horizontal auf ein Parallelogramm *abcd* mit dem Mittelpunkt *e* und der Fläche *B* projicirt. Es mögen sein *f*, *g*, *i*, *h* die Mitten von *ab*, *bc*, *cd*, *da*; ferner h_1, h_2, h_3, h_4, H, h_{12}, h_{23}, h_{34}, h_{41} die Höhen der Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *J* über der horizontalen Ebene, endlich

$$4h = h_1+h_2+h_3+h_4;\quad 4\eta = h_{12}+h_{23}+h_{34}+h_{41};$$

V das Volumen *abcdABCD*. Dann hat man:

$$V = \frac{1}{3}B(2h+H),\ \text{Fehler}\ \varepsilon < \frac{1}{3}B(H-h)$$

$$V = B\eta,\ V = \frac{1}{3}B(2\eta+H).$$

Der Verfasser bestimmt auch den Fehler für die zweite und dritte Formel. Die zweite Formel ist neu, die beiden anderen sind schon von Wooley gegeben worden, aber ohne Bestimmung des Maximalfehlers.

Mn. (O.).

P. Mansion. Sur les quadratures et les cubatures approchées. C. R. XCV. 384-386.

Durch Figurbetrachtung wird gefunden: Das ebene Flächenstück zwischen einer Curve, welche der Abscissenaxe die concave Seite zugekehrt, dieser Axe und zwei Ordinaten ist ein Mittel zwischen dem Sehnenpolygon für gleiche Sehnenprojectionen und demselben nach Substitution der zweiten und vorletzten Ordinate für die erste und letzte. Bei derselben Construction ist der Fehler der Simpson'schen Inhaltsformel kleiner als

$$\frac{1}{3}h(y_2+y_{n-1}-y_1-y_n),$$

wo $h(n-1)$ die Projection der Curve ist. Der Fehler der Wooley'schen Formel für den Projectionsraum einer krummen Fläche, concav gegen die Projectionsebene, ist kleiner als die halbe Differenz der ein- und umbeschriebenen Prismensumme mit schrägen Endflächen. H.

Ch. Frenzel. Die arithmetische Integration der Dämme und Einschnitte. Wien. Bloch u. Hasbach.

Es handelt sich um Berechnung des Volumens der zur Herstellung einer gleichmässig breiten horizontalen oder in gegebenem Verhältnis auf- oder absteigenden Bahn auf- oder abzutragenden Erde, wenn die Böschungen constante gegebene Neigungen haben. Hierzu kommen die Inhalte und statischen Momente der verticalen Längsschnitte des Erdkörpers in Anwenwendung. H.

H. de Lisleferme. Note d'analyse géométrique d'après Rossin. Brux. S. sc. VI. B. VI. 242-246.

P. Mansion. Rapport sur cette note. Brux. S. sc. VI. A. 49-51.

Graphische Integration nach einer Methode, die der von Solin (F. d. M. IV. 1872. p. 129) analog ist. Mn. (O.).

B. Abdank-Abakanowicz. Sur l'intégration mécanique. C. R. XCIV. 783-785.

In den C. R. XCII. 402. ist ein Integrationsapparat beschrieben, worüber F. d. M. XIII. 1881. p. 227 berichtet worden ist. Im Gegenwärtigen werden Modificationen desselben besprochen. An die Stelle des Lineales, welches durch Friction einen axial geschobenen Cylinder drehte, kommt jetzt ein Rädchen, dessen Ebene gegen die Cylinderaxe eine Neigung $= y$ erhält, während die Drehung des Cylinders die Grösse $\int y dx$ angiebt. Anwendung

hat Vernon-Boys gemacht, indem er die Bewegungen durch zwei Solenoide reguliren lässt. H.

B. Abdank-Abakanowicz. Sur un nouvel intégromètre. C. R. XCIV. 1047-1049, (auch polnisch Ogniska).

Der vorgelegte, hier abgebildete und beschriebene Integrationsapparat ist wesentlich identisch mit dem vorgenannten. Es wird hervorgehoben, dass nirgends Gleitung stattfindet.

H.

Weitere Auswertungen bestimmter Integrale von D. Edwardes, U. J. Knisley, T. R. Terry, W. H. Blythe, B. Easton, Nash, Ch. Ladd finden sich Ed. Times XXXVII. 29, 49, 57-58, 100.

O.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Nowotny. Ueber die Lösungen der Differentialgleichungen. Pr. Jasto. (Galizien). (Polnisch).

Dn.

E. West. Exposé des méthodes en mathématiques, d'après Wronski. Résal J. (3) VIII. 19-54, 125-166.

Das Vorliegende handelt von der Integration der Differentialgleichungen und Differenzengleichungen, insbesondere für eine unabhängige Variable. Der Verfasser reducirt eine beliebige algebraische Gleichung zwischen x, y und den Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung auf eine approximative, indem er für alle Factoren jedes Terms ausser einem Differentialquotienten

Mittelwerte setzt, die dann als constant betrachtet werden. Es wird vorher allgemein die Transformationsfunction der gegebenen Gleichung mit Einführung eines unbestimmten approximativen Wertes von y dargestellt, welche der Convergenz der successiven Approximation entspricht. H.

S. Lie. Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. Lie Arch. VII 443-444.

Im Jahre 1874 lenkte der Verfasser die Aufmerksamkeit auf die allgemeine Theorie aller Differentialgleichungen

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

die eine bekannte oder unbekannte continuirliche Gruppe von Transformationen gestatten. Teile der Theorie wurden successive in verschiedenen Abhandlungen, die jedoch noch allgemeinere Probleme behandelten, entwickelt. Die vorliegende Note giebt ein schematisches Resumé aller Fälle, die eintreten können, und giebt für jeden Fall die erforderlichen Hülfsgleichungen an, die häufig linear sind. Es möge hier ausdrücklich hervorgehoben sein, dass hiermit die grösstmögliche Reduction der betreffenden Probleme erreicht ist. L.

L. Königsberger. Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig. Teubner.

Der Verfasser hat in den letzten Jahren in einer Reihe von Abhandlungen einige Sätze und Methoden zur Theorie der allgemeinen Differentialgleichungen veröffentlicht. Im vorliegenden Werke wird eine zusammenhängende Theorie der hierauf bezüglichen Untersuchungen entwickelt, wobei die einzelnen dort enthaltenen Sätze eine beträchtliche Erweiterung und Verallgemeinerung erfahren. In dieser Gestalt wird ersichtlich, welche weitausgedehnten Gebiete durch die neuen Prinzipien der Forschung erschlossen sind, und wie befruchtend die daraus fliessenden Methoden zurückwirken auf die Behandlung und Lösung der im

Gebiete der Abel'schen Integrale auftretenden Probleme, die in der neuen verallgemeinerten Fassung an Tiefe und Durchsichtigkeit zugleich gewinnen.

Zur Einleitung dient die Feststellung des Begriffs der Irreductibilität einer beliebigen algebraischen Differentialgleichung. Die betreffende Definition, sowie die Irreductibilitätsuntersuchung der linearen Differentialgleichungen (siehe das folgende Referat) bilden den Inhalt des ersten Capitels. Die letztere Untersuchung fällt für die einfachsten linearen nicht homogenen Differentialgleichungen 2[ter] Ordnung mit der Auffindung der Bedingungen zusammen, unter denen das Integral einer durch ein Abel'sches Integral definirten Transcendenten durch eben diese Transcendente algebraisch ausdrückbar ist. Das 2[te] Capitel enthält die Aufstellung und Begründung des vom Verfasser bereits im Jahre 1878 (Borchardt J. LXXXIV. p. 284, vgl. F. d. M. X. 1878. 243) veröffentlichten und in späteren Arbeiten erweiterten Fundamentalsatzes, der die Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen und deren Ableitungen betrifft und die Basis bildet für die Ausdehnung des Abel'schen Theorems, sowie der Abel'schen Untersuchungen über die Reduction von Integralen algebraischer Functionen auf Integrale linearer Differentialgleichungen. Es trifft hierbei der eigentümliche Umstand ein, dass der gedachte Satz selbst zugleich das Mittel bietet, die Form jener unveränderlichen Relation zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen und ihren Ableitungen festzustellen. Auf die einfachste Form des Systems

$$\frac{dz}{dx} = y_k \qquad (k = 1, \ldots \lambda)$$

angewandt, ergiebt der Satz das Resultat, dass die einzig mögliche Form einer algebraischen Beziehung zwischen Abel'schen Integralen die lineare mit constanten Coefficienten ist, während der von den Integralen freie Teil eine algebraische Function von x dargestellt; hierbei gelten die Logarithmen algebraischer Functionen als Abel'sche Integrale. Besonders bemerkenswert für den Zusammenhang der Abel'schen Integrale mit anderen Transscendenten ist die weitere Feststellung, dass in eine algebraische

Beziehung zwischen Abel'schen Integralen solche analytischen Functionen, die ein Additionstheorem besitzen, also z. B. Exponentialfunctionen, nicht eintreten können. Im Verlaufe der Untersuchung tritt die wichtige Frage auf, für welche Classe von Differentialgleichungen das allgemeine Integral eine algebraische Function particulärer Integrale und willkürlicher Constanten ist, eine Frage, welche identisch ist mit der nach der Zahl der selbstständigen Transcendenten, die durch eine gegebene Differentialgleichung definirt werden. Die Behandlung dieses Problems kehrt im Folgenden häufig wieder; an dieser Stelle wird die Gestalt der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung ermittelt, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function eines particulären Integrals und einer willkürlichen Constanten ist, und gefunden, dass solche Transcendenten überhaupt (die ein Additionstheorèm besitzenden analytischen Functionen bilden davon einen besonderen Fall) nicht mit Abel'schen Integralen in algebraischer Beziehung stehen können. Das dritte Capitel bringt die Erweiterung des Abel'schen Theorems auf Integrale von Differentialgleichungen. Die Aufgabe besteht darin, nicht blos eine additive, sondern irgend eine algebraische Beziehung zwischen den Werten eines und desselben particulären Integrals einer beliebigen Differentialgleichung für algebraisch von einander abhängige Werte der unabhängigen Variabeln festzustellen. Die Zahl p der angenommenen Relationen zwischen den unabhängigen Variabeln bezeichnet das Geschlecht, dem das Abel'sche Theorem angehört. Hier liefert der Beweis der Existenz eines erweiterten Abel'schen Theorems zugleich die Form desselben. Diese wird für die Integrale linearer homogener Differentialgleichungen beliebiger Ordnung angegeben. Hierbei bietet sich der Anlass, weitere Sätze über den erwähnten Zusammenhang des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichung mit den particulären aufzustellen. So wird z. B. gezeigt, dass irreductible Differentialgleichungen, denen ein dem Geschlechte 1 zugehöriges Abel'sches Theorem zukommt, von der ersten Ordnung und so beschaffen sein müssen, dass das allgemeine Integral algebraisch von einem particulären, einer Constanten und der unabhängigen

Variablen abhängt, und es werden sodann derartige Differentialgleichungen aufgestellt, für welche die genannte Beziehung das particuläre Integral in rationaler (ganzer oder gebrochener) Form mit in x algebraischen Coefficienten enthält. In ähnlicher Weise kommt das Abel'sche Theorem vom Geschlecht 2 ausschliesslich den irreductiblen Differentialgleichungen zweiter oder erster Ordnung zu, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und zweier oder einer willkürlichen Constanten ist, und die notwendige Form der Differentialgleichungen erster Ordnung von dieser Beschaffenheit wird festgestellt. Ein grosser Teil der hier berührten Sätze findet sich bereits in den Abhandlungen des Verfassers über den Zusammenhang zwischen den allgemeinen und particulären Integralen von Differentialgleichungen (Gött. Nach. 1880. p. 625ff. u. Borchardt J. XCI. p. 265ff. vgl. F. d. M. XII. 1880. 238. XIII. 1881. 233). Das vierte und letzte Capitel handelt von der Form der durch Quadraturen darstellbaren Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Dem Umfange nach fast die Hälfte des Buches einnehmend, bietet es eine Fülle des Neuen und Interessanten sowohl in den mannigfaltigen Ergebnissen, die zum Teil auf eine merkwürdige Verknüpfung analytischer und zahlentheoretischer Verhältnisse hinweisen, als in den dazu führenden eigentümlichen Methoden. Die Untersuchungen dieses Abschnittes knüpfen an diejenigen Abel's über die Reduction von Integralen algebraischer Functionen an, und dehnen dieselben auf Integrale linearer Differentialgleichungen aus. So wird der bekannte Satz, dass, wenn

$$z = \int y dx,$$

wo y eine algebraische Function von x bedeutet, selbst algebraisch ist, z stets rational durch x und y ausdrückbar ist, in folgender Gestalt erweitert: Wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung mit Coefficienten, die algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln x sind, ein algebraisches Integral hat, so hat sie auch ein in den Coefficienten rationales Integral. Dieser und ein ähnlicher Satz bezüglich derjenigen Differentialgleichungen, die algebraisch-logarithmische Integrale besitzen,

dienen zur Vorbereitung für den Beweis des folgenden durch seine Allgemeinheit merkwürdigen Theorems: Wenn eine lineare Differentialgleichung der vorgedachten Beschaffenheit ein Integral von der Form

$$z = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_k \log v_k + \int^{\xi_1} y_1\, ds + \cdots + \int^{\xi_\lambda} y_\lambda\, ds$$

besitzt, in welchem $u, v_1, \ldots, v_k, \xi, \ldots, \xi_\lambda$ algebraische Functionen der unabhängigen Variablen, $y_1, \ldots, y_\lambda$ eben solche von s bezüglich von den Geschlechtern $p_1, \ldots, p_\lambda$ und $A_1, \ldots, A_k$ Constanten bedeuten, so genügt dieser Differentialgleichung stets auch ein Integral von der Form

$$z = U + B_1 \log V_1 + \cdots + B_\mu \log V_\mu + \frac{1}{\delta} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p_1} \int^{\eta_1^{(\varrho)}} y_1\, ds$$

$$+ \cdots + \frac{1}{\delta} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p_\lambda} \int^{\eta_\lambda^{(\varrho)}} y_\lambda\, ds,$$

worin $U, V_1, \ldots, V_\mu$ rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung, δ eine ganze Zahl und $\eta_\alpha^{(\varrho)}$ die Lösungen einer Gleichung $p_\alpha$ten Grades bedeuten, deren Coefficienten rationale Functionen derer der Differentialgleichung sind; zugleich sind die Werte der y für $s = \eta^{(\varrho)}$ rational durch $\eta^{(\varrho)}$ und die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar. Eine höchst wichtige Eigenschaft der Integrale

$$\int^{\eta_\alpha^{(\varrho)}} y_\alpha\, ds$$

ist ferner, dass die Summe eines jeden Systems von p_α der Irrationalität y_α zugehöriger Integrale erster Gattung gleich einem Integrale erster Gattung von der Form

$$\int^x Y dx$$

wird, worin Y eine rationale Function von x und den Coefficienten der Differentialgleichungen ist. Wie folgenreich der Satz ist, zeigt eine reiche Fülle von Anwendungen, die wir auch nur andeutungsweise wiederzugeben uns versagen müssen. Sie betreffen die Frage der rationalen Reduction, d. h. einer solchen, worin die Coefficienten der Gleichung für die Grenzen nur rational aus x zusammengesetzt sind. Für den einfachsten Fall einer linearen

Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ ergiebt sich hieraus die Zurückführung der algebraischen Reduction der Abel'schen Integrale auf niedere Integralgattungen (wo eine solche vorhanden ist, auf die rationale Reduction) wobei bemerkenswert ist, dass Abel, der diese Zurückführung für die Reduction elliptischer und hyperelliptischer Integrale auf elliptische Integrale bewirkt hatte, schon die Ausdehnung dieses Verfahrens für den nächsten Fall der Reduction eines Abel'schen Integrals auf elliptische mit Schwierigkeiten verknüpft fand, die er nicht meinte überwinden zu können. Hier wird das Reductionsproblem sogar für Integrale linearer Differentialgleichungen auf das rationale zurückgeführt. Mit specielIerem Eingehen wird die Frage der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische und hyperelliptische niederer Ordnung beantwortet und an Beispielen erläutert. Zur vollständigen Erledigung des Problems gehört ausser dem erwähnten Satze noch eine Untersuchung der Irrationalitäten solcher Abel'scher Integrale, die linearen Differentialgleichungen genügen. Diesem Gegenstand ist der letzte Abschnitt dieses inhaltreichen Capitels gewidmet, der besonders lehrreich ist wegen des merkwürdigen Zusammenhangs dieser Frage mit der Theorie der complexen Multiplication einerseits und der Kreisteilungslehre andererseits. Um die darin vorkommenden Entwickelungen zu charakterisiren, heben wir folgenden Satz heraus: „Die Differentialgleichung habe die Gestalt

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y,$$

und y gehe bei einem geschlossenen Umlaufe von x, für welchen die algebraischen Coefficienten Y unverändert bleiben, in εy über, wo ε wegen der Irreductiblität der algebraischen Function y eine Einheitswurzel sein muss. Unter der Voraussetzung, dass die reducirte Gleichung überhaupt kein Abel'sches Integral hat, kann die complete Differentialgleichung nur dann durch ein elliptisches Integral erster Gattung befriedigt werden, wenn der Integralmodul des elliptischen Integrals ein Modul der complexen Multiplication ist, wofern ε nicht $= -1$ ist." Mit Hülfe dieses Satzes kann man

u. A. die einzigen Formen der elliptischen Integrale angeben, auf welche ein Abel'sches Integral

$$\int y dx,$$

worin y eine algebraische Function der bezeichneten Art bedeutet, reducirbar ist. Die transformirten Variablen sind rationale Functionen von y. Auch in dem allgemeineren Fall, dass zwischen mehreren Werten der Function y auf der rechten Seite der complexen Differentialgleichung eine lineare Relation stattfindet, werden die Bedingungen für die Existenz eines elliptischen Integrals festgestellt. Hierbei kommen Sätze von Zerlegung der Kreisteilungsgleichung zur Anwendung. Hr.

L. Königsberger. Ueber die Irreductibilität von Differentialgleichungen. Kronecker J. XCII. 291-301.

In der Arbeit „Allgemeine Bemerkungen zum Abel'schen Theorem" (Borch. J. X. C. 109ff. vgl. F. d. M. XII. 1880. p. 320.) hat der Verfasser eine Definition der Irreductibilität einer beliebigen algebraischen Differentialgleichung gegeben, die im Vorliegenden vereinfacht wird. Eine algebraische Differentialgleichung heisst hiernach irreductibel, wenn sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist und kein algebraisches Integral irgend einer Ordnung besitzt. Dem entsprechend lassen sich auch die in späteren Arbeiten vom Verfasser bewiesenen Sätze, die die Unveränderlichkeit von algebraischen Relationen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen betreffen, in einer neuen Fassung angeben, beziehentlich erweitern. Als Anwendung dieser Bemerkungen wird der Beweis des folgenden Satzes angefügt: „Wenn eine reductible lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ein algebraisches Integral ϱ^{ter} Ordnung besitzt, und zwischen den m particulären Integralen und deren $\varrho-1$ ersten Ableitungen keine algebraische Beziehung besteht, dann ist jenes algebraische Integral eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung."

Hr.

L. Königsberger. Eigenschaften der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Gött. N. 1882. 686-689.

Der Verfasser ergänzt die am Schlusse seiner „allgemeinen Untersuchungen“ (siehe das vorhergehende Referat) gegebenen Sätze durch eine Reihe von Sätzen, von denen in dieser Note einige ohne Beweis veröffentlicht werden.

1. Ist die rechte Seite y einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten eine solche algebraische Function der unabhängigen Variablen x, dass y für eine Umkreisung von x, für welche die Coefficienten auf der linken Seite unverändert bleiben, in

$$\varepsilon y = e^{\frac{2\pi i}{\mu}} y$$

übergeht, so ist das algebraische Integral einer solchen Differentialgleichung, wenn es existirt, abgesehen von etwaigen additiven algebraischen Integralen der reducirten Differentialgleichung multiplicirt mit Constanten, stets von der Form

$$y[\psi_1 + y^\mu \psi_{\mu+1} + \cdots + y^{(k-1)\mu} \psi_{(k-1)\mu+1}],$$

wo die ψ rationale Functionen von x und den Coefficienten der linken Seite bedeuten, oder es geht bei einer Umkreisung von x ebenfalls in das ε-fache über. Unter derselben Voraussetzung für die rechte Seite der Differentialgleichung kann dieselbe, wenn die reducirte Gleichung keine logarithmischen Integrale besitzt, nur dann durch ein Integral $A \log v$, wo A eine Constante, v eine algebraische Function von x bedeutet, befriedigt werden, wenn $\mu = 1$ oder $= 2$ ist. Aehnliche Sätze gelten für die Existenz einer Summe von mehreren Logarithmen.

2. Hat die rechte Seite y die Eigenschaft, dass für einen ϱ-fachen Cyclus (ϱ eine Primzahl) drei Zweige in einem homogenen linearen Zusammenhang stehen, so kann unter der nämlichen Voraussetzung für die reducirte Gleichung wie oben die vollständige Differentialgleichung kein logarithmisches Integral, multiplicirt mit einer Constanten, besitzen. Stehen vier Zweige in einem linearen homogenen Zusammenhang, so kann dieselbe einen Logarithmus zum Integral haben, wenn $\varrho = 7$, und die Entwicke-

lung von y

$$y = \psi_1'(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{7}} + \psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{7}} + \psi_4(x)(x-\alpha)^{\frac{4}{7}}$$

oder

$$y = \psi_3(x)(x-\alpha)^{\frac{3}{7}} + \psi_5(x)(x-\alpha)^{\frac{5}{7}} + \psi_6(x)(x-\alpha)^{\frac{6}{7}},$$

ist, wo die ψ nach ganzen Potenzen von $x-\alpha$ fortschreiten, und die Zähler der Exponenten entweder die quadratischen Reste oder Nichtreste von 7 sind.

Aehnliche Sätze gelten unter der Annahme von Integralen von der Form

$$u \log v + u_1 \log v_1 + \cdots,$$

worin die u und v algebraische Functionen bedeuten.

Hr.

L. Fuchs. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Berl. Ber. 1882. 703-710.

Es werden in dieser Note die hauptsächlichen Resultate einer demnächst erscheinenden ausführlicheren Arbeit angegeben, welche die Ergründung der Natur der Integrale von Differentialgleichungen der im Titel charakterisirten Beschaffenheit zum Gegenstand hat, und es wird das Problem für den Fall der Differentialgleichungen dritter Ordnung erledigt. Es sei

$$(1) \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

eine Differentialgleichung 3ter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten, deren Integrale in der Umgebung aller singulären Punkte regulär sind, wobei die Wurzeln sämmtlicher determinirender Gleichungen rationale Zahlen sind. Es bestehe ferner zwischen drei Fundamentalintegralen eine irreductible Gleichung n^{ten} Grades

$$(2) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

wo f eine ganze homogene Function mit constanten Coefficienten ist; dann gelten folgende Sätze:

„Ist $n = 2$, dann ist jedes Integral ein Quadrat eines Integrals einer Differentialgleichung 2ter Ordnung mit rationalen Coefficienten. Ist $n > 2$, dann sind die Integrale algebraische Functionen von z.“ Hierbei ergeben sich drei Fälle.

1) Die Klasse p der Gleichung (2) ist grösser als 1; dann ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, der das allgemeine Integral von (1) genügt, $\leqq 4$.

2) $p = 1$, dann ist diese Anzahl 2, 3, 4 oder 6.

3) $p = 0$, dann ist das allgemeine Integral von (1), abgesehen von der Wurzel einer rationalen Function als Factor, durch eine ganze homogene Function n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit rationalen Coefficienten in z ausdrückbar.

Da es an sich einleuchtend ist, dass jede algebraisch integrirbare Gleichung (1) die Eigenschaft hat, dass zwischen drei Fundamentalintegralen eine Gleichung (2) besteht, so sind im Vorstehenden alle Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung 3ter Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt. Hr.

L. Sauvage. Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes. Ann. de l'Éc. Norm. (2) XI. 33-78.

Die Abhandlung des Herrn Fuchs über die linearen und homogenen Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung (1866) enthält die fundamentalen Principien der Theorie dieser Gleichungen. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, diese Theorie auf Systeme von Differentialgleichungen mit einer oder mehreren unabhängigen Variabeln auszudehnen. Die beiden ersten Capitel enthalten die Haupteigenschaften der Lösungen eines Systems totaler Differentialgleichungen von der Form:

$$dy_i = (a_{i1}\,y_1 + a_{i2}\,y_2 + \cdots + a_{in}y_n)\,dx_1 + \cdots + (l_{i1}\,y_1 + l_{i2} + \cdots + l_{in}\,y_n)\,dx_p,$$

wo $i = 1, 2, \ldots, n$, in denjenigen Bereichen der Ebene ist, wo die Coefficienten $a, b, \ldots, l$ analytische Functionen der p unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sind. Im dritten Capitel beschäftigt sich der Herr Verfasser mit linearen und homogenen Differentialgleichungen einer einzigen unabhängigen Variablen. Wenn man auf diese Systeme die aus dem Vorhergehenden bekannten allgemeinen Eigenschaften anwendet, so erhält man die Formen, welche die Elemente eines Fundamentalsystems von Lösungen in der Umgebung eines isolirten singulären Punktes annehmen können. M.

F. Casorati. Sulle equazioni differenziali lineari. Rom, Acc. L. (3) VI. 121-124.

In der Arbeit „Generalizzazione di alcuni teoremi etc." (Brioschi Ann. (2) X. 224, s. F. d. M. XIII. 1881. 261) hatte der Verfasser einen Weg angegeben, die Coefficienten der algebraischen Gleichung zu bestimmen, deren Wurzeln die logarithmischen Ableitungen von particulären Lösungen einer gegebenen Differentialgleichung sind, falls ihre Zahl nicht grösser als 3 ist. Im Vorliegenden lenkt der Verfasser die Aufmerksamkeit auf eine in Acc. R. d. L. X. enthaltene Note des Herrn Besso, in welcher ein Verfahren gezeigt wird, für eine beliebige Anzahl von Lösungen zu den Ausdrücken für die fraglichen Coefficienten zu gelangen. Es seien $y_1, \ldots, y_m$ m Lösungen einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, ihr Product $y_1 y_2 \ldots y_m = z$. Differentiirt man z beliebig oft hinter einander, so erhält man Glieder von der Form:

$$y_1^{(\alpha_1)} y_2^{(\alpha_2)} \ldots y_m^{(\alpha_m)},$$

deren Zahl endlich ist, wenn man die Indices α vermöge der gegebenen Differentialgleichung unter n erniedrigt. Man fahre nun mit dem Differentiiren so lange fort, bis man die Anzahl von Gleichungen erhält, die hinreicht, diese Glieder, die übrigens in symmetrischen Gruppen vorkommen, zu bestimmen. Unter diesen Gruppen befinden sich auch die folgenden:

$$z \sum_\alpha \frac{y'_\alpha}{y_\alpha}, \quad z \sum \frac{y'_\alpha y'_\beta}{y_\alpha y_\beta}, \ldots, z \frac{y'_1 y'_2 \ldots y'_m}{y_1 y_2 \ldots y_m},$$

worin die Factoren von z die zu bestimmenden Coefficienten sind, die sich sonach rational durch z, die Coefficienten der Differentialgleichung und die Ableitungen aller dieser Functionen ausdrücken lassen. An diesen Satz knüpft der Verfasser einige Bemerkungen. Da die Grössen $z, z' \dots$ in den Ausdrücken für die Coefficienten nur in den Verbindungen $\frac{z'}{z}, \frac{z''}{z}, \dots$ vorkommen, und da $\frac{z^{(k)}}{z}$ sich rational durch $\frac{z'}{z}$ und dessen Ableitungen ausdrücken lässt, so gilt dasselbe auch für die Coefficienten der in Rede stehenden algebraischen Gleichung. Ferner kann man, wie aus dem Vorhergehenden leicht erhellt, die Coefficienten einer linearen homogenen Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung, deren μ Lösungen zu ihren logarithmischen Ableitungen μ gegebene Ausdrücke von der Form

$$\varphi_1\left(x, \frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_m}{y_m}\right), \dots, \varphi_\mu\left(x, \frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_m}{y_m}\right)$$

haben sollen, falls

$$y_1, y_2, \dots, y_m = z$$

bekannt ist, in x und den Wurzeln der algebraischen Gleichung darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von $\frac{z'}{z}$, den Quotienten der gegebenen Differentialgleichungen und den Ableitungen dieser Grössen sind. Hr.

E. Jürgens. Das Integral $\int_\alpha^\beta \frac{y dz}{x-z}$ und die linearen Differentialgleichungen. Klein Ann. XIX. 435-461.

Der vorliegenden Untersuchung dient folgender Satz zum Ausgangspunkt: „Wenn y der Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$\varphi(z)y + \varphi_1(z)\frac{dy}{dz} + \dots + \varphi_n(z)\frac{d^n y}{dz^n} = 0$$

genügt, und man setzt in dem Ausdruck

$$D(\eta) = \varphi(x)\eta + \varphi_1(x)\frac{d\eta}{dx} + \cdots + \varphi_n(x)\frac{d^n\eta}{dx^n}$$

für η das Integral

$$\sigma = \int_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$$

ein, so ist das Substitutionsresultat eine rationale Function von x.“ Hierfür werden zwei Beweise geliefert, einmal mit Hülfe von Reihenentwickelungen, dann durch Zusammenstellung von $D(\eta)$ mit seinem adjungirten Differentialausdruck. (§§ 1, 2). Die nächste Aufgabe ist, zu ermitteln, unter welchen Bedingungen der mit $G(x)$ bezeichnete ganze Teil der rationalen Function wegfällt. Die allgemeinste Differentialgleichung, bei der $G(x)$, unabhängig von der Wahl des particulären Integrals y und der Integrationsgrenzen α und β, verschwindet, enthält, wie die Discussion ergiebt, $n(n+1)$ willkürliche Constanten. Gehört die zu Grunde liegende Differentialgleichung nicht in diese Classe, so hat man, um $G(x)$ zum Verschwinden zu bringen, entweder das particuläre Integral geeignet zu wählen oder statt der einen Grösse σ ein lineares homogenes Aggregat solcher Grössen einzuführen. (§ 3). Was den mit $P(x)$ bezeichneten gebrochenen Teil betrifft, der die Form $[P(x, z)]_\beta^\alpha$ hat, so sind hier lediglich die Grenzen $z = \alpha$ und $z = \beta$ in Betracht zu ziehen. Ist α ein nicht singulärer Punkt der Differentialgleichung, also $\varphi_n(\alpha)$ von Null verschieden, so reducirt sich $P(x, z)$ für dasjenige partikuläre Integral y, welches nebst seinen $n-2$ ersten Ableitungen für $z = \alpha$ Null wird, an der Grenze $z = \alpha$ auf das eine Glied $\frac{A}{x-\alpha}$, wo

$$A = \left[\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}\varphi_n(z)\right]_{z=\alpha}$$

ist. In dem Falle, dass α ein singulärer Punkt ist, werden unter der Annahme, dass die Differentialgleichung zu der von Herrn Fuchs (Borchardt Journal Bd. 66) charakterisirten Classe gehört, durch Betrachtung der Wurzeln der zugehörigen determinirenden Gleichung die Bedingungen festgestellt, unter denen $P(x, z)$, sei es für alle oder einige, particuläre Integrale an der Grenze $z = \alpha$

verschwindet. Unter den Ergebnissen dieser Discussion heben wir hier das eine hervor, dass, falls $\varphi_n(\alpha)$ von der n^{ten} Ordnung Null wird, $P(x, z)$ für $z = \alpha$ bei beliebiger Wahl von y verschwindet, wenn der reelle Teil jeder Wurzel der determinirenden Gleichung grösser als -1 ist. Schliesslich wird noch der Fall $\alpha = \infty$ betrachtet. (§§ 4, 5). Giebt es zwei singuläre Stellen z, für welche $P(x, z)$ bei einem particulären Integral y verschwindet, und wählt man dieselben zu Grenzen, so fällt P für dieses Integral weg. Fehlt nun auch G für dasselbe Integral, dann besitzt die Differentialgleichung $D(y) = 0$ ausser y noch ein zweites Integral in $\sigma = \int_\alpha^\beta \frac{y dz}{x-z}$. Dies trifft bei der Differentialgleichung für die Kugelfunctionen ein, welche die beiden Integrale

$$P_n(x) \text{ und } Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z) dz}{x-z}$$

hat. Die entwickelten Sätze liefern ferner ein bequemes Mittel, die vollständige Differentialgleichung $D(y) = \text{Rat. } F(x)$ zu integriren, insbesondere, wenn für die reducirte Gleichung $G(x)$ fehlt, und mindestens eine singuläre Stelle z_1 vorhanden ist, für welche $P(x, z)$ bei beliebiger Wahl von y verschwindet. Wählt man z. B. dasjenige Integral $y = f(x)$ von $D(y) = 0$, welches für $x = a$ nebst seinen $n-2$ ersten Ableitungen verschwindet, während die $(n-1)^{\text{te}}$ den Wert $\frac{1}{\varphi_n(a)}$ annimmt, so hat die Gleichung

$$D(y) = \frac{1}{x-a},$$

wie aus dem Obigen folgt, das Integral $\sigma = \int_a^{z_1} \frac{f(z) dz}{x-z}$. Den Beschluss bildet die Ausführung der Rechnung an einem Beispiel (§§ 6. 7). Hr.

J. Boussinesq. Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles. C. R. XCIV. 208-210.

Ist $\varphi(x, y) = c$ das allgemeine Integral der Gleichung

$y' = f(x, y)$, so werden die Integrale, die der Verfasser „asymptotes" nennt, definirt durch die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \infty$. Ebenso müssen im Falle eines Systems simultaner Differentialgleichungen, falls $\varphi(y_1, y_2, \dots, x) = c$ ein Integral desselben ist, für die asymptotischen Integrale die Bedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \dots = \infty$$

erfüllt sein. Hr.

F. Hočevar. Zur Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung $Ldx + Mdy + N(xdy - ydx) = 0$.
Wien. Ber. LXXXV. 848-864.

Die Gleichung

$$\frac{dx}{a_1x+b_1y+c_1-x(a_3x+b_3y+c_3)} = \frac{dy}{a_2x+b_2y+c_2-y(a_3x+b_3y+c_3)}$$

wird in der Form integrirt:

$$\xi_1^{\lambda_2-\lambda_3}\xi_2^{\lambda_3-\lambda_1}\xi_3^{\lambda_1-\lambda_2} = \text{const.},$$

wo zur Abkürzung

$$\xi_1 = \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1,$$
$$\xi_2 = \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2,$$
$$\xi_3 = \alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3$$

gesetzt ist, und die drei Systeme der α, β, γ, λ durch die Gleichungen

$$a_1\alpha+a_2\beta+a_3\gamma = \lambda\alpha,$$
$$b_1\alpha+b_2\beta+b_3\gamma = \lambda\beta,$$
$$c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma = \lambda\gamma$$

bestimmt werden. Es werden dann die Fälle betrachtet, wo zwei Wurzeln λ conjungirt complex, und wo sie einander gleich sind. Das Integral ist algebraisch, wenn zwei Wurzeln conjungirt, und die reellen Teile aller einander gleich sind. Sind alle drei λ einander gleich, so ergiebt sich als Integral:

$$\frac{\xi'^1}{\xi} - \frac{\xi'^2}{\xi^2} = \text{const.},$$

wo $\xi' = \frac{d\xi}{d\lambda}$. Es folgt der Nachweis, dass die in den abge-

leiteten Integralen auftretenden Constanten stets in endlicher Form berechenbar sind, mit Anwendung des Satzes, dass, wenn eine Determinante Null ist, die Adjuncten zweier beliebiger Zeilen einander proportionirt sind, woraus als neuer Satz hergeleitet wird: „Die Determinante, welche aus einer Determinante hervorgeht, indem man die Elemente der i^{ten} Colonne durch die Adjunction der k^{ten} Zeile ersetzt, ist mit jener gleichzeitig Null."

H.

J. W. L. Glaisher. Examples illustrative of Cayley's theory of singular solutions. Mess. (2) XII. 1-14.

Im Messenger (2) II. 6—12 (siehe F. d. M. IV. 1872. p. 148.) hat Cayley die Theorie der singulären Lösungen der Differentialgleichung $\varphi(x, y, p) = 0$ betrachtet, wo φ eine rationale ganze Function n^{ten} Grades von p und einwertig in Bezug auf x und y ist. Im Messenger (2) VI. 23—27 (s. F. d. M. VIII. 1876. p. 185) hat er dann den speciellen Fall $n = 2$ betrachtet. Herr Glaisher recapitulirt die allgemeine Theorie, aus der folgt, dass, wenn $Lp^2+2Mp+N = 0$ die Differentialgleichung ist, und die Integralgleichung $Pc^2+2Qc+R = 0$ ein System von algebraischen Curven darstellt, die singuläre Lösung $LN-M^2 = 0$ die Cusp. und den Tac.-locus giebt und die singuläre Lösung $PR-Q^2 = 0$ den Cusp.- und den Node-locus giebt. Diese Theorie wird an 21 Beispielen erläutert.

Glr. (O.).

W. P. Workman. On tac-loci. Mess. (2) XII. 21-25.

Dieser Aufsatz bezieht sich auf die vorstehende Arbeit. Der Verfasser giebt eine Relation zwischen dem Tac-locus und der Integralgleichung, mit deren Hülfe gewisse von Cayley ohne Beweis mitgeteilte Resultate bewiesen werden. Es wird auch bewiesen, dass wenn r der Grad der Gleichung in c ist, der Tac-locus $r(r-1)$ Mal vorkommt.

Glr. (O.).

H. M. Perry. Note on singular solutions. J. Hopkins Circ. 1882. 212.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades, für die $u = 0$ eine singuläre Lösung ist, kann immer geschrieben werden: $y' = \varphi_1 + y'_u$, wo y'_u der Wert von y' ist, den man aus $u = 0$ durch Differentiation erhält, und φ_1 eine Function von x und u ist, welche mit $u = 0$ verschwindet. Die Differentialgleichung der 2ten Ordnung wird dann für $u = 0$:

$$y'' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\varphi_1 + y''_u = \varphi_2 + y''_u$$

und, wenn φ_2 mit u verschwindet, die der 3ten Ordnung

$$y'''\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\varphi_1 + y'''_u = \varphi_3 + y'''_u,$$

u. s. f. Hieraus zieht man folgende Ergebnisse: Wenn in der Entwickelung von φ_1 nach steigenden Potenzen von u der Exponent der niedrigsten Potenz n ist, dann ist $u = 0$ eine singuläre Lösung für alle Differentialgleichungen, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{1-n}$ ist. Liegt $\frac{1}{1-n}$ zwischen zwei ganzen Zahlen r und $r+1$, dann genügt $u = 0$ der $r$ten Differentialgleichung und macht die $(r+1)$te und alle höheren Derivirten unendlich. Wenn $\frac{1}{1-n}$ negativ ist, genügt $u = 0$ allen Differentialgleichungen. Ist endlich $0 < n < \frac{1}{2}$, dann ist $u = 0$ die Gleichung einer Curve, welche die Curven des vollständigen Integrals in deren Spitzen berührt.

Hr.

— —

W. Heymann. Ueber eine Transformation der Differentialgleichung

$$\varphi_0 \frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0.$$

Schlömilch Z. XXVII. 374-380.

Durch die Substitution

$$y = \frac{\varphi_0}{\varphi_1}\,\frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

geht vorstehende Gleichung in die lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$\varphi_0^2 f_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi_0 f_1 \frac{dv}{dx} + f_2 v = 0$$

über, worin die f ganze Functionen in x sind, falls die φ als solche vorausgesetzt werden. Zweck der Note ist der Nachweis, dass die letzte Gleichung durch die Substitution

$$v = we^{\int \frac{G dx}{\varphi_0}}$$

worin G eine passend zu bestimmende Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, falls φ_0 vom n^{ten} Grade ist, stets in eine solche Differentialgleichung übergeführt werden kann, deren linke Seite den Factor $\varphi_0(x)$ ausscheiden lässt, wodurch der Grad der Coefficienten um den Grad von φ_0 erniedrigt wird. Diese Transformation wird auf die Gleichung

$$(a+bx+cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F = 0$$

angewandt, welche durch die ersterwähnte Substitution in die Gleichung 2ter Ordnung

$$(a+bx+cx^2)^2 \frac{d^2v}{dx^2} + (a+bx+cx^2)\ (a_1+b_1x)\ \frac{dv}{dx}$$
$$+(a_0+b_0+c_0x^2)v = 0$$

übergeht, und es wird gezeigt, dass ihre Integration, wie übrigens anderweitig bekannt, von der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe abhängig ist. Hr.

W. Heymann. Zur Integration der Differentialgleichungen.

Schlömilch Z. XXVII. 1-41.

In einer früheren Arbeit (Schlömilch Z. XXIV. 252 ff.; siehe F. d. M. XI. 1879. p. 225 f.) hatte der Verfasser zur Integration gewisser Differentialgleichungen erster Ordnung $f(x, y, y') = 0$ die Substitution $x = \frac{dv}{du}$, $y = u\frac{dv}{du} - v$ mit Vorteil verwendet. Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergiebt dasselbe

H. M. Per[illegible]
1882. 21[illegible]

Ein[illegible] [illegible] Princip: Führt man in einer solchen $F\left(u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}\right) = 0$,
für die deren Integral $F_1(u, v, c_1, c_2) = 0$ man ermitteln kann, die obige
werd[illegible] Substitution aus, so erhält man das Integral der so entstehenden
$u =$ neuen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn man u und v
un[illegible] aus den Gleichungen
c' [illegible]

$$F_1 = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u} + x\frac{\partial F_1}{\partial v} = 0, \quad v - ux + y = 0$$

eliminirt. Dies Verfahren wird auf die linearen homogenen Differentialgleichungen und speciell auf die Liouville'sche (Journal de l'éc. polyt. t. 13)

$$(a_2 + b_2 u + c_2 u^2)\frac{d^2v}{du^2} + (a_1 + b_1 u)\frac{dv}{du} + a_0 v = 0$$

angewendet. Da die behandelte Transformation im Grunde mit einer Vertauschung von Punkt- mit Liniencoordinaten identisch ist, so wird im zweiten Abschnitt der Arbeit ganz allgemein auf eine solche Vertauschung in homogenen Coordinaten eingegangen. Die in den x einerseits und in den u andererseits homogene Gleichung $f(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0$ liefert zwei verschiedene Differentialgleichungen, je nachdem man die x durch die Determinante (u, du) oder die u durch die (x, dx) ersetzt; ist eine dieser Gleichungen integrirt, so ist dann auch das Integral der anderen auf algebraischem Wege zu ermitteln (cf. Clebsch Geometrie; Art. Connexe). Dies wird durch einige specielle Fälle illustrirt, bei welcher Gelegenheit die Zweckmässigkeit der Einführung von gewissen überflüssigen willkürlichen Constanten betont wird.

Der dritte, umfangreichste Abschnitt liefert Beiträge zur Integration der Differentialgleichung $Mdy + Ndx = 0$, wo M und N ganze Functionen zweiten Grades von x, y sind. Zunächst wird der Fall einer ausführlichen Untersuchung unterworfen, dass M von y unabhängig ist, und derselbe auf die Bernoulli'sche Gleichung reducirt. Liouville hat bei der Integration der nach ihm benannten Differentialgleichung Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl benutzt; dasselbe Verfahren lässt sich, wie ferner gezeigt wird, auch auf gewisse Fälle der vorliegenden

Differentialgleichung anwenden. Sodann wird untersucht, in welchen Fällen die Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$ auf den behandelten Fall, dass M von y unabhängig ist, reducirt werden kann. Damit die Substitution $x=ay+u$ dies leiste, sind zwei Bedingungen von den Coefficienten von M und N zu erfüllen, und zwar dieselben, die erforderlich sind, damit zwei parallele Gerade der Differentialgleichung particulär genügen. Führt man homogene Coordinaten ein, so besitzt die Gleichung in dem betrachteten speciellen Falle drei in einem Punkte sich schneidende Gerade als particuläre Integrale. Diese Eigenschaft ist umgekehrt für die Specialität charakteristisch. Hieran wird die Frage geknüpft, ob die Integration auch dann geleistet werden kann, wenn sich die drei particulären Geraden nicht in einem Punkte schneiden; jedoch bereits in einem ganz speciellen Falle ist man genötigt, zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung aufzusteigen.

Schliesslich werden einige Fälle, nämlich:

$ydy+(\alpha xy+\beta y+\gamma)\,dx=0,\ \ 2xy\,dy-(y^2+\alpha xy+2\beta x-\gamma y)\,dx=0$

und der Fall, dass M in x, y linear ist, mittels quadratischer Substitutionen erledigt. T.

V. G. Imschenetzky. Erweiterung der Euler'schen Methode, alle Fälle zu bestimmen, in welchen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von gewisser Art sich integriren lässt, auf lineare Differentialgleichungen im Allgemeinen. St. Petersburg.

Hat man eine lineare Differentialgleichung

$$L=py+qy'+ry''+sy'''+\cdots+uy^{(n-1)}+vy^{(n)}=w,$$

wo p, q, r, s, ..., u, v die gegebenen Functionen von x sind, so kann man sie durch partielle Integration nach Multiplication beiderseits mit dx auf folgende Form bringen:

(1) $\int(p)ydx+(q)y+(r)y'+\cdots+(u)y^{(n-2)}+vy^{(n-1)}=\int wdx+\text{const.},$

wo zur Abkürzung

$$(2)\quad \begin{cases} (p) = p-q'+r''-s'''+\cdots\pm v^{(n)}, \\ (q) = q-r'+s''-\cdots\mp v^{(n-1)}, \\ (r) = r-s'+\cdots\pm v^{(n-2)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (u) = u-v' \end{cases}$$

gesetzt ist. Differentiirt man dieselbe wieder nach x, so kann man, indem man

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{(p)} \\ \text{und} \\ y_1 = [(q)+(\nu)D+(s)D^2+\cdots+(u)D^{n-2}+vD^{n-1}]y \end{cases}$$

setzt, das Resultat auf die Form bringen

$$(4)\qquad y+\lambda y_1' = \lambda w.$$

Differentiirt man diese $(n-1)$-mal, und multiplicirt die so erhaltenen Gleichungen ((4) mitgerechnet) der Ordnung nach mit

$$\frac{(q)}{\lambda},\ \frac{(r)}{\lambda},\ \frac{(s)}{\lambda},\ldots,\frac{u}{\lambda},\ \frac{v}{\lambda},$$

so kommt man zur Gleichung:

$$(5)\qquad L_1 = p_1 y_1+y_1'q_1'+r_1y_1''+s_1y_1'''+\cdots+u_1y_1^{(n-1)}+vy_1^{(n)} = w_1$$

von derselben Art wie die gegebenen, deren Coefficienten durch algebraische Operationen nebst wiederholter Differentiation aus Coefficienten dieser erhalten werden. Dieses Verfahren kann nun immer wiederholt werden, und so kommt man zu einer Reihe von Gleichungen:

$$(6)\qquad L=0,\ L_1=0,\ L_2=0,\ldots,L_{i-1}=0,\ L_i=0\ldots,$$

zwischen Lösungen, die so beschaffen sind, dass zwischen je zwei benachbarten derselbe Zusammenhang stattfindet, welcher durch die Gleichung (3) und (4) für die beiden ersten ausgedrückt ist. Die Gleichung (4) lässt sich so schreiben:

$$y = \lambda(w-D\eta)$$

und giebt den Ausdruck der Lösung jeder Gleichung durch die nächstfolgende. Zur Erläuterung wird diese Methode auf die Gleichung 2[ter] Ordnung angewendet, und hier wird die Bemerkung gemacht, dass dieser Process auch rückwärts geführt werden kann, indem man eine Gleichung $L_1 = 0$ sucht, von welcher

die gegebene $L = 0$ durch denselben Process entstehen konnte, was aber für die 2[te] Ordnung die Integration einer linearen Differentialgleichung 1[ter] Ordnung verlangt, wodurch dieser Rückgang weniger vorteilhaft wird, als der directe Gang. Wird nun irgend eine von dieser Reihe von Gleichungen integrabel, so werden es auch die anderen.

Als erstes Beispiel für die Methode wird die Euler'sche Gleichung:

$$aX''y + bX'y' + Xy'' = 0,$$

wo

$$X = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

ist, genommen.

Hier wird die Bemerkung gemacht, dass die Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n . 1 . 2 . 3 \dots n} D^n(x^2 - 1),$$

welche man dem Rodrigues und Ivory zuzuschreiben pflegt, schon als ein particuläres Integral in der Euler'schen Formel:

$$P_n(x) = c' D^n(x^2 - 1)$$

enthalten ist. Vergleicht man die Euler'sche Methode mit der von Liouville (Methode der Integration durch Differentiiren mit beliebigem Ordnungsindex), so findet man, dass, obschon sie für die von Euler betrachteten Gleichungen in der von Liouville enthalten zu sein scheint, ihr doch, da sie auch auf lineare Differentialgleichungen überhaupt ausdehnbar ist, eine selbständige Bedeutung zuzuschreiben ist. Nach dem erwähnten Beispiele folgen noch vier andere. Ty.

H. Poincaré. Sur les fonctions fuchsiennes. C. R. XCIV. 163-166, 1038-1040, 1166-1167.

Die erste Note enthält die Angabe einer neuen Methode, eine gegebene Fuchs'sche Function durch Theta-Fuchs'sche Reihen auszudrücken. Dieselbe wird an der besondern Function auseinandergesetzt, die sich ergiebt, wenn man x als Function des Quotienten zweier Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)^2\dots(x-a_n)^2}$$

betrachtet, wo $\varphi(x)$ ein Polynom vom Grade $2n-2$ bedeutet, und die Integrale die Beschaffenheit haben, dass sie in der Umgebung der singulären Punkte $a_1, \dots, a_n, \infty$ regulär sind.

In der 2[ten] Note teilt der Verfasser im Zusammenhange mit seinen früheren darauf bezüglichen Untersuchungen, über die in diesem Jahrbuch berichtet ist, (vgl. F. d. M. XIII. 1881. p. 247ff.) einige neue Resultate mit betreffs der Darstellung der Integrale einer beliebigen linearen Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{d^nv}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \dots + P_1\frac{dv}{dx} + P_0v = 0,$$

worin $P_0, P_1, \dots, P_{n-2}$ rationale Functionen von x und y sind, zwischen denen eine algebraische Beziehung $f(x, y) = 0$ besteht. Die singulären Punkte der Differentialgleichung werden in solche erster und zweiter Kategorie geschieden, je nachdem die zugehörige determinirende Gleichung lauter rationale Wurzeln hat oder nicht. Es giebt im Allgemeinen zwei Fuchs'sche Functionen $F(z)$ und $F_1(z)$, die nur im Innern des Fundamentalkreises existiren und von der Beschaffenheit sind, dass $x = F(z)$, $y = F_1(z)$ der genannten algebraischen Relation genügen, dass ferner der Punkt (x, y) durch keinen singulären Punkt der 2[ten] Kategorie geht, so lange z innerhalb des Fundamentalkreises verbleibt, und dass endlich, wenn (x, y) durch einen singulären Punkt der ersten Kategorie geht, die $n-1$ ersten Ableitungen von $F(z)$ und $F_1(z)$ verschwinden. Die Integrale der Differentialgleichung sind Zeta-Fuchs'sche Functionen von z. Für den besonderen Fall, dass die Differentialgleichung gar keine singulären Punkte hat und $f(x, y) = 0$ vom Geschlechte p ist, werden zwei Formen angegeben, auf welche das den erwähnten Fuchs'schen Functionen entsprechende Polynom zurückgeführt werden kann. In jeder dieser Formen hat das Polygon Seiten, die Ecken bilden einen Cyclus; und die Summe der Winkel ist 2π. Ist $p = 1$, so reduciren sich F und F_1 auf doppelt periodische Functionen. Lässt die Differentialgleichung algebraische Integrale zu, so reduciren sich die Zeta-Fuchs'schen Functionen, durch welche die Integrale v im All-

gemeinen dargestellt werden, auf Fuchs'sche Functionen von derselben Gruppe mit x, die daher nach einem bekannten Satze mit x durch algebraische Relationen verbunden sind. Mit Bezugnahme auf eine am Schluss dieser Note gemachte Bemerkung, dass man x und y auch durch Fuchs'sche Functionen, die in der ganzen z-Ebene existiren, ausdrücken könne, wird in der letzten Note eine entsprechende discontinuirliche Gruppe von Substitutionen durch ein Polygon von $2n+1$ Seiten in der z-Ebene bestimmt. $2n$ Seiten desselben bestehen aus Kreisbogen, deren Mittelpunkte auf der reellen Axe liegen, und eine Seite ist ein Segment dieser Axe selbst. Die $2n$ Kreisbogen sind einander derart paarweise conjugirt, dass es eine lineare Substitution mit reellen Coefficienten giebt, durch die der eine Bogen in den conjugirten übergeführt wird. Die Combination dieser n Substitutionen ergiebt eine discontinuirliche Gruppe, welche zur Entstehung einer unendlichen Anzahl Fuchs'scher Functionen mit folgenden Eigenschaften führt: 1) Sie sind sämmtlich rationale Functionen einer derselben, $F(z)$; 2) sie existiren in der ganzen Ausdehnung der z-Ebene, ihre wesentlich singulären Punkte sind isolirt in unendlicher Anzahl und liegen alle auf der reellen Axe. Setzt man $x = F(z)$, $y = \sqrt{F'(z)}$, dann ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)y$, wo $\varphi(x)$ rational in x mit reellen Coefficienten ist. Die singulären Punkte der Differentialgleichung sind an Zahl $2n$ und paarweise conjugirt imaginär; in jedem derselben sind die Integrale regulär und die Differenz der Wurzeln der zugehörigen determinirenden quadratischen Gleichung ist ein aliquoter Teil der Einheit.

Hr.

P. Appell. Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algébriques. C. R. XCIV. 202-205.

Kurze Inhaltsanzeige einer der Akademie überreichten Abhandlung, deren Gegenstand lineare Differentialgleichungen der 2ten Ordnung von der Form sind:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \psi(x, y)\, z = 0,$$

wo ψ eine rationale Function bedeutet, und y mit x durch eine algebraische Gleichung vom Grade m und dem Geschlechte p verbunden ist. Es wird darin eine Methode angegeben, durch welche man erkennen kann, ob eine solche Gleichung ein Integral von der Form $z = e^{\int \varphi(x, y)\, dx}$ hat, wo φ eine rationale Function ist, und welche das Finden dieses Integrals möglich macht, wenn es existirt. Ist $p = 0$ oder 1, dann kann man die Gleichung auf die Form $\frac{d^2z}{dt^2} = f(t)z$ zurückführen, wo $f(t)$ im ersten Falle eine rationale, im zweiten eine doppelt-periodische Function von t ist. Das Integral wird hier $e^{\int \omega(t) dt}$, wo $\omega(t)$ für $p = 0$ rational in t und für $p = 1$ eine doppelt-periodische Function mit den nämlichen Perioden wie $f(t)$ ist, vorausgesetzt, dass die ursprüngliche Gleichung ein Integral der beschriebenen Art zulässt. Die befolgte Methode lässt sich auch auf die allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^kz}{dx^k} = \psi(x, y)z$$

anwenden. Schliesslich bemerkt der Verfasser betreffs einer linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit algebraischen Coefficienten, dass, wenn $p > 1$ ist, die Integration derselben auf die eines Systems von p linearen simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, deren Coefficienten eindeutige Functionen von p unabhängigen Variabeln mit $2p$ Gruppen von conjugirten Perioden sind. Hr.

E. Goursat. Sur les intégrales algébriques des équations linéaires. Darb. Bull. (2) VI. 120-124.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn das allgemeine Integral einer Differentialgleichung 2ter Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{dy}{dx} + by$$

algebraisch ist, zwischen zweien ihrer Integrale eine algebraische Beziehung mit constanten Coefficienten besteht. Im Vorliegenden wird die Umkehrung des Satzes bewiesen: Besteht zwischen zwei linear-unabhängigen Integralen von (1) eine algebraische Beziehung, so ist das allgemeine Integral eine algebraische Function von x. Eine Ausnahme tritt ein, wenn der Ausdruck

$$\frac{\left(2ab-\frac{db}{dx}\right)^2}{b^3}$$

von x unabhängig ist. In diesem Falle lässt sich die Integration der Gleichung auf Quadraturen zurückführen. Die angewandte Methode zeigt übrigens, dass man jedes Mal, wenn eine Beziehung, sie sei algebraisch oder nicht, zwischen zwei verschiedenen Integralen der Gleichung bekannt ist, das allgemeine Integral durch blosse Differentiationen und Eliminationen erhalten kann.

Hr.

Th. Pepin. Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXIV. 243-389.

Die Frage, unter welchen Bedingungen eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung nur algebraische Integrale habe, ist bekanntlich zuerst von Herrn Fuchs in der wichtigen in Borchardt's J. LXXXI. p. 97 (siehe F. d. M. VII. 1875. 172) erschienenen Arbeit zum Abschluss gebracht worden. Herr Pepin, der dieselbe Aufgabe früher in seiner in Tortolini's Ann. 1863 veröffentlichten Abhandlung gelöst zu haben glaubte, war darin, wie Herr Fuchs gelegentlich einer von Herrn Pepin erhobenen Reklamation nachwies, zu falschen Resultaten gelangt, die dieser später in Brioschi's Ann. 1877 rectificirt hat (siehe F. d. M. VIII. 1876. p. 188, X. 1878. 228). In der vorliegenden umfangreichen Abhandlung nimmt der Verfasser den inzwischen mehrfach behandelten Gegenstand wieder auf, mit dem Bemerken, dass die bisherigen Methoden zur Lösung des Problems, die er übrigens

weder nach ihren Urhebern noch sonst näher bezeichnet, der Vervollkommnung bedürfen, um praktisch zu sein.

Die Arbeit besteht aus drei Teilen. Der erste enthält zunächst allgemeine Sätze über das Verhalten des als algebraisch vorausgesetzten Integrals der Differentialgleichung 2ter Ordnung von der Form

$$(1) \qquad y'' = Py$$

bei verschiedenen Umkreisungen der unabhängigen Variabeln x. Dieser Abschnitt ist, abgesehen von der Vereinfachung im Beweisverfahren, eine Reproduction des Inhalts der erwähnten Abhandlung von 1863, aus der wir folgende Sätze hervorheben:

1. Ein Integral y von (1) gehe durch einen geschlossenen Umlauf von x in θy über, dieses durch denselben Umlauf in $\theta^2 y$, u. s. f.; dann besteht zwischen den Gliedern dieser Reihe die recurrente Gleichung $\theta^{m+2}y - \delta\theta^{m+1}y + \theta^m y = 0$, wo δ eine Constante ist. Genügen der Gleichung (1) die Wurzeln einer irreductiblen Gleichung vom Grade n, dann giebt es immer einen Umlauf von x, durch welchen die eine Wurzel y in die andere θy übergeht. Die Anzahl der verschiedenen Glieder der Reihe $y, \theta y, \theta^2 y \ldots$ ist in diesem Falle stets endlich $= \mu$ und μ ein Teiler von n. Obige Grösse δ hat den Wert $\varrho + \varrho^{-1}$, wo ϱ einee primitive μ^{te} Wurzel der Einheit ist. θy ist eine rationale Function von x und y.

2. Steht θy mit y in keinem constanten Verhältnis, dann haben die beiden Integrale $\xi(y) = \theta y - \frac{1}{\varrho} y$, $\eta(y) = \theta y - \varrho y$ die Eigenschaft, dass durch denselben Umlauf von x, bei dem y in θy verändert wird, gleichzeitig ξ in $\varrho\xi$ und η in $\varrho^{-1}\eta$ übergehen. Bezeichnet man ξ mit y, η mit $\psi(y)$, so folgt hieraus, dass man jedes Integral in der Form $ay + b\psi(y)$ darstellen kann, wo y einer Gleichung der Form $F(y^\mu) = 0$ genügt, in der alle Exponenten von y Vielfache von μ sind, während $\psi(y)$ die Form $y^{\mu-1} f(y^\mu)$ hat. Aus weiteren Bemerkungen über das Verhalten von y und $\psi(y)$ bei Umkreisungen von x, die von der betrachteten verschieden sind, ergiebt sich ferner der Satz:

3. Ist $\varphi(y)$ ein Integral von (1), das weder mit y noch mit

$\psi(y)$ ein constantes Verhältnis hat, und substituirt man für y alle Wurzeln der Gleichung $F(y^{\mu}) = 0$, so ist die Anzahl der Werte von $\varphi(y)$, die unter einander in keiner constanten Beziehung stehen, stets ein Vielfaches von $\frac{\mu}{2}$ oder μ, je nachdem μ grade oder ungrade ist.

Im Folgenden kommt der Verfasser zum eigentlichen Gegenstande dieses Teils, der in der Ermittelung der oberen Grenze für den Grad der irreductiblen algebraischen Integralgleichung von (1) und der Aufstellung der reducirten Wurzelsysteme der letzteren besteht, eine Aufgabe, für welche die frühere Methode des Verfassers sich als unzulänglich erwiesen hatte. Die Lösung dieses Problems wird im Wesentlichen nach den Principien und Methoden, die Herr Fuchs in der erwähnten Arbeit, sowie in einer nachfolgenden ergänzenden Abhandlung in Borchardt's Journal LXXXV. (F. d. M. X. 1878. p. 228) entwickelt hat, durchgeführt. Eine Erwähnung des Herrn Fuchs findet man dem ungeachtet weder in der Einleitung, noch bei den wichtigeren Resultaten, sondern in der ganzen Arbeit nur einmal gelegentlich (p. 263), wo für „die Bezeichnung" des reducirten Wurzelsystems auf Herrn Fuchs verwiesen wird. Aber ebenso verdankt ihm der Verfasser die Einführung des Products der reducirten Wurzeln, welches eine Wurzel einer rationalen Function von x ist, in der Form einer ganzen homogenen Function (von Fuchs „Primform" genannt) derjenigen beiden Fundamentalintegrale, die oben mit y und $\psi(y)$ bezeichnet sind, desgl. die Anwendung der Hesse'schen Covariante H der Primform und der Hesse'schen Covariante von H zur Bestimmung des niedersten Grades einer Primform. In der Sache ist nur zu bedauern, dass der Verfasser die zweite Fuchs'sche Abhandlung über diesen Gegenstand, welche die Orientirung über die Gesammtheit der möglichen Primformen so erheblich erleichtert, nicht ausgiebig genug benutzt hat. Er würde zu den Resultaten, die die Bestimmung der einzig möglichen Typen der irreductiblen algebraischen Integralgleichungen, sowie die Herstellung der verschiedenen zweckdienlichen Typen betreffen, auf bequemerem und kürzerem Wege gelangt sein.

Der zweite Teil enthält die Auseinandersetzung einer praktischen Methode, die algebraischen Lösungen, wenn sie existiren, wirklich aufzustellen. Er zeichnet sich durch eine eingehende Behandlung des Gegenstandes aus, in der alle notwendigen Rechnungen bis zu Ende geführt werden, um zunächst die zur Existenz algebraischer Lösungen notwendigen Bedingungen für P zu erhalten, und, falls diese erfüllt sind, die Coefficienten der algebraischen Gleichung zu bestimmen. In allen Fällen dienen ausgeführte Beispiele dazu, die angewandte Methode zu erläutern. Dieselbe stimmt mit der von Herrn Fuchs in seiner zweiten Abhandlung gegebenen darin überein, dass die Lösung der Aufgabe von der Bestimmung zweier rationalen Functionen von x abhängig gemacht wird, weicht aber in dem Wege hierzu gänzlich ab. Der Verfasser bildet nämlich zunächst die „resolvirende" Gleichung, der das Product $u = y \cdot \psi(y)$ genügt. Zu dem Ende werden zwei solche von einander verschiedene aus Primformen zusammengesetzte binäre Formen, $f(y, \psi(y)) = p$ und $F(y, \psi(y)) = q$, ausgewählt, die rationale Functionen von x sind. Bedienen wir uns der Kürze wegen der Fuchs'schen Bezeichnungen in der zweiten Abhandlung, so lauten diese Formen in den drei allein in Betracht kommenden Fällen: $N = 4$, $L = 6$; $N = 6$, $L = 8$; $N = 12$, $L = 10$ (N der niedrigste Grad einer Primform, L der Index des zugehörigen Wurzelsystems) resp.

$$\varphi_6,\ f_4 \cdot H(f_4) - f_6^2,\ H(f_6) - f_{12},\ H(f_{12})$$

Aus den beiden Gleichungen $f(y, \psi(y)) = p$, $F(y, \psi(y)) = q$ erhält man dann in derselben Reihenfolge die nachstehenden Gleichungen in u:

$$u^4 + pu - q = 0,\quad u^6 - pu^2 + q = 0,\quad u^{12} + 10qu^6 - pu^2 + 5q^2 = 0.$$

Ist u bekannt, so erhält man y und $\psi(y)$ durch u, p, q algebraisch, und zwar explicite in Wurzelgrössen ausgedrückt. Die Frage ist also auf die Bestimmung der rationalen Functionen p und q zurückgeführt. Hierzu gelangt man, indem man in der aus (1) herleitbaren Differentialgleichung für u:

$$2\,\frac{d^2 \log u}{dx^2} + \left(\frac{d \log u}{dx}\right)^2 + \frac{c^2}{u} = 4P \qquad (c \text{ constant})$$

für die Differentialquotienten von u vermöge der algebraischen Gleichungen ihre Ausdrücke durch u substituirt. Der Umstand, dass die resultirende algebraische Gleichung für u die ursprüngliche irreductible Gleichung als Factor enthalten muss, ergiebt eine Anzahl von Bedingungsgleichungen, die p, q und deren Ableitungen enthalten und durch passende Umformungen in allen Fällen auf die einzige Bedingung zurückgeführt werden, dass einer nicht linearen Differentialgleichung 3[ter] Ordnung durch eine rationale Function genügt werde. Mit dieser Function stehen p und q in einfacher Verbindung.

Von der entwickelten Methode wird im 3[ten] Teile eine interessante Anwendung auf die Untersuchung der algebraischen Functionen gemacht, deren Entwickelung durch eine hypergeometrische Reihe gegeben ist. Die Resultate stimmen mit den von Herrn Schwarz (Borchardt's J. LXXV. 292, s. F. d. M. V. 1873. 249) auf gänzlich verschiedenem Wege gefundenen überein. Hr.

E. Picard. Sur les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires. C. R. XCIV. 418-421.

Die betrachteten Differentialgleichungen sind von der Form:

$$(1)\qquad x^2\frac{d^2u}{dx^2}+xF(x,y)\frac{du}{dx}+F_1(x,y)u=0,$$

wo $y=x^\mu$ (μ eine beliebige Constante) und F und F_1 Functionen von x und y bezeichnen, die in der Umgebung von $x=0$ und für jeden Wert von y eindeutig und stetig sind. Es handelt sich um die Ermittelung der Form der Integrale von (1) in der Umgebung von $x=0$. Die angewandte Methode besteht darin, für die gewöhnliche Differentialgleichung (1) ein passendes System partieller Differentialgleichungen zu substituiren. In der Voraussetzung, dass $\mu-1$ nicht eine reelle negative Grösse ist, und dass $F(0,0)$ nicht auf die Form $n+m(\mu-1)$ (n und m ganze positive Zahlen) gebracht werden kann, lautet die gesuchte Form der Integrale:

$$x^{\varrho_1}P_1(x,x^{\mu-1}),\ x^{\varrho_2}P_2(x,x^{\mu-1}),$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\varrho(\varrho-1)+\varrho F(0,0)+F_1(0,0)=0$$

sind, und $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ Functionen bedeuten, die in der Umgebung von $x=0$ und für jeden Wert von y eindeutig und stetig sind. Hr.

G. Darboux. Sur une proposition relative aux équations linéaires. C. R. XCIV. 1456-1459.

Kann man die Gleichung

$$y''+Py'+(Q-mR)y=0$$

für einen beliebigen Wert des Parameters m integriren, und ist Θ ein Integral der Gleichung

$$\Theta''+P\Theta'+Q\Theta=0,$$

so wird die Function

$$u=\frac{y'-\frac{\Theta'}{\Theta}y}{\sqrt{R}}$$

ein Integral der Gleichung

$$u''+Pu'$$
$$+u\left[-mR-\Theta\sqrt{R}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\Theta\sqrt{R}}\right)+\Theta\sqrt{R}\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{\Theta\sqrt{R}}\right)\right]=0$$

sein. Dass man durch diesen Satz zu einer unbegrenzten Zahl von Gleichungen gelangen kann, die den Parameter in der nämlichen Weise enthalten und für alle Werte des Parameters integrirbar sind, ergiebt sich aus dem Beispiel $y''=my$. Durch die Anwendung von $\Theta=x$ als Lösung von $\Theta''=0$ erhält man die Gleichung

$$y''=\left(\frac{1.2}{x^2}+m\right)y;$$

aus dieser wieder, indem man die Lösung $\Theta=x^2$ von $\Theta''=\frac{1.2}{x^2}\Theta$ wählt:

$$y''=\left(\frac{2.3}{x^2}+m\right)y, \text{ u. s. f.}$$

Hr.

F. Brioschi. Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari. Rom. Acc. L. (3) VI. 42-47.

Aus der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$y'' + py' + qy = 0$$

werden lineare Gleichungen höherer Ordnung abgeleitet, indem eine neue Variable z, deren Beziehung zu x durch eine Gleichung gegeben ist, eingeführt wird. Setzt man nun

$$e^{\int p\,dx} z' = \varphi(z), \quad q : z'^2 = \psi(z),$$

differentiirt diese Gleichungen mehrmals nach x und combinirt in passender Weise die Resultate, so gelangt man zu linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung in z, von denen der Verfasser folgende zwei aufstellt:

$$(1) \qquad z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + l_0 q)z' + l_1(q' + 2pq)z = 0,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} z^{\text{IV}} + 6pz''' + (4p' + 11p^2 + l_0 q)z'' \\ + [p'' + 7pp' + 6p^3 + l_0 pq + l_1(q' + 2pq)]z' \\ + l_2[(q' + 2pq)' + 3p(q' + 2pq)]z + l_3 q^2 z = 0, \end{cases}$$

in denen die l numerische Coefficienten bedeuten, unter der Annahme, dass zwischen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ folgende Relationen bestehen:

für (1) $\quad b(z) + l_0\psi(z) + l_1 z\alpha(z) = 0,$

„ (2) $\quad c(z) + l_0\psi(z)a(z) + l_1\alpha(z) + l_2\beta(z)z + l_3\psi^2(z)z = 0,$

wo

$$a(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \; b(z) = a'(z) + 2a^2(z),$$

$$c(z) = b'(z) + 3b(z)a(z), \; \alpha(z) = \psi'(z) + 2\psi(z)a(z),$$

$$\beta(z) = \alpha'(z) + 3\alpha(z)a(z).$$

Für $l_0 = 4$, $l_1 = 2$ stellt 1) die Gleichung dar, der das Product zweier Fundamentalintegrale der ursprünglichen Gleichung genügt; für $l_0 = 10$, $l_1 = 10$, $l_2 = 3$, $l_3 = 9$ wird 2) durch eine cubische Form der Fundamentalintegrale der ursprünglichen Gleichung befriedigt. Die Resultate werden dazu angewandt, um die linearen Differentialgleichungen abzuleiten, denen bei den Transformationen

5ter und 7ter Ordnung in der Theorie der elliptischen Functionen die transformirten Moduln als Functionen der ursprünglichen genügen. Die zu Grunde gelegte Gleichung 2ter Ordnung ist in beiden Fällen eine hypergeometrische. Hr.

D. Besso. Di alcune proprietà dell' equazione differenziale lineare, non omogenea del second' ordine. Rom, Acc. L. Mem XIV.

Casorati e Beltrami. Relazione. Rom., Acc. L. (3) VI. 226.

Das Product von m particulären Lösungen einer linearen vollständigen Differentialgleichung 2ter Ordnung genügt einer linearen vollständigen Differentialgleichung von der Ordnung $\frac{m(m+3)}{2}$; die m Lösungen selbst sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung m^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen derer der gegebenen Differentialgleichung, des Productes der m Lösungen und der Ableitungen aller vorbenannten Grössen sind. Ist $m=2$, so ist jedes Integral der Differentialgleichung 5ter Ordnung für das Product zweier Lösungen der gegebenen Differentialgleichung eine ganze homogene Function 2ten Grades von drei particulären Lösungen der letzteren, mit constanten Coefficienten, deren Summe gleich 1 ist, und umgekehrt genügt jede so beschaffene quadratische Form von drei particulären Lösungen der Differentialgleichung 2ter Ordnung der Differentialgleichung 5ter Ordnung für das Product zweier Lösungen der ersteren. Hr.

D. Besso. Di alcune proprietà dell' equazione differenziale lineare omogenea del second' ordine e di alcune equazioni algebriche. Rom. Acc. L. Mem. XIV.

Casorati e Beltrami. Relazione. Rom. Acc. L. (3) VI. 226.

Bedeutet z das Product von m particulären Lösungen $y_1,\dots,y_m$ der Differentialgleichung $y''+py'+qy=0$ und $S_{m,n}$ die Summe der Producte von $m-n$ der y mit den ersten Differentialquotien-

ten der übrigen n, so bestimmen sich die S successive durch die recurrente Formel

$$(n+1)\, S_{m,n+1} = S'_{m,n} + np\, S_{m,n} + (m-n+1)q S_{m,n-1}$$

in Verbindung mit den Anfangsgleichungen $S_{m,0} = z$, $S_{m,1} = z'$. Hieraus erhellt, dass $S_{m,n}$ von der Form

$$S_{m,n} = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z$$

ist, worin die a rationale Functionen von p, q und ihren Ableitungen bedeuten. z selbst genügt der Differentialgleichung $m+1^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$S'_{m,m} + pm S_{m,m} + q S_{m,m-1} = 0.$$

Die logarithmischen Ableitungen $\frac{y'_1}{y_1}, \ldots, \frac{y'_m}{y_m}$ sind Wurzeln der Gleichung m^{ten} Grades

$$(1) \qquad S_{m,0} t^m - S_{m,1} t^{m-1} + \cdots \pm S_{m,m-1} t \mp S_{m,m} = 0.$$

Unter den hiervon gemachten Anwendungen heben wir folgende hervor. Es wird vorausgesetzt, dass $p = 0$, und die Summe der m^{ten} Potenzen zweier particulärer Lösungen $y_1^m + y_2^m$ constant sei. Alsdann erhält man für y_1, y_2 die Werte

$$\left\{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - \frac{4}{m-1}\xi^m}\right\}^{\frac{1}{m}},$$

worin a eine willkürliche Constante und $q = \xi^{m-2}$ gesetzt ist. Andererseits kann man $y_1^m + y_2^m$ in der Form eines Products der m Particularlösungen

$$(y_1 - \varepsilon_1 y_2)\,(y_1 - \varepsilon_2 y_2) \ldots (y_1 - \varepsilon_m y_2) = z$$

darstellen, worin die ε die m^{ten} Wurzeln von -1 sind. Die Wurzeln der algebraischen Gleichung (1) sind demnach

$$t_r = \frac{y'_1 - \varepsilon_r y'_2}{y_1 - \varepsilon_r y_2},$$

also vermöge der bekannten Ausdrücke für y_1 und y_2 angebbar. Ferner ist in den betrachteten Fällen $S_{m,0} = 1$, $S_{m,1} = 0$. Die anderen Coefficienten der Gleichung (1) lassen sich durch $S_{m,2}$, $S_{m,3}$ rational ausdrücken. Da die t_r sich durch eben diese Grössen als Wurzelfunctionen darstellen lassen, so ist auf diese Weise eine Klasse von algebraischen Gleichungen m^{ten} Grades

charakterisirt, in denen zwei Coefficienten willkürlich bleiben, welche durch Wurzelgrössen auflösbar sind. Der Umstand, dass jede binäre Form m^{ten} Grades in die Summe der m^{ten} Potenzen von n linearen binären Formen transformirt werden kann, wenn $2n \gtreqless m+1$, führt den Verfasser auch auf die Betrachtung der Eigenschaften solcher Summen, deren Wiedergabe wir uns hier versagen müssen. Hr.

D. Besso. Sul prodotto di più soluzioni particolari d'un equazione differenziale lineare omogenea e specialmente dell' equazione differenziale del terz' ordine. Rom., Acc. L. Mem. XIV.

Casorati e Beltrami. Relazione. Rom., Acc. L. (3) VI. 226.

Mit Bezugnahme auf eine frühere Arbeit des Verfassers, (Mem. R. Acc. L. X.) die sich auf das Product von m particulären Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung bezieht, werden ausser einigen allgemeinen Bemerkungen über die dort aufgestellten Sätze einige Eigenschaften der Differentialgleichung 3ter Ordnung

$$(1) \qquad y'''+py''+qy'+ry = 0$$

entwickelt, die das Product $y_1\, y_2 = z$ zweier Particularlösungen betreffen. z genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung 6ter Ordnung. Die logarithmischen Ableitungen von y_1 und y_2 sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung 2ten Grades, deren Coefficienten rational durch z, die Coefficienten der Differentialgleichung und ihre Derivirten sich ausdrücken lassen. Die Bedingung dafür, dass zwischen drei linear unabhängigen Integralen von (1) eine ganze homogene Function 2ten Grades mit constanten Coefficienten besteht, wird durch die Gleichung

$$4p^3+18pp'+9p''-27q'+54r = 0$$

gegeben. Jede Lösung von (1) ist dann das Product von zwei particulären Lösungen einer Differentialgleichung 2ter Ordnung mit Coefficienten, die rational aus p, q, r und ihren ersten Ableitungen zusammengesetzt sind. (Vergl. die p. 242 besprochene

Arbeit des Herrn Fuchs). In dem speciellen Falle, dass $p = 0$, $q = 0$ und über r so verfügt wird, dass das Product constant wird, lässt sich das allgemeine Integral durch Wurzelgrössen ausdrücken. Hr.

D. Besso. Sopra una classe d'equazioni del sesto grado resolubili per serie ipergeometriche. Rom. Acc. L. Mem. XIV.

Casorati e Beltrami. Relazione. Rom. Acc. L. (3) VI. 226.

Die Resultate der im Vorhergehenden besprochenen Arbeit werden durch die Annahme $m = 6$ specialisirt. Ist

$$y'' + qy = 0$$

eine Differentialgleichung von der Eigenschaft, dass das Product von sechs ihrer particulären Integrale constant ist, dann lautet die Gleichung, welche die logarithmischen Ableitungen dieser Lösungen zu Wurzeln hat:

$$t^6 + S_2 t^4 - S_3 t^3 - \frac{1}{5} S_2^2 t^2 + \frac{1}{25} S_2 S_3 - \left(\frac{1}{50} S_3^2 + \frac{1}{125} S_2^3\right) = 0.$$

Die Differentialgleichung kann in dem betrachteten Falle mittelst einfacher Substitutionen in eine hypergeometrische transformirt werden, und die Wurzeln t_r werden durch die Formel gegeben:

$$t_r = \frac{12}{\sqrt[3]{5}} \sqrt[6]{a} \,.\, \xi^{\frac{2}{3}} (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \frac{c_r \varphi_1'(\xi) + \varphi_2'(\xi)}{c_r \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)},$$

worin die φ und ihre ersten Ableitungen mittelst hypergeometrischer Reihen sich ausdrücken:

$$\xi = \frac{64 S_2^3}{135 S_3^2 + 64 S_2^3}, \quad a = \frac{1}{135}(135 S_3^2 + 64 S_2^3),$$

$$c_r = -\frac{1 + \mu_r(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{4\mu_r \cos\frac{\pi}{24}},$$

und wo die μ_r die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^6 + 5\mu^4 + 5\mu^2 - 1 = 0$$

sind. Bemerkenswert hierbei ist die Methode der Bestimmung der Constanten c_r, zu der die Ermittelung der Grenzwerte der φ für $\xi = 0$ und $\xi = 1$ notwendig ist. Hr.

BELTRAMI e RAZZABONI. Sopra la memoria del prof. D. Besso intitolata: Alcune proposizioni sulle equazioni differenziali lineari. Rom., Acc. L. (3) VI. 12.

J. C. MALET. On a class of invariants. Phil. Trans. CLXXIII. 751-756.

Der Verfasser betrachtet zwei Klassen von Invarianten einer Differentialgleichung, nämlich $\frac{d^2y}{dx^2}+2P_1\frac{dy}{dx}+P_2y = 0$. Man hat erstens, entsprechend einem Wechsel der abhängigen Variabeln y, eine Invariante $P_2-P_1^2-\frac{dP_1}{dx}$, d. h., schreibt man $z(x)$ für y, so ist die in z transformirte Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2Q_1\frac{dz}{dx}+Q_2z = 0,$$

wo die Functionen Q_1 und Q_2 so beschaffen sind, dass identisch

$$Q_2-Q_1^2-\frac{dQ_1}{dx} = P_2-P_1^2-\frac{dP_1}{dx}.$$

Zweitens hat man entsprechend dem Wechsel der unabhängigen Variabeln eine Invariante $P_2^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{dP_2}{dx}+4P_1P_2\right)$, d. h., schreibt man $\varphi(t)$ für x, so ist die transformirte Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2Q_1\frac{dy}{dt}+Q_2y = 0.$$

Dann sind Q_1 und Q_2 solche Functionen, dass die identische Gleichung

$$Q_2^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{dQ_2}{dx}+4Q_1Q_2\right) = P_2^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{dP_2}{dx}+4P_1P_2\right)$$

gilt. Cly. (O.).

A. H. Curtis, R. Rawson. Solutions of a question (6780). Ed. Times XXXVI. 68-70.

Boole hat bewiesen, dass die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2Q\frac{du}{dx}+\left\{Q^2+\frac{dQ}{dx}\pm c^2-\frac{m(m+1)}{x^2}\right\}u=0$$

(Boole Diff. Equ. p. 459) in endlicher Form integrirt werden kann, wo Q ein Function von x ist. Hier wird das erweitert auf:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2Q\frac{du}{dx}+\left\{Q^2+\frac{dQ}{dx}+Ax^r+\frac{(m-r)(m+r+4)}{4(m+2)^2x^2}\right\}u=0,$$

wo A constant, $(2p+1)m=-4p$, p eine ganze Zahl ist.

O.

E. Pfannenstiel. Bidrag till de liniära differential-eqvationernas teori. Goteborg Handl. 1882. 1-50.

Diese Abhandlung ist hauptsächlich einer Untersuchung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\Sigma k_r x^r}{(x^2-a^2)^2}y$$

gewidmet, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass das Integral von der Form

$$y=Ae^{\varphi(x)}+Be^{-\varphi(x)}$$

ist. Besonders werden die Speciallfälle $\nu=2$ und $\nu=4$ behandelt. Der Verfasser referirt auch über die Methode, die Herr Holmgren angegeben hat, um die Differentialgleichung

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(b_0+b_1x)\frac{dy}{dx}+c_0y=0$$

zu integriren (siehe: Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar Band 5 und 7), und wendet diese Methode an, um die Gleichungen zu transformiren. Schliesslich fügt der Verfasser noch einiges hinzu über die Differentialgleichungen dritter Ordnung, die ein Integral von der Form

$$y=Ae^{\varphi(x)}+Be^{-\varphi(x)}+C\psi(x)$$

zulassen. Referent kann nicht umhin zu bemerken, dass ihm die

Methode des Verfassers wenig fruchtbar scheint, und dass die Darstellung keine leicht übersichtliche ist, wozu noch kommt, dass die typographische Ausstattung, was die Formeln betrifft, sehr schlecht ist. E.

R. RAWSON. Note on a transformation of Riccati's equation. Mess. (2) XII. 34-36

Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(ax^m + \frac{q(q+1)}{x^2}\right)z,$$

wo

$$m = \frac{\pm 2(2q+1)}{2p\pm 1} - 2.$$

Glr. (O.).

J. W. L. GLAISHER. On Riccati's equation and its transformation, and on some definite integrals which satisfy them. Phil. Trans. CLXXII. 759-828.

Die Arbeit bezieht sich hauptsächlich auf die verschiedenen Formen der particulären Integrale der Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} - a^2u = \frac{p(p+1)}{x^2}u,$$

und auf die Auswertung gewisser bestimmter Integrale, welche mit ihr in Verbindung stehen. Die betreffenden Formen sind:

$$(2)\qquad \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{2p}{x}\frac{dv}{dx} - a^2v = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dv}{dx} - a^2v = 0,$$

$$(4)\qquad \frac{d^2v}{dz^2} - a^2z^{2q-2}v = 0,$$

welche letztere als die Normalform der Riccati'schen Gleichung betrachtet werden kann. Die Gleichungen lassen eine Integration in endlicher Form zu, wenn p eine ganze Zahl, n eine ungrade ganze Zahl und φ der reciproke Wert einer ungraden ganzen

Zahl. Die Arbeit zerfällt in acht Teile. Im ersten Abschnitt werden sechs particuläre Integrale der Gleichung (1) hergeleitet und die Beziehungen zwischen ihnen geprüft. Wenn p keine ganze Zahl, so dehnt sich jedes derselben in's Unendliche aus, im anderen Fall sind zwei der Reihen begrenzt. Es giebt dann aber zwei particuläre Integrale, deren jedes eine endliche Zahl von Gliedern hat. Sie entstehen dadurch, dass die Zähler den Coefficienten Null als Factor enthalten. Wenn die Reihe fortgesetzt wird, treten Factoren Null in die Nenner, und die Reihe muss dann als wieder beginnend und in's Unendliche sich erstreckend betrachtet werden. Jedenfalls aber genügt der endliche Teil der Differentialgleichung. Es ist daher naturgemäss, sich mit der Betrachtung dieses Teiles zu begnügen.

Der zweite Teil enthält eine neue Form der Lösung in (1) für den Fall, dass p eine ganze Zahl ist. Ist $p=i$ eine positive ganze Zahl, so genügt der Gleichung der Coefficient von h^{i+1} in der Entwickelung von $e^{a\sqrt{x^2+xh}}$ nach steigenden Potenzen von h. Der dritte Teil enthält die sechs particulären Integrale von (3) und (4), die denen von (1) entsprechen. Der vierte Abschnitt bezieht sich auf die speciellen Fälle, in denen die Gleichungen eine Integration in endlicher Form zulassen. Wenn eine Differentialgleichung durch eine unendliche Reihe befriedigt wird, und wenn die Reihe für gewisse Werte einer in ihr enthaltenen Grösse endet, dann kann das Integral in verschiedener Form dargestellt werden, indem man die endliche Reihe am andern Ende anfängt, und die Glieder in umgekehrter Ordnung schreibt. Der fünfte Abschnitt enthält die Auswertung der bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x^m-a^2x^{-m}}dx,\quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^n}\,dx,$$

wo m eine reelle und n eine positive Grösse ist, und zwar wenn m von der Form $\frac{2i+1}{-4i}$ und n eine positive ganze Zahl ist. Die allgemeinen Formeln möchten wohl neu sein. Die Integrale genügen Differentialgleichungen der Form (4) und (1), so dass ihre Werte mit

den in Abschnitt (1) und (3) erhaltenen Lösungen dieser Gleichung in Verbindung stehen müssen. Der sechste und längste Abschnitt der Abhandlung bezieht sich auf die zahlreichen symbolischen Lösungen der Gleichung (1) und ihrer Transformationen (3) und (4) in den Fällen, in denen sie in endlicher Form integrabel sind. Eine grosse Zahl der von Ellis, Boole, Lesbesgue, Hargreave, Williamson, Donkin, Gaskin u.A. gegebenen symbolischen Lösungen wird erwähnt und mit einander verglichen. Der siebente Abschnitt betrifft den Zusammenhang der hier gegebenen Resultate mit den Formeln der Bessel'schen Functionen, indem die Bessel'sche Gleichung

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dw}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)w=0$$

sich durch einfache Substitutionen aus (1) ableiten lässt.

Der Schlussteil enthält eine Liste von Schriften, deren Inhalt mit der Arbeit in Zusammenhang steht.

Cly. (O.).

A. E. Steinthal. On the solution of the equation

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+n(n+1)u=0.$$

Quart. J. XVIII. 330-346.

Die Lösung der bekannten Gleichung für die Legendre'schen Functionen geschieht hier durch bestimmte Integrale. Wählt man die Substitution

$$u=\int e^{xti}\frac{z}{\sqrt{t}}\,dt,$$

so geht bei gewissen Grenzen für dieses Integral die in der Ueberschrift stehende Gleichung in die der Bessel'schen Functionen

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dz}{dt}+\left\{1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{t^2}\right\}z=0$$

über, für welche Hankel in Clebsch Ann. I. p. 467ff. eine Reihe von Lösungen in Form von bestimmten Integralen gegeben hat. Mit Benutzung derselben erhält man für u bestimmte Doppel-

integrale, die sich sofort auf bestimmte einfache Integrale zurückführen lassen. Dieselben haben die Formen

$$u = C\int \frac{(\xi^2-1)^n}{(x-\xi)^{n+1}}\,d\xi \quad \text{und} \quad u = c\int \frac{(x-\xi)^n}{(1-\xi^2)^{n+1}}\,d\xi,$$

die teils über geschlossene, die singulären Punkte ± 1, x, ∞ umkreisende Linien, teils zwischen den Grenzen ± 1, $\pm\infty$, $\pm\infty i$ genommen werden. Die mannichfaltigen Lösungen werden für beliebige n discutirt, für den Fall eines ganzzahligen n ihr Zusammenhang mit den bekannten Functionen $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ dargetan und die Eigenschaften dieser aus der Form des bestimmten Integrals abgeleitet. Wir bemerken übrigens, dass Herr Schläfli in seiner Schrift „Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunctionen mit beliebigem Parameter etc." Bern. 1881, diese Functionen durch dieselben beiden Integralformen dargestellt hat. (Vgl. F. d. M. XIII. 1881. 395). Hr.

Ad. Steen. Integration af en lineär Differentialligning af anden Orden. Kjob. Skrift. (6) I. 333-345.

Die Integrale der beiden Differentialgleichungen

$$y'' - (a\cot x - b\,\mathrm{tg}\,x)y' + cy = 0,$$
$$v'' + (a\cot x - b\,\mathrm{tg}\,x)v' + cv = 0$$

stehen nach den vom Verfasser in Darb. Bull. 1881. p. 30-36 gegebenen Entwickelungen zu einander in einer solchen Beziehung, dass

$$y = v'\sin^a x\cos^b x,$$
$$v = y'\sin^{-a} x\ \cos^{-b} x.$$

Gewisse Specialfälle der erwähnten Gleichungen sind leicht integrabel, andere lassen sich durch bestimmte Integrale integriren. Namentlich wird gezeigt, dass die Gleichung

$$y'' - (a\cot x - b\,\mathrm{tg}\,x)y' - 2p(a+b-2p)y = 0$$

für $p > 1$ und $b > 2p-1$ das folgende Integral hat:

$$y = \int_{-1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^p\,(1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}\,(1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)}\,d\alpha,$$

dagegen für $p>1$ und $a>2p-1$:

$$y=\int_{+1}^{\cos 2x}(\cos 2x-\alpha)^p(1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}(1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)}\,d\alpha.$$

Wenn also nicht nur $p>1$ (p übrigens ganz willkürlich), sondern auch sowohl $b>2p-1$ als $a>2p-1$, so erhält man auf diese Weise das vollständige Integral der ersten Gleichung. Für die andern gelten ganz ähnliche Formen. Gm.

E. Mathieu. Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ de Gauss. Résal J. (3) VIII. 357-383.

Es werden die Fälle untersucht, in welchen sich die allgemeine Lösung der Gauss'schen Differentialgleichung in endlicher Form darstellen lässt, ohne indess auf vorgängige Arbeiten auf diesem Gebiete, von denen wir nur die bekannte Abhandlung des Herrn Schwarz in Borchardt's J. LXXV. erwähnen, irgend Bezug zu nehmen. Der Gegenstand ist insofern nicht erschöpfend behandelt, als nur die Fälle in Betracht gezogen sind, in denen ein particuläres Integral P so beschaffen ist, dass ihre logarithmische Ableitung eine rationale Function ist. In einigen dieser Fälle sind zwei solche particulären Integrale vorhanden, die sich unmittelbar aus dem Kummer'schen Tableau von 24 Integralen entnehmen lassen. In den übrigen Fällen, wo nur ein solches P existirt, folgt aus demselben nach einer bekannten Regel ein zweites particuläres Integral in der Form

$$P\int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{1}{P^2}\,dx.$$

Vermöge der Reductionsformel

$$\frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1}}{F(-n,\beta,\gamma,x)^2}$$
$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{-\gamma+1}(1-x)^{\gamma+n-\beta}\chi(x)}{F(-n,\beta,\gamma,x)}\right]+Bx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1},$$

wo $\chi(x)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ und B eine Constante bedeutet, lässt sich obiges Integral, in dem $P=F(-n,\beta,\gamma,x)$

zu setzen ist, durch Abzug eines endlichen Ausdrucks auf das Integral eines binomischen Differentials reduciren, welches unter gewissen Voraussetzungen betreffs β und γ durch Logarithmen und Kreisfunctionen in endlicher Form dargestellt werden kann. Den Schluss bildet die Untersuchung, in welchen Fällen die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$ in Beziehung auf φ die Periode 2π hat.

Hr.

E. Goursat. Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. C. R. XCV. 717-719.

Der Verfasser betrachtet die von Herr Appell eingeführte der hypergeometrischen Reihe analog gebildete Function zweier Veränderlicher (C. R. XC. 296, 731, 977, vgl. F. d. M. XII. 1880. p. 296):

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \Sigma \frac{(\alpha, m+n)\ (\beta, m)\ (\beta', n)}{\gamma, (m+n)\ (1, m)\ (1, n)} x^m y^n,$$

wo

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1),\ (\lambda, 0) = 1,$$

und bemerkt, dass die zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen, denen sie genügt, im Allgemeinen 60 gemeinsame Integrale haben von der Form:

$$x^l(1-x)^m y^{l'}(1-y)^{m'}(x-y)^n F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

worin λ, μ, μ', ν mit $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ in einfacher Beziehung stehen und t, t' rationale Functionen des ersten Grades von x und y sind.

Der Beweis ist demjenigen von Jacobi für die hypergeometrischen Reihen einer Veränderlichen in Crelle's J. LVI. gegebenen nachgebildet und nimmt das von Herrn Picard als Lösung für die partiellen Differentialgleichungen aufgestellte Integral

$$\int_g^h u^{\beta+\beta'-\gamma}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}(u-x)^{-\beta}(u-y)^{-\beta'} du$$

(C. R. XC. 1119. Ann. de l'Éc. N. (2) X. vgl. F. d. M. XII. 1880. p. 328) zum Ausgangspunkt, worin g und h zwei der fünf Grössen $0, 1, x, y, \infty$ bezeichnen. Jedes dieser zehn Integrale wird auf

sechs verschiedene Arten mittelst hypergeometrischer Reihen mit zwei Veränderlichen ausgedrückt. Auf diese Weise ergeben sich die gedachten 60 gemeinsamen Lösungen. Hr.

G. Darboux. Sur une équation linéaire. C. R. XCIV. 1645-1648.

Der Verfasser betrachtet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Big[\frac{\mu(\mu+1)}{sn^2x} + \frac{\mu'(\mu'+1)dn^2x}{cn^2x} + \frac{\mu''(\mu''+1)k^2cn^2x}{dn^2x} + n(n+1)k^2sn^2x+h\Big]y,$$

welche die Lamé'sche Gleichung als speciellen Fall enthält. Wenn μ, μ', μ'', n ganzzahlig sind, dann ist das allgemeine Integral der Gleichung überall eindeutig und kann daher nach dem Picard'schen Theorem durch doppelt-periodische Functionen der zweiten Art dargestellt werden. Um das Integral zu erhalten, wird zunächst die Gleichung durch die Substitution

$$y = z\,sn^{-\mu}x\,cn^{-\mu'}x\,dn^{-\mu''}x = z\cdot H$$

in die Gleichung für z

$$z''+\frac{2H'}{H}z' = z\Big[(n-\theta+1)\;(n+\theta)\;k^2sn^2x+h_1\Big]$$

transformirt, wo $\theta=\mu+\mu'+\mu''$, und h_1 eine von h verschiedene Constante bezeichnet, und nach der von Herrn Hermite in Brioschi's Ann. (2) IX. 21. (s. F. d. M. X. 1878. p. 235) gegebenen Methode die Gleichung dritter Ordnung betrachtet, der das Product u zweier Integrale genügt. Diese Gleichung muss als particuläre Lösung eine ganze rationale Function von sn^2x zulassen. Ist dieselbe bestimmt, so vollzieht sich die in Rede stehende Integration ohne Schwierigkeit. Hr.

F. Brioschi. Sur une application du théorème d'Abel. C. R. XCIV. 686-691.

In einer früheren Note (C. R. XCII. 325. s. F. d. M. XIII. 1881 p. 257) hatte der Verfasser gezeigt, wie man das Abel'sche Theorem

zur Lösung der Lamé'schen Gleichung in ihrer ganzen Allgemeinheit benutzen kann. In dieser Note werden für den Fall, dass der Parameter n ungrade ist, aus den dort gegebenen Formeln einige Consequenzen gezogen, die für $n = 3$ zu den von Herrn Hermite in den C. R. (s. Bericht in diesem Bande) veröffentlichten Resultaten führen. Bemerkenswert ist, dass mittelst der im allgemeinen Falle zwischen $sn^2\omega$ und h bestehenden Relation ein hyperelliptisches Integral der $(n-1)^{\text{ten}}$ Klasse auf ein elliptisches Integral erster Gattung zurückgeführt wird. Hr.

P. J. Hollman. Eenige toepassingen van de theorie der singuliere integralen bij differentiaal-vergelijkingen van de tweede orde. Nieuw Arch. VIII. 23-56.

Die Arbeit erstreckt sich auf einige Anwendungen der Theorie der singulären Integrale bei Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Eine Uebersicht dieser Theorie geht voraus. Dabei wird gezeigt, wie die singulären Integrale gefunden werden können, sowohl ans der Gleichung selbst, als aus dem allgemeinen Integral.

Als Anwendungen werden folgende Aufgaben behandelt. 1. Eine ebene Curve zu bestimmen, bei der der Inhalt der rechtwinkligen Dreiecke, welche durch die Coordinaten der Mittelpunkte der Krümmungskreise bestimmt sind, gleich einer gegebenen Constanten ist. 2. Eine Curve von der Eigenschaft zu bestimmen, dass, wenn man aus den Mittelpunkten einiger Krümmungskreise Gerade nach zwei festen Punkten zieht, die Summe der Quadrate dieser Linien constant sei. 3. Eine ebene Curve zu bestimmen, deren Krümmungskreise so liegen, dass das Rechteck, welches durch die Coordinaten des Mittelpunktes eines Krümmungskreises bestimmt wird, gleich sei dem Quadrate des Radius dieses Kreises. 4. Eine Art von Curven zu bestimmen, bei denen die Länge der Krümmungskreise und die Lage der Mittelpunkte der Krümmungskreise in bestimmter Weise von einander abhängen. Weiter wird untersucht und durch Beispiele erläutert, auf welche Weise die Theorie der singulären Integrale zusammen-

hängt mit der Abwickelung der Curven, und schliesslich auch die umgekehrte Aufgabe gelöst, wie man nämlich eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung aufstellen kann, welche eine gegebene Gleichung zum singulären Integral hat. G.

S. Spitzer. Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Zweite Fortsetzung. Wien. Gerold's Sohn.

Diese Fortsetzung beginnt mit dem 11ten Abschnitt, in welchem zunächst die Gleichung

$$y''' = xy' + ny$$

betrachtet wird. Dieselbe lässt sich stets nach der Laplace'schen Methode durch ein bestimmtes Integral lösen. Für ein positives ganzzahliges n ist der integrirende Factor eine ganze Function von x. Mit Hülfe desselben erhält man durch Integration Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die für $n = 1, 2, \dots, 5$ aufgestellt werden und offenbar mit der obigen integrirbar sind. Auf gleiche Weise wird mit der allgemeineren Gleichung

$$y''' = x^{m} (xy' + ny)$$

vorgegangen. Im 12ten Abschnitt wird gezeigt, dass die Gleichung

$$(a_3 + b_3 x)y''' + (a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x)y' + (a_0 + b_0 x)y = 0$$

unter einer gewissen Bedingung, die die Coefficienten a, b erfüllen müssen, einen integrirenden Factor von der Form $(n+x)e^{\lambda x}$ zulasse. Die Integration ergiebt wiederum Differentialgleichungen 2ter Ordnung, deren Integration mit der der ursprünglichen gegeben ist. Der 13te (letzte) Abschnitt enthält verschiedene Bemerkungen, die in keinem Zusammenhang mit einander stehen: Die Zurückführung der Integration von Differentialgleichungen der Form

$$xy^{(n)} - \lambda(m+n-1)y^{(n-1)} = x^{m} y$$

auf die der Gleichung $y^{(n)} = x^{m-1}y$; die Angabe der Bedingung dafür, dass eine Differentialgleichung 3ter Ordnung mit ihrer Multiplicatorgleichung identisch ist, endlich die Construction der

Differentialgleichung 2[ter] Ordnung, deren Integrale die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung in y, resp. $y^{(n)}$ sind.

Hr.

G. v. Escherich. Ueber die Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen.

Wien. Denkschr. XLVI. 61-82.

Sind

$$F=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0;\quad f=b_0y^{(m)}+b_1y^{(m-1)}+\cdots+b_my=0$$

zwei homogene Differentialgleichungen n^{ter} und m^{ter} Ordnung zwischen x und y, so erhält man unmittelbar in dem Verschwinden der Determinante R des nach $y, y', \dots, y^{(m+n-1)}$ linearen Systems von $m+n$ Gleichungen

$$F=0,\ F'=0,\dots,\ F^{(m-1)}=0;\ f=0,\ f'=0,\dots,f^{(n-1)}=0$$

die notwendige Bedingung, dass die beiden gegebenen Differentialgleichungen ein particuläres Integral gemeinsam haben. Dass diese Bedingung auch hinreichend ist, wird aus der Umformung von R in

$$R=a_0^m e^{\int\frac{a_1}{a_0}dx}\Sigma\pm f(y_1)f'(y_2)\dots f^{(n-1)}(y_n)$$

erkannt, wo $y_1,\dots,y_n$ ein Fundamentalsystem particulärer Integrale von $F=0$ darstellen. Aus dem Verschwinden der Functionaldeterminante folgt nämlich, dass die f von einander linear abhängig sind, also die Gleichung besteht:

$$0=c_1f(y_1)+c_2f(y_2)+\cdots+c_nf(y_n)=f(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n).$$

Das Integral $y=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ der Gleichung $F=0$ genügt demnach auch der Gleichung $f=0$. Die Bedingung für das Vorhandensein von k, und nur k gemeinsamen Integralen wird gegeben durch das simultane Verschwinden der Grössen:

$$\frac{\partial^\mu R}{[\partial a_n^{(m-\mu)}]^i\,[\partial a_{n-1}^{(m-\mu)}]^{\mu-i}}\qquad \begin{matrix} i=0,\ 1,\dots,\mu\\ \mu=0,\ 1,\dots,k-1\end{matrix}$$

mit R, ohne dass eine dieser Grössen für $\mu=k$ verschwindet. (Die oberen eingeklammerten Indices bedeuten Differentiationsindices). Die Gleichung der gemeinsamen Integrale lautet dann

in symbolischer Bezeichnung

$$\left[\frac{\partial R}{\partial a_n^{(m-k)}} z - \frac{\partial R}{\partial a_{n-1}^{(m-k)}}\right]^k = 0.$$

Es wird noch bemerkt, dass im Falle der Differentialgleichung mit constanten Coefficienten R in die Resultante der zugehörigen algebraischen Gleichungen übergeht, die Kriterien für die Anzahl der gemeinsamen particulären Integrale ferner in die über die Anzahl der gemeinsamen Wurzeln der algebraischen Gleichungen. Unter den Anwendungen, die an die vorhergehenden Entwickelungen geknüpft werden, erscheint uns der Hinweis bemerkenswert, dass man die Frage, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung eine ganze rationale Function n^{ten} Grades als Integral besitzt, auf die andere zurückführen kann, ob es eine ganze positive Zahl p giebt, für welche die gegebene Gleichung mit der Gleichung $y^{(p+1)} = 0$ ein gemeinsames Integral hat. Als Beispiele hierfür werden die Differentialgleichungen der Kugelfunctionen $P^{(n)}(x)$ und der hypergeometrischen Reihe behandelt. Zum Schluss wird die Frage nach der Gemeinsamkeit eines Integrals bei zwei vollständigen linearen Differentialgleichungen auf den Fall zweier homogener linearer Differentialgleichungen zurückgeführt. Hr.

H. Poincaré. Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires. C. R. XCIV. 1402-1405.

Sind zwei lineare Differentialgleichungen

$$y^{(m)} + P_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = 0,$$
$$y^{(m)} + P'_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + P'_1 y' + P'_0 y = 0$$

gegeben, worin die Coefficienten P und P' rationale Functionen der Variablen x und z sind, während diese durch eine algebraische Relation $f(x, z) = 0$ verbunden sind, so nennt der Verfasser die beiden Gleichungen zu derselben Familie gehörig, wenn das allgemeine Integral der zweiten in der Form

$$\varDelta(Q_{m-1} y^{(m-1)} + Q_{m-2} y^{(m-2)} + \cdots + Q_1 y' + Q_0 y)$$

dargestellt werden kann, wo die Q rationale Functionen von x und z sind, $\varDelta$ eine beliebige Function dieser Variablen und y das allgemeine Integral der ersten Gleichung bezeichnet. In der

Voraussetzung, dass die Functionen P und P' von bestimmten Graden sind, giebt es gewisse Functionen ihrer Coefficienten, die für alle Gleichungen derselben Familie den nämlichen Wert haben. Diese werden „Invarianten der Familie“ genannt. Wie man dieselben bestimmen kann, wird an dem einfachen Beispiele der Gleichung $y'''+\theta y = 0$, wo θ eine rationale Function von x bezeichnet, andeutungsweise gezeigt. Hr.

H. Lemonnier. Conditions pour que deux équations différentielles linéaires sans second membre aient p solutions communes. Équation qui donne ces solution. C. R. XCV. 476-479.

Sind $F=0$, $f=0$ zwei rationale homogene Differentialgleichungen resp. m^{ter} und n^{ter} Ordnung für y als Function von x, die p verschiedene gemeinsame Lösungen haben sollen, so betrachte man das System von $m+n-2p+2$ Gleichungen

(1) $f=0,\ f'=0, \dots, f^{(m-p)}=0,\ F=0,\ F'=0, \dots, F^{(n-p)}=0.$

Die Elimination der $m+n-2p+1$ Grössen $y^{(p)}, y^{(p+1)}, \dots, y^{(m+n-p)}$ führt zu einer linearen Gleichung zwischen $y, y', \dots, y^{(p-1)}$, die als eine lineare Differentialgleichung $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für p verschiedene Werte von y nur dann bestehen kann, wenn die Coefficienten von y, y', ..., $y^{(p-1)}$ einzeln verschwinden, was die gesuchten p Bedingungsgleichungen ergiebt. Das System von $m+n-2p$ Gleichungen, das aus (1) hervorgeht, wenn man $f^{(m-p)}=0$ und $F^{(n-p)}=0$ weglässt, wird nach den Grössen $y^{(p)}, \dots, y^{(m+n-p-1)}$ aufgelöst werden können, falls nicht die Determinante $\varDelta$ der Coefficienten dieser Grössen gleich Null ist. Man erhält so in dem Ausdrucke von $y^{(p)}$ als lineare homogene Function von $y, y', \dots, y^{(p-1)}$ die Differentialgleichung p^{ter} Ordnung, der die p gemeinsamen Lösungen genügen. Die obigen p Bedingungsgleichungen, vereint mit der Ungleichung $\varDelta \gtrless 0$, stellen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass p und nur p gemeinsame Lösungen existiren. Das hier eingeschlagene Verfahren hat vor demjenigen des Herrn von Escherich (siehe das Referat

p. 281) offenbar den Vorzug, dass für $p > 1$ mit einem System von weniger Gleichungen ($m+n-2p+2$ statt $m+n$) operirt wird.

Hr.

H. Poincaré. Sur les points singuliers des équations différentielles. C. R. XCIV. 416-418.

In den simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

seien X, Y, Z ganze Polynome in x, y, z. Die Raumcurven, die durch diese Gleichungen definirt werden, nennt der Verfasser Charakteristiken. Im Allgemeinen geht durch jeden Punkt des Raumes eine und nur eine Charakteristik. Eine Ausnahme bilden die gemeinschaftlichen Punkte der drei Flächen

$$(1) \qquad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Das Verhalten der Charakteristiken hinsichtlich des Durchganges durch diese singulären Punkte hängt von der Beschaffenheit der Wurzeln der folgenden Gleichung in S ab:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - S & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} - S & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} - S. \end{vmatrix} = 0.$$

Die singulären Punkte werden nach der Realität und dem Vorzeichen der Wurzeln in vier Arten unterschieden. In dem besondern Falle, dass die drei Flächen (1) eine Curve gemeinschaftlich haben, werden die Punkte dieser singulären Curve ebenfalls nach der Beschaffenheit der Wurzeln der ihnen zugehörigen Gleichung in S in drei Arten gesondert. Die Bogen der singulären Linie, welche Punkte derselben Art enthält, sind von den benachbarten Bogen durch Punkte getrennt, die Singularitäten höherer Ordnung besitzen.

Hr.

H. Poincaré. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. C. R. XCIV. 577-579.

Es handelt sich um die Möglichkeit, jedes System simultaner algebraischer Differentialgleichungen durch Reihen zu integriren, die für alle reellen Werte der Variabeln convergiren. Man kann ein solches System auf die Form bringen:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n},$$

wo $X_1, \dots, X_n$ ganze Polynome in $x_1, \dots, x_n$ sind. Führt man eine Hülfsvariable s ein, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{dx_k}{X_k} = \frac{ds}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$$

definirt ist, so lässt sich, wie der Verfasser ohne Beweis mitteilt, stets eine Zahl α der Art finden, dass $x_1, \dots, x_n$ in Reihen geordnet nach Potenzen von $(e^{\alpha s} - 1):(e^{\alpha s} + 1)$ dargestellt werden können, die für alle reellen Werte von s convergiren. Die Coefficienten sind rationale Functionen der Zahl α, der Coefficienten der Polynome X und der Anfangswerte der Variablen, so dass für reelle s auch die Werte für die x reell werden. Eine besondere Wichtigkeit hat der Satz in den Anwendungen auf die Gleichungen der Mechanik, da hiernach die Reihen für die Variabeln des Systems für alle reellen Werte der Zeit convergiren würden. Hr.

J. J. Sylvester. On a certain integrable class of differential and finite difference equations. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Mitteilung des Verfassers über eine particuläre Lösung einer gewissen Klasse von Differenzen- und Differentialgleichungen, worüber in dem vorigen Bande dieses Jahrbuches p. 287 berichtet ist. Hr.

J. J. Sylvester. Note on the theory of simultaneous linear differential or difference equations with constant coefficients. Sylv., Am. J. IV. 321-327.

Es stelle das System

$$(\varphi_1\delta_t)u_1+(\varphi_2\delta_t)u_2+\dots+(\varphi_n\delta_t)u_n=0,$$
$$(\psi_1\delta_t)u_1+(\psi_2\delta_t)u_2+\dots+(\psi_n\delta_t)u_n=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(\omega_1\delta_t)u_1+(\omega_2\delta_t)u_2+\dots+(\omega_n\delta_t)u_n=0$$

in symbolischer Gestalt ein System von n linearen Differentialgleichungen oder Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten für $u_1,\dots,u_n$ als Functionen von t dar, worin jedes der $\varphi, \psi,\dots,\omega$ eine ganze rationale Function von δ_t bezeichnet, und $\delta_t^k u$ im ersten Falle durch den Differentialquotienten $\frac{d^k u}{dt^k}$, im 2ten durch den Wert $(u)_{t+k}$ zu ersetzen ist. Dann lautet die algebraische Gleichung, von der die Integration des Systems abhängt:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(h), \varphi_2(h), \dots, \varphi_n(h) \\ \psi_1(h), \psi_2(h), \dots, \psi_n(h) \\ \dots\dots\dots \\ \omega_1(h), \omega_2(h), \dots, \omega_n(h) \end{vmatrix} = 0.$$

Sind $h_1, h_2,\dots,h_\sigma$ ihre Wurzeln, dann sind die u lineare Functionen von $e^{h_1 t},\dots,e^{h_\sigma t}$, resp. von $h_1^t,\dots,h_\sigma^t$. Hiervon wird Anwendung gemacht auf das Problem der iterativen Substitutionen. Um die Coefficienten der i^{ten} Potenz der Substitution

$$\begin{vmatrix} a, & \alpha \\ b, & \beta \end{vmatrix}$$

zu finden, hat man die Differentialgleichungen

$$u_i = au_{i-1}+\alpha v_{i-1},$$
$$v_i = bu_{i-1}+\beta v_{i-1}$$

aufzulösen. u_i, v_i fallen, wenn $u_0=1$, $v_0=0$, mit a_i, b_i, wenn $u_0=0$, $v_0=1$, mit α_i, β_i zusammen, wo

$$\begin{vmatrix} a_i & \alpha_i \\ b_i & \beta_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}^i.$$

Die zugehörige algebraische Gleichung lautet hier:

$$\begin{vmatrix} -\varrho+a, & \alpha \\ b\ , & -\varrho+\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Sind die Wurzeln reell, so nähert sich

$$\varphi^i(x) = \frac{a_i x+\alpha_i}{b_i x+\beta}$$

für $i = \infty$ einer festen Grenze. Sind sie imaginär und so, dass $\varrho_1^i = \varrho_2^i$, was erfordert, dass $(\alpha+\beta)^2 = 4(\alpha\beta - ab) \cos\left(\frac{\lambda\pi}{i}\right)^2$ für einen ganzzahligen Wert von λ ist, dann ist $\varphi^i(x) = x$. In ähnlicher Weise lassen sich die analogen Fragen bei Substitutionen höherer Ordnung behandeln, was aber nicht näher ausgeführt wird. Hr.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

B. Riemann. Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen, herausgegeben von Karl Hattendorf. 3te Aufl. Braunschweig. Vieweg u. Sohn.

Diese neue Auflage ist ein einfacher, im Einzelnen durchgesehener Abdruck der zweiten Auflage des bekannten Werkes. T.

S. Lie. Untersuchungen über Differentialgleichungen. I. Christiania Forh. 1882. No. 21, 1-12.

Diese Note zerfällt in mehrere Teile. Zuerst werden alle Flächen bestimmt, deren Haupttangentencurven (des einen Systems oder beider Systeme) linearen Liniencomplexen angehören. Dieses interessante Problem deckt sich im Uebrigen mit der Bestimmung aller Flächen mit sphärischen Krümmungslinien. Es wird dann versucht nachzuweisen, dass alle Flächen, die aus einer vorgelegten Fläche constanter Krümmung durch successive Anwendung von Bianchi's Operation hervorgehen, dieselben unendlich entfernten Punkte besitzen. Da indess zwei unendlich entfernte Punkte eine unbestimmte Distanz (und also nicht wie in der

Note angenommen eine unendliche Distanz) haben, so ist der Nachweis nicht definitiv, wenngleich der betreffende Satz wahrscheinlicherweise richtig ist. Die von Schur gegebene Abbildung des linearen Complexes im Punktraum, bei der eine Fläche zweiten Grades als Fundamentalgebilde auftritt, giebt eine Berührungstransformation, bei der Haupttangentencurven in nichteuklidische Krümmungslinien übergehen. Der Schluss der Note beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten. L.

S. Lie. Untersuchungen über Differentialgleichungen. II. Christiania Forh. No. 22.

Die lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z}+(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)\frac{\partial f}{dx_2}$$
$$+(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)\frac{\partial f}{dx_3}$$

gestattet, wenn die a_k, b_k, c_k beliebige Functionen von z bezeichnen, eine bemerkenswerte geometrische Interpretation. Betrachtet man nämlich x_1, x_2, x_3 als homogene Punktcoordinaten eines Punktes in einer Ebene, welche einfach unendlich viele (parallele) Lagen $z=$ const. annimmt, so schneidet jede Integralfläche

$$\Omega\left(\frac{x_1}{x_3},\ \frac{x_2}{x_3},\ z\right)=0$$

die Ebenen $z=$ const. nach projectivischen Curven. Kennt man daher eine einzige Integralfläche, so findet man im Allgemeinen das vollständige Integral durch Differentiation. Dies gelingt immer, wenn die besprochenen Schnittcurven keine infinitesimale und lineare Transformation in sich gestatten. Tritt dieser Ausnahmefall ein, so ist eine Quadratur erforderlich und hinreichend, wenn die Schnittcurven keine Kegelschnitte sind. In diesem speciellen Falle ist die Integration einer Riccati'schen Gleichung 1ter Ordnung erforderlich.

Eine verwandte ebenfalls fruchtbare Interpretation erhält man, indem man x_1, x_2, x_3 als homogene Punktcoordinaten einer Ebene, z als die Zeit auffasst. Diese Interpretation, die sich auf

n Dimensionen erweitern lassen, spielen eine fundamentale Rolle in den Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe von Transformationen gestatten. L.

J. PETERSEN. Partielle Differentialligninger. Zeuthen T. (4) VI. 3-4.

Bemerkung über die Darstellung der Lösung der partiellen Differentialgleichung $Pp+Qq = R$. Gm.

L. KÖNIGSBERGER. Ueber eine Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen. Klein Ann. XX. 587-594.

Analog der fundamentalen Frage der Algebra nach den Bedingungen, unter welchen sämmtliche Wurzeln einer Gleichung einer zweiten Gleichung genügen, vorausgesetzt, dass es eine Wurzel tut, handelt es sich im vorliegenden Aufsatze darum, festzustellen, wann sämmtliche particuläre Integrale einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit einer abhängigen und zwei unabhängigen Variablen

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

(unter f eine rationale Function der Argumente verstanden) einer zweiten ebensolchen

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

genügen, falls diese beiden Gleichungen überhaupt ein particuläres Integral gemein haben. Das Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Teilers ergiebt als hinreichende Bedingungen hierfür: 1) f muss in Bezug auf die Differentialquotienten nach der einen Variablen in algebraischem Sinne irreductibel, und 2) das als gemeinsam vorausgesetzte Integral so beschaffen sein, dass es nicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1ter Ordnung nach der anderen unabhängigen Variablen genügt, in welcher die erste unabhängige Variable algebraisch enthalten ist. Dies Resultat ist weiterer Ausdehnungen fähig. Hat man an

Stelle der zweiten Gleichung $F = 0$ eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, so tritt in der zweiten der obigen Bedingungen an Stelle der gewöhnlichen Differentialgleichung 1ter Ordnung eine solche m^{ter} Ordnung. Noch allgemeiner: Liegen zwei partielle Differentialgleichungen μ^{ter}, resp. ν^{ter} Ordnung vor, und haben dieselben ein Integral gemein, enthält ferner für $\nu \geqq \mu$ die erste derselben den Differentialquotienten μ^{ter} Ordnung nach der einen Variablen in der Weise, dass sie in Bezug auf diesen in algebraischem Sinne irreductibel ist, während das gemeinsame Integral der Bedingung unterliegt, nicht einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung zu genügen, in welcher die partiellen Differentialquotienten, nach jener einen Variablen genommen, die μ^{te} Ordnung nicht erreichen, so wird die Gleichung μ^{ter} Ordnung alle Integrale mit der Gleichung ν^{ter} Ordnung gemein haben.

Dieselbe Bedingung ist auch dafür hinreichend, dass, falls zwischen einem Integrale z_1 einer partiellen Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung und einem Integrale z_2 einer solchen ν^{ter} Ordnung ($\nu \geqq \mu$) eine algebraische Beziehung besteht, (in welche auch die unabhängigen Variablen und die partiellen Ableitungen von z_1 und z_2 nach denselben eintreten dürfen), jene algebraische Relation auch erhalten bleibt, wenn man für z_1 ein willkürliches Integral der Gleichung μ^{ter} Ordnung setzt, vorausgesetzt, dass für z_2 ein passendes Integral der Gleichung ν^{ter} Ordnung substituirt werde.

T.

E. Picard. Sur l'intégration, par les fonctions abéliennes, de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. XCIV. 1036-1038.

Briot und Bouquet haben den Fall untersucht, wo die Differentialgleichung $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ doppelt-periodische Functionen zu Integralen hat. Analog kann man sich die Aufgabe stellen, unter f eine ganze Function der Argumente verstanden, die partielle Differentialgleichung $f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ unter der Bedingung zu behandeln, dass sie Abel'sche Functionen der beiden Variabeln

x und y als Integrale besitze. Die vorliegende Note liefert einen Beitrag zur Lösung dieses schwierigen Problems, indem gezeigt wird, wie man unter der gemachten Voraussetzung aus der gegebenen partiellen Differentialgleichung ein System von zwei totalen Differentialgleichungen herleiten kann, welche die gesuchten Lösungen liefern. T.

E. Picard. Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes. C. R. XCV. 594-597.

Die vorliegende Note giebt Andeutungen über Verallgemeinerungen der wichtigen Untersuchungen des Herrn Poincaré über gewisse eindeutige Functionen (C. R. 1881 und Klein Ann. XIX. 553 ff., cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 247 ff.) auf den Fall zweier Variabeln. Poincaré hat gezeigt, dass jede Fuchs'sche Function durch Umkehrung des Quotienten zweier Integrale von gewissen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten erhalten werden kann. Geht man in analoger Weise von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln x und y aus, und besitzen dieselben drei gemeinschaftliche linear unabhängige Lösungen ω_1, ω_2, ω_3, so führt der Fall, wo die Gleichungen $\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$, $\frac{\omega_3}{\omega_1} = v$ für x und y eindeutige Functionen von u und v liefern, auf Functionen zweier Variabeln, die den Fuchs'schen Functionen entsprechen. Dies wird an einem Beispiel erläutert. Nachdem auf diese Weise die Existenz von eindeutigen Functionen von zwei Variabeln nachgewiesen ist, welche für eine Gruppe von linearen Substitutionen ungeändert bleiben, kann man umgekehrt und dem Gange der Poincaré'schen Arbeiten entsprechend von der Untersuchung jener linearen Substitutionen ausgehen. Hier stellt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Falle einer und dem zweier Variabeln heraus; während zu jeder „discontinuirlichen“ Gruppe im Falle einer Veränderlichen eine Fuchs'sche Function gehört, giebt es in dem Falle zweier Variabeln nicht immer eindeutige Functionen,

welche durch die Substitutionen der Gruppe ungeändert gelassen werden. Indem sich der Verfasser vorbehält, auf diesen Punkt noch zurückzukommen, beschränkt er sich in der vorliegenden Note auf die Betrachtung einer speciellen Gruppe (cf. C. R. März 1882., s. diesen Bd. Abschn. VII. Cap. 1), die auf derartige Functionen führt; zwischen dreien dieser Functionen besteht eine algebraische Relation, und es lässt sich zeigen, dass es stets zwei lineare partielle Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten giebt, welche drei gemeinsame Integrale besitzen und durch Umkehrung der Quotienten dieser Integrale irgend zwei jener Functionen liefern. T.

M. Hamburger. Zur Theorie der Integration eines Systems von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. Kronecker J. XCIII. 188-215.

In einem früheren Aufsatze (Borchardt J. LXXXI. p. 243 ff.; cf. F. d. M. VIII. 1876 p. 203 ff.) hat der Herr Verfasser die Integration eines Systems von n linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen und im Anschluss daran die Integration einer speciellen Klasse nicht linearer partieller Differentialgleichungen unter gewissen Bedingungen auf die von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückgeführt. In der vorliegenden Arbeit hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, auch die Integration eines allgemeinen Systems von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit den unabhängigen Variabeln x, y und den n abhängigen $z_1, \dots, z_n$

$$(1) \qquad f_i(x, y, z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = 0$$

$$\left(i = 1, \dots, n, \quad p_k = \frac{\partial z_k}{\partial x}, \quad q_k = \frac{\partial z_k}{\partial y}\right)$$

zurückzuführen auf die Integration von unvollständigen Systemen totaler Differentialgleichungen. Da dies Problem darauf hinauskommt, folgendes System von $3n$ linearen partiellen Differentialgleichungen zwischen den Veränderlichen x, y und den als Func-

tionen derselben zu betrachtenden Variabeln $z_1, \ldots, z_n$, $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial y}\right) = -\frac{\partial f_i}{\partial x} - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} p_k,\\ &\sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_k}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial y}\right) = -\frac{\partial f_i}{\partial y} - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} q_k,\\ &\sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial z_k}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_k}{\partial y}\right) = \sum_k \left(p_k \frac{\partial f_i}{\partial p_k} + q_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(i,\ k = 1, \ldots, n)$$

zu integriren, so ist die l. c. entwickelte Integrationsmethode sofort anwendbar, und zwar führt dieselbe in dem vorliegenden Falle, statt wie im Allgemeinen bei einem System von $3n$ linearen partiellen Differentialgleichungen auf $3n$ Systeme von je zwei, nur auf n Systeme von je $n+3$ totalen Differentialgleichungen zwischen $3n+2$ Veränderlichen. Ist μ eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \mu \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot, \frac{\partial f_n}{\partial q_1} - \mu \frac{\partial f_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_n} - \mu \frac{\partial f_1}{\partial p_n}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot, \frac{\partial f_n}{\partial q_n} - \mu \frac{\partial f_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} = 0,$$

und sind $l_1, \ldots, l_n$ n Grössen, proportional den Unterdeterminanten der Elemente einer Horizontalreihe dieser Determinante, so lautet eins dieser Systeme:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &dy = \mu\, dx,\ dz_1 = (p_1 + q_1\mu)dx, \ldots, dz_n = (p_n + q_n\mu)\,dx,\\ &\sum_{i,k} l_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} dp_k = -\, dx \sum_i l_i \frac{df_i}{dx},\\ &\sum_{i,k} l_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} dq_k = -\, dx \sum_i l_i \frac{df_i}{dy}, \end{aligned}\right.$$

$$\left(\text{wo } \frac{df_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} p_k,\quad \frac{df_i}{dy} = \frac{\partial f_i}{\partial y} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} q_k \text{ sein soll}\right).$$

Vorausgesetzt, dass die Wurzeln der Gleichung $\varphi(\mu) = 0$ sämmtlich von einander verschieden sind, und dass jedes der für diese Wurzeln sich ergebenden Systeme (3) je ein Integral $v_k = c_k$ zulässt, so bestimme man aus diesen n Integralgleichungen und den n ge-

gebenen Gleichungen $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$ die $2n$ Grössen $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ als Functionen von $x, y, z_1, \ldots, z_n$; dann bilden die Gleichungen

$$dz_i = p_i dx + q_i dy \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ein integrables System, dessen Integration $z_1, \ldots, z_n$ als Functionen von $x, y, c_1, \ldots, c_n$ und n neuen Constanten liefert, und diese Functionen stellen die vollständige Lösung des Systems (1) mit $2n$ Constanten dar. Ist $w_k = $ const. ein zweites von $v_k = c_k$ verschiedenes Integral des ein und derselben Wurzel μ_k entsprechenden Systems (3), und bedeutet $\psi_k(v_k, w_k)$ eine willkürliche Function von v_k und w_k, so ergeben in derselben Weise, wie oben die Gleichungen $v_k = c_k$, $f_k = 0$, die $2n$ Gleichungen

$$\psi_k = 0,\ f_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

die allgemeine Lösung des Systems (1) mit n willkürlichen Functionen.

Analog, wie das in der citirten Abhandlung gegebene Verfahren auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen einer abhängigen und zwei unabhängigen Variablen angewendet wird, wird in einem zweiten Abschnitte der vorliegenden Abhandlung nach einer ähnlichen Methode, wie der oben angegebenen, die Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen einer abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln auf die Integration von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückgeführt. Die Resultate stimmen für $n = 2$ mit denjenigen überein, die Herr Darboux (Ann. de l'Ec. Norm. VII. 163—173) auf anderem Wege erhalten hat. T.

G. Darboux. Sur le problème de Pfaff. C. R. XCIV. 835-837; Darb. Bull. (2) VI. 14-36, 49-68.

Pfaff fand bekanntlich die Reduction des Differentialausdrucks

$$(1) \qquad \theta_d = X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n$$

auf eine gewisse canonische Form und gab damit zugleich die erste Methode für die Integration einer partiellen Differential-

gleichung erster Ordnung mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlichen. Diese Methode erschien gegenüber den später von Cauchy und Jacobi veröffentlichten Methoden zur Lösung desselben Problems dadurch im Nachteil, dass sie die Integration mehrerer Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erforderte, während die genannten Mathematiker nachwiesen, dass die Integration des ersten dieser sogenannten Pfaff'schen Systeme zur Lösung der partiellen Differentialgleichung ausreicht. Dies hat nach der Meinung des Verfassers die Folge gehabt, dass die Pfaff'sche Methode lange Zeit vernachlässigt worden ist. Da sie indess in anderer Beziehung wesentliche Vorteile bietet, so beabsichtigt der Verfasser durch eine neue Darstellung der Theorie des Pfaff'schen Problems zu zeigen, dass die Pfaff'sche Methode, passend angewendet, ebenso einfach wie die anderen wird, und dass insbesondere der Differentialausdruck, der einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung entspricht, vermittelst der alleinigen Integration des ersten Pfaff'schen Systems auf die canonische Form reducirt werden kann. Es ist offenbar dem Verfasser entgangen, dass bereits Herr Natani in seiner 1860 in Crelle's Journal erschienenen Abhandlung: „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen“ (siehe auch das Mathematische Wörterbuch von Natani, besonders abgedruckt in dem Werke: „die höhere Analysis in vier Abhandlungen“, Berlin, Wiegandt und Hempel 1866) von der Pfaff'schen Darstellungsweise ausgehend, eine sehr einfache Darstellung der in Rede stehenden Theorie gegeben hat, in der dieselbe Auswahl eines besondern Systems unter den Integralen des ersten Pfaff'schen Systems wie beim Verfasser, getroffen ist und für die partiellen Differentialgleichungen insbesondere das erwähnte einfache Resultat sich abgeleitet findet. Herr Natani nennt die betrachteten durch gewisse Eigenschaften ausgezeichneten Integrale „Hauptintegrale“ und bezeichnet Jacobi als denjenigen, der sie zuerst charakterisirt hat. Aus einer Bemerkung des Herrn Darboux ersehen wir beiläufig, dass vorher schon Cauchy diese Integrale betrachtet hat. Die Methode des Herrn Darboux ist im Uebrigen dadurch bemerkenswert, dass er unter alleiniger Benutzung der invarianten

Eigenschaft der Pfaff'schen Systeme fast ohne alle Rechnung die notwendige Form der reducirten Ausdrücke des Differentialausdrucks (1) in allen Fällen ableitet und namentlich die Integrabilität des ersten Pfaff'schen Systems auch in den Fällen, wo die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen geringer als im allgemeinen Falle ist, nachzuweisen im Stande ist, ein Punkt, den zuerst Herr Frobenius (Ueber das Pfaff'sche Problem, Borchardt J. Bd. LXXXII.) auf anderem Wege als besondern Fall eines allgemeinen Satzes in directer Weise erledigt ist.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Zunächst wird gezeigt, dass θ_d stets auf eine der beiden Typen

$$dy - z_1 dy_1 - \cdots - z_p dy_p \text{ (unbestimmter Typus)},$$

$$z_1 dy_1 + \cdots + z_p dy_p \text{ (bestimmter Typus)}$$

zurückgeführt werden kann. Gebraucht man mit dem Verfasser für die Aufstellung des ersten Pfaff'schen Systems die symbolische Schreibweise

$$(2) \qquad \delta\theta_d - d\theta_\delta = \lambda\theta_\delta dt,$$

aus der ihre invariante Eigenschaft unmittelbar hervorgeht, so tritt der erste Fall ein, wenn die Bestimmung der Verhältnisse der dx_i aus (2) unmöglich ist, so lange λ von Null verschieden ist. Die Zahl $2p$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Gleichungen, auf die sich (2) reducirt, wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird, und die dann, wie gezeigt wird, stets integrabel sind. Die Variablen y_i und z_i der reducirten Form sind ihre $2p$ Integrale. Können die Verhältnisse der dx_i aus (2) bestimmt werden, wenn λ von Null verschieden ist, dann tritt der zweite Fall ein. Die Zahl $2p$ ist wieder die der verschiedenen Gleichungen, auf die sich (2) reducirt, und die ebenfalls in allen Fällen integrabel sind. Ihre von t unabhängigen $2p-1$ Integrale sind $y_1, \ldots, y_p, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_p}{z_1}$.
Den Schluss des ersten Teils bildet der Nachweis, dass die verschiedenen Pfaff'schen Systeme, deren Integration zur Herstellung der canonischen Form notwendig ist, durch Einführung der erwähnten Hauptintegrale sich unabhängig von einander aufstellen lassen, und dass im Falle der partiellen Differentialgleichung bereits die Integration des ersten Systems die verlangte cano-

nische Form liefert, aus der dann die Lösung der partiellen Differentialgleichung sich ergiebt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit den Relationen, die zwischen zwei reducirten Formen von (1) stattfinden, und enthält insbesondere den Beweis dreier Sätze des Herrn Lie, die seiner Gruppentheorie zur Basis dienen. (Vgl. den Bericht über die betr. Arbeiten des Herrn Lie in diesem Jahrbuche Bd. V. p. 196ff.). Den Ausgangspunkt bildet hier für den Fall eines graden n die invariante Eigenschaft der beiden Ausdrücke

$$(\varphi) = \begin{vmatrix} a_1, \dots, a_{n1}, X_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n}, \dots, a_{nn}, X_n \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, 0 \end{vmatrix} : \Delta \text{ und } (\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n}, \dots, a_{nn}, \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, 0 \end{vmatrix} : \Delta,$$

wo

$$a_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

ist, Δ die Determinante der $a_{i,k}$ und φ, ψ beliebige Functionen der x bedeuten. Ist $n = 2m$ und sind

$$p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m, \quad P_1 dX_1 + \dots + P_m dX_m$$

zwei reducirte Formen desselben Differentialausdrucks, dann wird

$$(\varphi) = \Sigma p_i \frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = \Sigma P_i \frac{\partial\varphi}{\partial P_i},$$

$$(\varphi, \psi) = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial P_i}\frac{\partial\psi}{\partial X_i} - \frac{\partial\psi}{\partial P_i}\frac{\partial\varphi}{\partial X_i};$$

und indem man diese allgemeinen Gleichungen auf die Functionen X_i und P_k anwendet, erhält man unmittelbar die bekannten Relationen

$$(P_i) = P_i, (X_i) = 0, (P_i X_i) = 1, (P_i X_k) = 0, (X_i X_k) = 0, (P_i P_k) = 0.$$

Hierauf folgt die Ableitung des Lie'schen Satzes, dass, wenn k unabhängige Functionen $X_1, \dots, X_k$ der unabhängigen Variablen

$x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m$ gegeben sind, die den Gleichungen

$$(X_i) = 0, \ (X_i, X_h) = 0$$

genügen, sich stets $2m-k$ andere Functionen $X_{k+1}, \dots, X_m, P_1, \dots, P_m$ angeben lassen derart, dass der Identität

$$P_1 dX_1 + \dots + P_m dX_m = p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m$$

genügt wird. Daran schliessen sich die Beweise zweier anderen Lie'schen Sätze bezüglich der Identitäten

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_m dX_m = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \dots - p_m dx_m)$$

und

$$P_1 dX_1 + \dots + P_m dX_m + d\Pi = p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m,$$

die dem Falle, dass n ungrade und $= 2m+1$ ist, entsprechen.

Hr.

H. Lemonnier. Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes. S. M. F. Bull. X. 223-250.

T.

G. Teixeira. Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. Belg. Bull. (3) III. 486-498.

Der Verfasser sucht die drei Bedingungen dafür, dass die partielle Differentialgleichung $Ar + Bs + Ct + D = 0$ ein Integral habe von der Form

$$f(x, y, z, p, q) = \varphi(x, y),$$

wo φ eine willkürliche Function ist. Er reducirt die Integration auch für andere Fälle auf den Fall, wo zwei von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen vorhanden sind.

Mn. (O.).

J. W. L. Glaisher. On a partial differential equation. Brit. Ass. Rep. 1882.

In der Rep. of the Brit. Ass. von 1878 ist bewiesen worden, dass der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 u = \frac{h^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}$$

genügt wird durch $u = e^{a\sqrt{x^2+2xh}}$. Ihr wird auch genügt durch die Werte

$$u = \int_0^\infty \cos at \,.\, \varphi\left(\frac{hx}{x^2+t^2}\right) dt,$$

$$u = \int_0^\infty \frac{x\cos at}{x^2+t^2} \cdot \varphi\left\{h\left(x+\frac{t^2}{x}\right)\right\} dt,$$

$$u = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}a\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} \cdot \varphi\left(\frac{hx}{t^2}\right) dt.$$

Cly. (O.).

G. Darboux. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. C. R XCV. 69-72.

Für die von Euler, Lagrange, Laplace, Poisson und Riemann behandelte, in der mathematischen Physik und in der Geometrie eine Rolle spielende lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2}\,z$$

werden die folgenden Eigenschaften angegeben:

1) Sie ändert sich nicht, wenn man x und y gleichzeitig derselben linearen Substitution unterwirft, so dass aus jedem particulären Integral $z = \varphi(x, y)$ ein Integral mit drei willkürlichen Constanten:

$$z = \varphi\left(\frac{mx+n}{px+q}, \frac{my+n}{py+q}\right)$$

folgt. Aus dem particulären Integral

$$z = \left(1-\frac{y}{x}\right)^m F\left(m, m, 1, \frac{y}{x}\right),$$

das man leicht findet, wenn man diejenigen Lösungen sucht, die nur von der Verbindung $y:x$ abhängen, leitet man daher die allgemeine Lösung

$$\left[\frac{(y-x)(x'-y')}{(y-x')(x-y')}\right]^m F\left(m, m, 1, \frac{(y-y')(x-x')}{(y-x')(x-y')}\right)$$

ab, welche Riemann (Werke p. 162) auf anderem Wege erhalten hat. Die vorliegende Gleichung ist übrigens die einzige unter den linearen, die sich der genannten Eigenschaft erfreut, aus der man ferner schliesst, dass neben $z = \varphi(x, y)$ auch

$$x^i \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y^i \frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

Lösungen der vorliegenden Gleichung sind.

2) Ist z_m eine Lösung der obigen Diffentialgleichung, so ist

$$z_{m+1} = \frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z_m}{\partial y} - 2m\frac{z_m}{x-y}$$

stets eine Lösung derjenigen Gleichung, die aus jener entsteht, wenn m durch $m+1$ ersetzt wird. Diese zweite Eigenschaft führt auf das allgemeine Integral für den Fall eines ganzen m und reducirt im Falle eines nicht ganzzahligen m die Integration auf den Fall, dass der reelle Teil von m ein positiver echter Bruch ist. Das Integral, welches für diesen Fall angegeben wird, lässt sich, wie der Verfasser bemerkt, als allgemein nachweisen, wenn man ein solches im Falle einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen dadurch definirt, dass die in dem Integral auftretenden willkürlichen Functionen es gestatten sollen, dass die das Integral darstellende Fläche durch eine beliebig vorgegebene Curve gehe und längs derselben eine gegebene Fläche berühre. T.

P. Appell. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. Darb. Bull. (2) VI. 314-318.

Setzt man in der von Herrn Darboux (cf. das vorhergehende Referat) behandelten Differentialgleichung $z = (x-y)^m.u$, so geht dieselbe in einem speciellen Fall ($\beta = \beta' = m$) in die folgende über:

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \beta' \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

auf welche der Verfasser schon früher gestossen ist (C. R. XC.; cf. F. d. M. XII. 1880 p. 296). Es wird gezeigt, dass sich die von Darboux für jene angegebenen Eigenschaften auf diese allgemeinere Gleichung übertragen lassen.

Ist $\varphi(x, y)$ eine Lösung, so ist es auch

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right),$$

wo a, b, c, d beliebige Constanten sind. Als Lösungen, die nur von $\frac{x}{y}$ abhängig sind, ergeben sich specielle Fälle von

$$x^{-\beta}y^{\mu}F\left(\beta, \mu+\beta', \mu+\lambda, \frac{y}{x}\right) \text{ und } x^{\mu}y^{-\beta'}F\left(\beta', \mu+\beta, \mu+\lambda, \frac{x}{y}\right),$$

(wo λ eine willkürliche Grösse ist), die auch Lösungen sind. Die Methode der unbestimmten Coefficienten ergiebt als Lösung in Form einer Potenzreihe die folgende:

$$u = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\ldots(\beta'+n-1)}{m!\,n!}\psi(m+n)x^m y^n,$$

wo ψ eine willkürliche Function bedeutet. Eine passende Wahl von ψ liefert die hypergeometrische Reihe mit zwei Variabeln $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$. Ferner kann man ψ so wählen, dass man für u rationale, ganze Functionen in unendlicher Anzahl und von jedem beliebigen Grade erhält. Ist u eine beliebige Lösung der Differentialgleichung, so sind $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ Lösungen der Gleichungen, die man aus jener erhält, wenn β resp. β' um eine Einheit vermehrt wird. Diese Eigenschaft, ferner die Transformation $u = (x-y)^{1-\beta-\beta'}.t$ vermitteln die Herstellung des allgemeinen Integrals für ganz beliebige, reelle oder complexe Werte von β und β'. T.

J. Boussinesq. Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions, et notamment de celui du second ordre Δ_2. C. R. XCV. 479-482

das man leicht findet, wenn man diejenigen I ... ıtung z. B. des
nur von der Verbindung $y:x$ abhängen, ... uematische Physik
allgemeine Lösung

$$\left[\frac{(y-x)(x'-y')}{(y-x')(x-y')}\right]^m F\Big(m, m, \ldots$$

... u Begriff des (arith- ... annte „Differentialpara-
ab, welche Riemann (Werke p. ... :tion in einem Punkte"
hat. Die vorliegende Gleichu- ... ıs aller Werte des zweiten
den linearen, die sich der ... unction, wenn man ihn von jenem
man ferner schliesst, das ... uen Richtungen des Raumes nimmt;
... duct des mittleren Zuwachses der Function,
Lösungen der vo- ... jenem Punkte in allen möglichen Richtungen
2) Ist z_m ... unendlich kleine Strecke entfernt, in das sechsfache
... Quadrat dieser Strecke. In ähnlicher Weise ist der
... Differentialparameter erster Ordnung

stets e ... wen ... av

$$\Delta_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2}$$

definirbar. Umgekehrt lässt sich aber auch der Parameter Δ_2 zur Darstellung des Mittels nicht blos der zweiten, sondern auch der höheren Ableitungen benutzen; es ist nämlich

$$\text{Mittel von } \frac{d^m f}{ds^m} = 0 \text{ für ein ungrades } m$$

$$\text{und } = \frac{1}{m+1}(\Delta_2)^{\frac{m}{2}} f \text{ für ein grades } m.$$

T.

J. Boussinesq. Sur l'intégration de l'équation

$$A\frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\cdots\right)^n \varphi = 0.$$

C. R. XCIV. 514-517.

In einer früheren Note (C. R. t. 94. p. 32; cfr. Abschn. X. Cap. 4. B. dieses Bandes) war gezeigt worden, dass das Integral

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$$

hat, seine zweite Ableitung nach x zu liefern, φ resp. durch f' und φ' ersetzt. Allgemeiner der vorliegenden Note gezeigt wird, in der- Integral

$$\int^{\infty} f\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha \quad (r^2 = x^2+y^2+\cdots)$$

$$\Delta_2\varphi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\cdots\right)\varphi,$$

$p = \frac{2}{2-m}$ ist, wo m die Anzahl der Veränderlichen $x, y, \ldots$ bedeutet. Auf Grund dessen ergiebt sich aus der citirten Note, dass die Functionen

$$\varphi = \int_0^{\infty} f\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha$$

und

$$\varphi = \int_0^{\infty} f\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right)\psi\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)d\alpha$$

die partielle Differentialgleichung

$$A\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n} + (\Delta_2)^n\varphi = 0$$

befriedigen, wenn φ irgend eine der n verschiedenen Lösungen der Differentialgleichung $(\pm 1)^n\psi^{(n)} + A\psi = 0$ bedeutet. (Im Falle $m = 2$, also $p = \infty$, sind α^p durch e^β, $d\alpha$ durch $d\beta$ und die Grenzen durch $-\infty$ und $+\infty$ zu ersetzen). An dieses Ergebnis werden Erörterungen über seine Anwendbarkeit geknüpft. T.

K. M. Peterson. Ueber Integration partieller Differentialgleichungen. III. Abhandlung. Mosk. S. X. Lief. 2. (Russisch).

Diese Abhandlung ist der Entwickelung von tiefsinnigen Betrachtungen des verstorbenen Verfassers über die Theorie der Integration partieller Differentialgleichungen verschiedener Ordnungen mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher ge-

widmet. Die beiden früheren Abhandlungen (Bd. VIII. S. 291 und Bd. IX. S. 137) beschäftigten sich mit derselben Frage im Falle zweier unabhängiger Veränderlichen.

Hat man eine Differentialgleichung:

$$(1) \qquad E = d\omega + X dx + Y dy + Z dz + \cdots = 0$$

zwischen den Veränderlichen ω, x, y, $z, \ldots$, wo X, Y, $Z, \ldots$ irgend welche gegebene Functionen derselben Veränderlichen bezeichnen, und sieht man ω als Function der anderen an, so hat man auch eine Gleichung:

$$(2) \qquad d\omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \cdots,$$

wo durch die griechischen Buchstaben die partiellen Derivirten bezeichnet sind. Lässt man nun die Veränderlichen so variiren, dass zwischen denselben folgende Gleichungen stattfinden:

$$(3) \qquad A = dy - u\,dx = 0; \; B = dz - v\,dx = 0, \; C = 0, \ldots$$

(u, v beliebige Functionen derselben Veränderlichen), so wird die gegebene Gleichung (1) folgende Gestalt annehmen:

$$E = (\xi + u\eta + v\zeta + \cdots + k)\, dx = 0,$$

wo $k = X + uY + vZ + \cdots$ ist, und also wegen Willkürlichkeit von dx in folgende partielle Differentialgleichung übergehen:

$$(4) \qquad F = \xi + u\eta + v\zeta + \cdots + k = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung drückt also dieselbe Abhängigkeit zwischen $\omega, x, y, z \ldots$ aus, wie die Gleichung (1), die jetzt auch geschrieben werden kann:

$$(5) \qquad E = d\omega + k dx = 0$$

unter den Bedingungen, die durch die Gleichungen (3) ausgedrückt sind. Darum unterscheidet der Verfasser drei Arten von Gleichungen, mit denen man bei Integration partieller Differentialgleichungen zu thun hat: 1) unbedingte Gleichungen, wie (2), die aus dem Begriff der Function mehrerer Veränderlichen folgen; 2) bedingte Gleichungen wie (5), die unter den Bedingungen (3) stattfinden, und 3) die Bedingungsgleichungen (3) selbst. Dieselben drei Arten von Gleichungen begegnen uns auch bei der Integration linearer partieller Gleichungen von höheren Ordnungen. Diese Einteilung der Gleichungen in drei Arten ist

durch ihr verschiedenes Verhalten zu einander bei der Integration des Systems bedingt.

Vergleicht man die allgemeinste lineare Gleichung n^{ter} Ordnung $F=0$ mit m unabhängigen Veränderlichen mit derjenigen, in welche die Differentialgleichung

(6) $$E = Pdp + Qdq + \cdots + Xdx + Ydy + Zdz + \cdots = 0,$$

wo $p, q, \ldots$ die Derivirten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bezeichnen, nach der Elimination der $dp, dq, \ldots$ mit Hülfe der Gleichungen

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \cdots \text{ etc.}$$

unter den Bedingungen (3) übergeht, so findet man, dass diese letzte Gleichung jene allgemeinste Form $F=0$ haben kann, wenn

$$N_{n-1}^m + m - 1 \geqq N_n^m$$

$\left(\text{wo } N_n^m = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots(m-1)} \text{ ist}\right)$. Diese Ungleichung wird erfüllt: 1) wenn $n=1$, m beliebig; 2) wenn $m=2$, n beliebig. Dadurch zerfallen alle linearen partiellen Differentialgleichungen in 3 verschiedene Klassen: 1) Gleichungen 1ter Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen; 2) Gleichungen beliebiger Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen; 3) alle andern Gleichungen.

Eine lineare Differentialgleichung I. und II. Klasse wird immer in eine bedingte Gleichung $Fdx = 0$ übergehen, lineare Differentialgleichungen III. Klasse nur in einem besonderen Falle. Durch den Mechanismus der Integration werden diese 3 Klassen von Gleichungen scharf von einander unterschieden. In Klasse I. kommt nur eine willkürliche Function vom $m-1$ Argumenten vor, in Klasse II. hängen die vorkommenden Functionen von je einem Argumente ab; was nicht mehr in der III. Klasse der Fall ist.

Es würde schwer fallen, in einer kurzen Notiz über diese ziemlich grosse Abhandlung ihren ganzen Inhalt zu skizziren: wir wollten nur die Grundideen andeuten, um so mehr, als im Nachlass des Verfassers eine deutsche Abhandlung über denselben Gegenstand gefunden worden ist. Ty.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

E. Fergola. Richiamo a proposito di una formola recentemente pubblicata dal Sig. G. Erdmann. Nap. Rend. XXI. 161.

Herr Fergola macht die Mitteilung, dass die Formel für die höheren Differentialquotienten der Functionen von 2 anderen Functionen, welche Herr Erdmann in seiner Abhandlung: „Ueber die Variationen n^{ter} Ordnung“ (Schlömilch Z. XXVI. p. 76; siehe F. d. M. XIII. (1881) p. 303) herleitet, nur ein specieller Fall derjenigen ist, die er bereits im Jahre 1858 in einer Note: „Sopra due formole di Calcolo differenziale“ (Tortolini Ann. I) veröffentlicht hat. M.

A. Livenzoff. Ueber Maxima und Minima der einfachen bestimmten Integrale. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch).

Es wird in dieser Note gezeigt, dass die Bedingungen, die das Polynom

$$(1)\qquad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{m-1} x^{m-1}$$

so bestimmen, dass das Integral

$$\int_a^b F(x, y, y', y'' \ldots) f(x)\, dx$$

zum Maximum oder Minimum wird, identisch sind mit den Bedingungen, dass der Ausdruck

$$(2)\qquad M(x) \int_a^b \frac{f(z)\, dz}{x-z} - \frac{d}{dx}\left\{N(x) \int_a^b \frac{f(z)\, dz}{x-z}\right\} + \frac{d^2}{dx^2}\left\{P(x) \int_a^b \frac{f(z)\, dz}{x-z}\right\} - \cdots,$$

wo $M(x)$, $N(x)$, $P(x)$, ... die Derivirten

$$\frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial y'},\ \frac{\partial F}{\partial y''}, \ldots$$

nach dem Einsetzen der rechten Seite von (1) für y bezeichnen, einer ganzen Function von x bis zu Gliedern von der Ordnung x^{-m} gleich wird. In dem Falle, dass F keine höheren Potenzen von y als die zweiten und nur die ersten Potenzen von $y', y'', \dots$ mit Coefficienten, die nur von x abhängen, enthält, nimmt der Ausdruck (2) die Gestalt an:

$$M(x)\, y \int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z} - \varphi(x),$$

und die Aufgabe kann dann nach der Methode von Tschebischeff durch Entwickelung der Function

$$\int_a^b \frac{M(z)f(z)dz}{x-z}$$

in einen Kettenbruch gelöst werden. Ty.

J. J. Walker. Solution of a question (6571 und 6598). Ed. Times XXXVI. 40-42.

Der Inhalt der Note betrifft die Variation des Crofton'schen Integrals

$$\iint (\vartheta - \sin\vartheta)dx\,dy = \frac{1}{2} L^2 - \pi\Omega$$

(Lond. Trans. 1868 p. 188; s. F. d. M. I. (1868) p. 75), unter der Voraussetzung, dass der Umfang der geschlossenen Linie L, welche die Fläche Ω begrenzt, in eine andere benachbarte übergeht, die dadurch erzeugt wird, dass jeder Krümmungsradius ϱ in Ω um ein Stück $\mu f(\varrho)$ verlängert wird, wo μ eine unendlich kleine constante Grösse ist. Es wird

$$\iint \left\{ \frac{f(\varrho_1)}{t_1} + \frac{f(\varrho_2)}{t_2} \right\} \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta \cdot dx \cdot dy = \frac{1}{2} L \int_0^{2\pi} f(\varrho)d\varphi,$$

wo t_1, t_2 die Längen der Tangenten sind, die von dem Punkte x, y an Ω gezogen werden, ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien der entsprechenden Berührungspunkte, ϱ der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte der Curve und φ die Neigung des Radius zu einer festen Linie in der Ebene. Die Integration erstreckt sich auf die ganze Ebene ausserhalb Ω.

Geht man von dem Crofton'schen Integral

$$\iint \vartheta\,dx\,dy = \pi\theta - \int_0^{2\pi} \Sigma\,d\omega$$

(ib. p. 190) aus und lässt nur die innere Begrenzung variiren, so erhält man

$$\iint \left\{\frac{f(\varrho_1)}{t_1} + \frac{f(\varrho_2)}{t_2}\right\} dx\,dy = \int_0^{2\pi} c f(\varrho)\,d\omega,$$

wo ϑ der Winkel zwischen den beiden Tangenten ist, die von irgend einem Punkte an die innere und äussere Begrenzung gezogen werden. c ist eine Sehne, die von der äusseren Begrenzung ein Segment Σ abschneidet und die innere berührt; ω ist der Winkel, den c mit einer festen Linie bildet.

Lässt man allein die äussere Begrenzung variiren, so erhält man

$$\int_0^{2\pi} (\pi - \vartheta)\,\varrho f(\varrho)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{\int_0^{\beta} \varrho f(\varrho)\,d\varphi\right\} d\omega,$$

worin ϱ jetzt der Krümmungsradius der äusseren Begrenzung an der Stelle ist, wo die Tangenten der inneren den Winkel ϑ bilden; β ist der Winkel zwischen den Normalen in den Endpunkten von c. Die Integration erstreckt sich auf den Ring zwischen beiden Begrenzungen. M.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1

Allgemeines.

P. du Bois-Reymond. Die allgemeine Functionentheorie. I. Teil. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function. Tübingen. Laapp.

Die neueren Theorien der irrationalen Zahlen suchen den Boden der Arithmetik festzuhalten, indem sie sich eines Verfahrens der mathematischen Begriffsbildung bedienen, dem man schon im fünften Buche von Euclid begegnet. Gestützt auf die Annahmen der Alten über die gerade Linie kann man dann leicht zeigen, dass jeder Strecke eine Zahl zugeordnet werden könne; während der umgekehrte Satz, dass auch jeder Zahl eine Strecke entspreche, als ein Axiom oder als gleichbedeutend mit der Annahme der Stetigkeit der Geraden anzusehen ist. Früher wurden die irrationalen Zahlen manchmal aus der Geometrie abgeleitet, jedoch die eigentliche Bedeutung dieses Vorgehens wurde nicht erkannt.

Herr du Bois-Reymond betrachtet die letztere Methode als consequent. In der Tat ist die Arithmetik wie die Geometrie eine Naturwissenschaft, und zwar hervorgegangen aus dem linearen Grössenbegriff, d. i. aus der Vorstellung von Grössen, welche

dieselben Eigenschaften besitzen wie die Strecken einer begrenzten Geraden, so dass sie sich ihr Punkt für Punkt zuordnen lassen; so wird als Grundproblem der Analysis der Nachweis derjenigen Grösse auftreten, welche einem arithmetischen Grenzübergange entspricht. Diese Aufgabe wird formulirt durch das „allgemeine Convergenzprincip“, d. i. den Satz: Wenn der Unterschied $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$ gedacht, von einem hinreichend grossen Wert von x an und für beliebige Werte des Unterschiedes $x_1 - x$ unter einer beliebig kleinen Zahl bleibt, so hat die Function $f(x)$ einen bestimmten Grenzwert Y, d. h. es existirt eine Grösse Y mit der Eigenschaft, dass der Unterschied $Y - f(x)$ von einem hinreichend grossen Werte von x an kleiner ist als eine beliebige kleine Zahl. Der Herr Verfasser stellt jedoch nicht diese allgemeine Aufgabe an die Spitze, sondern das darunter enthaltene Problem der Grenze eines endlosen nicht periodischen Decimalbruches. Er zeigt, dass das Problem der Decimalbruchgrenze nach zwei einander schroff gegenüberstehenden Anschauungen, der idealistischen und empiristischen, behandelt und gelöst werden könne. Um ihren unversöhnlichen Gegensatz hervortreten zu lassen, entwickelt er sie ganz unabhängig von einander, indem er abwechselnd einem Vertreter der einen und einem der anderen Ansicht das Wort erteilt. Die Discussion derselben führt zu folgendem Ergebnis. Der Idealist glaubt an die Wirklichkeit unvorstellbarer, durch unsern Denkvorgang geforderter Begriffsgrenzen. Dazu gehören die geometrischen Grundbegriffe: Punkt, Linie, Fläche; die vollkommene Gerade und das genaue Mass, endlich das Unendlichgrosse und das Unendlichkleine. Während der Empirist bei der Tatsache stehen bleibt, dass die Einheitsstrecke unbegrenzt viele Punkte enthalte, schreitet der Idealist zur Erklärung fort: die Anzahl dieser Punkte ist unendlich gross. Daraus folgert er die Existenz des Unendlichkleinen, indem diese Strecke entsprechend der unendlichen Anzahl ihrer Punkte in unendlich viele Teilstrecken zerfallen muss, deren keine endlich sein kann. Die unendlichkleinen Strecken bilden gegenüber den endlichen eine neue Art von Grössen, die unter sich jedoch dieselben Eigenschaften besitzen, wie die endlichen

Grössen. Die Null muss dem Idealisten in der Analysis entbehrlich erscheinen. Der Empirist verharrt stets innerhalb der Grenzen des natürlichen Vorstellungsgebietes. Er giebt zwar das beliebig Genaue in der Geometrie zu, nennt aber das ideal Genaue ein Axiom. Der Punkt ist ihm ein nach allen Richtungen hin beliebig kleiner Raum, die Linie ein Faden von beliebig kleinem Querschnitt. Für ihn giebt es nur endliche Grössen, darunter auch solche, die über jedes noch so grosse Mass wachsen oder unter jedes noch so kleine sinken. Der Idealist löst das Grenzproblem, indem er den Unterschied zwischen der Grenze und den sie bestimmenden Strecken schliesslich dem Vorstellungsgebiet entrückt, der Empirist aber, indem er die letzteren schliesslich mit der Grenze zu einer Vorstellung sich vermengen lässt. Die Systeme des Idealismus und Empirismus sind bisher schwerlich scharf auseinandergehalten worden. (Selbst auf dem Gebiete der Geometrie, wo einzelne Einwürfe des Empirismus doch schon lange vorgekommen sind, wurde derselbe erst von Herrn Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie (1882, s. d. Bd. Abschn. VIII. Cap. 5 A.) consequent durchgeführt.) Für die Functionentheorie fordert der Herr Verfasser eine neutrale Darstellungsweise, d. h. eine solche, die keiner der beiden Anschauungen widerspricht. Es darf die idealistische Metaphysik, das Unendlichgrosse und das Unendlichkleine nicht benutzt werden, ebensowenig aber auch die empiristische Idee des beliebig Genauen, so dass Begriffe wie Grösse, Wert, Strecke im idealistischen Sinne gebraucht werden können. Die vorstehende, vorwiegend erkenntnistheoretische Untersuchung des Grenzproblems bildet den Inhalt des ersten und zweiten Capitels. Das dritte Capitel „über das Argument“ giebt die Lehre von der Punktverteilung, ferner die Lehre von der Abzählbarkeit und den relativen Mächtigkeiten unbegrenzter Vielheiten nach Herrn G. Cantor. Nach der Terminologie des Herrn Verfassers werden die unendlichen Punktsysteme auf der Argumentstrecke eingeteilt in Pantachien, Apantachien und solche, die sich nicht in eine endliche Anzahl pantachischer und apantachischer Strecken zerlegen lassen. Zu den Apantachien gehören die integrirbaren Systeme, was aber nicht

umgekehrt werden darf. Das Capitel schliesst mit der idealistisch-empiristischen Kritik der vorstehenden Theorie, aus welcher hervorgeht, dass das Zahlencontinuum (0,1) nur für den Idealisten existire, d. h. eine veränderliche, endliche Punktmenge, die durch Vermehrung sich der Menge aller möglichen Punkte unbegrenzt näherte, giebt es nicht. Das vierte Capitel „über die Function" erklärt den allgemeinen Functionsbegriff, erörtert die Beziehungen des einzelnen Functionswertes zu seinen Nachbarwerten und knüpft hieran die wichtigsten Sätze über stetige Functionen. Aus dem letztgenannten Gebiete sei hervorgehoben der Begriff des Grades der Stetigkeit $r(x,\Delta)$ in einem Punkte x. Ist $f(x)$ im Intervalle (0,1) durchaus stetig, so existirt eine Function $r(x,\Delta)$, die, ohne je zuzunehmen, mit Δ unter jede Grenze sinkt und zu $f(x)$ in folgender Beziehung steht:

$$f(x)-f(x+\Delta) = r(x,\Delta).K, \qquad (K)\leqq 1.$$

Im fünften Capitel „über den Endverlauf der Functionen" findet man den Beweis des oben erwähnten Convergenzprincipes und daraus abgeleitete Sätze, die Lehre von den Unbestimmtheits-Grenzen und -Enveloppen und den Beweis des allgemeinen Divergenzprincipes: „Wenn der Unterschied $f(x_1)-f(x)$ nicht für alle Werte x und x_1, die oberhalb einer hinlänglichen Grösse befindlich sind, unterhalb einer beliebig kleinen Grösse bleibt, so hat $f(x)$ keinen festen Limes." Am Schlusse des Capitels wird der vollständigen Pantachie der linearen Grössen, d. i. dem Zahlencontinuum, die infinitäre Pantachie gegenübergestellt. St.

J. Hoüel. Considérations élémentaires sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique. Bord. Mém. (2) V. 149-196.

Eine elementare und übersichtliche Darlegung der successiven Entwickelung des Grössenbegriffs. Der Ideengang der Darstellung ist folgender: Von den ganzen Zahlen und den mit denselben vorzunehmenden elementaren Rechnungsoperationen ausgehend, werden zunächst die formalen Gesetze für diese Operationen auf-

gestellt, die umgekehrt wieder zur Definition der Operationen dienen können. Die Geometrie lässt gewisse in der Ebene mit Strecken vorzunehmende Operationen als jenen formalen Gesetzen unterworfen erkennen, die sonach mit den obigen Rechenoperationen identificirt werden können, und an denen sich für die abstracte Grössenlehre die Formulirungen successive der negativen, gebrochenen irrationalen und complexen Grössen entwickeln lässt.

Die Arbeit soll ersichtlich einer ersten Einführung in den Gegenstand dienen. Dadurch ist das Absehen von der vorhandenen Literatur des Gegenstandes gerechtfertigt, und das Nichteingehen auf eine Discussion der Bedenken, welche einer unmittelbaren Gleichstellung des aus geometrischen Vorstellungen gewonnenen Grössenbegriffs und des successive aus den Zahlenoperationen abgeleiteten der abstracten Grössenlehre entgegenstehen. Doch hätten Incorrectheiten des Ausdrucks vermieden werden können, wie pag. 183, 184 der Satz, dass die Punkte $\sqrt[n]{1}$, wo n eine incommensurable reelle Zahl bedeutet, die g a n z e Peripherie des Einheitskreises ausmachen. Dk.

H. Durège. Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Dritte Aufl. Leipzig. Teubner.

Ueber den Plan des Buches ist F. d. M. V. (1873) p. 217 berichtet worden. Die vorliegende dritte Auflage hat, abgesehen von zahlreichen kleineren Verbesserungen folgende Aenderungen erfahren. Nach der Einführung der Riemann'schen Kugelfläche wird der Nachweis hinzugefügt, dass für eine gegebene algebraische Function, unter Berücksichtigung des unendlich grossen Wertes der Variabeln, die Bildung der Riemann'schen Fläche immer möglich ist. Der Abschnitt über die allgemeinen Eigenschaften der Functionen schliesst mit der Darstellung einer Function durch eine convergente Reihe in der Umgebung eines Punktes, der kein Verzweigungspunkt ist, in welchem aber die Function

unstetig wird. Im folgenden Abschnitt werden die beiden Arten der Unstetigkeit genauer erörtert. In dem neunten Abschnitt, der von den einfach und mehrfach zusammenhängenden Flächen handelt, ist der Riemann'sche Hauptsatz über die letzteren mehrfach ergänzt. In einer nachträglichen Bemerkung am Ende des Buches ist gezeigt, dass man bei der von Riemann ursprünglich aufgestellten Fassung seines Satzes alle Schwierigkeiten vermeidet und sofort die Folgerungen erhält. Für den Satz selbst wird ein von Herrn Lippich gegebener Beweis hinzugefügt, der einige Eigenschaften allgemeiner Liniensysteme voraussetzt. Hieraus ergeben sich noch Folgerungen für eine beliebige mit Randcurven behaftete Riemann'sche Fläche, und eine Erweiterung des Euler'schen Satzes von den Kanten, Ecken und Flächen eines Polyeders. M.

C. G. J. Jacobi. Gesammelte Werke. II. Band. Herausgegeben von K. Weierstrass. Berlin. G. Reimer.

Wie wir bereits in unserem Referate über den ersten Band (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 20) erwähnt haben, sollten die beiden ersten Bände der auf Veranlassung der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften herausgegebenen Werke Jacobi's alle Abhandlungen desselben über elliptische und Abel'sche Transcendenten umfassen. Die in den vorliegenden 2ten Band aufgenommenen 21 von Jacobi bereits veröffentlichten Abhandlungen sind streng chronologisch geordnet. Ihnen folgen fünf Abhandlungen aus dem Nachlasse Jacobi's, welche bis auf die letzte nach seinem Tode von Anderen im Borchardt'schen Journal veröffentlicht sind. Der reinen Theorie der elliptischen Functionen gehören folgende Abhandlungen an: 15) „Ueber die unmittelbare Verification einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen", Crelle J. XXXVI. p. 75-80, worin die Reihe

$$1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+ \text{ etc.}$$

als unendliches Product dargestellt wird; 16) „Ueber die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der

elliptischen Functionen Genüge leisten", Crelle J. XXXVI. p. 80-88; 17) „Ueber die Differentialgleichung, welcher die Reihen

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{ etc.}, \quad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \text{ etc.}$$

Genüge leisten", Crelle J. XXXVI. p, 97-112; und aus dem Nachlass: 23) „Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen, Crelle J. LIV. p. 82-97, mitgeteilt durch C. W. Borchardt. Anwendungen der elliptischen Functionen enthalten folgende Abhandlungen: 3) „Ueber die Figur des Gleichgewichts," Poggendorff Ann. XXXIII. p. 229-233. 18) „Ueber eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\text{“},$$

Crelle J. XXXVI. p. 113-134. Die Differentialgleichung wird auf elliptische Coordinaten transformirt, dann mit Benutzung der elliptischen Functionen ein particuläres Integral derselben aufgestellt. 19) „Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind", Crelle J. XXXVII. p. 61-94 u. 222-254, wo die in der Theorie der elliptischen Functionen auftretenden q-Reihen auf Probleme der Zahlentheorie angewendet werden. 21) „Auszug eines Schreibens von C. G. J. Jacobi an E. Heine", Crelle J. XLII. 35-40, welches die elliptischen Functionen zur Lösung der von Lamé betrachteten Gleichung

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_2^2} + n(n+1)(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)X_n = 0$$

benutzt. 24) „Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Teile ähnlich bleiben", Crelle J. LIX. 74-88, mitgeteilt von S. Cohn. 25) „Solution nouvelle d'un problème fondamental de géodésie", Astr. Nachr. XLI. p. 210 u. f., Crelle J. LIII. p. 335-341, mitgeteilt von E. Luther. Und endlich die berühmte Abhandlung: 20) „Sur la rotation d'un corps." Extrait d'une lettre adressée à l'Académie des Sciences de Paris, Crelle J. XXXIX. p. 292-350, worin die neun Cosinus des Problems mit Hülfe der elliptischen Functionen $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ und $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ als Functionen der Zeit ausgedrückt

werden. Aus dem Nachlass wird als Fortsetzung dieser Abhandlung hier zum ersten Mal veröffentlicht: 26) Fragments sur la rotation d'un corps tirés des manuscrits de C. G. J. Jacobi et communiqués par E. Lottner." A. „Second mémoire sur la rotation d'un corps non soumis à des forces accélératrices" (p. 427-467). „Supplément au mémoire précédent. Expressions elliptiques des cosinus des angles qu'un système quelconque d'axes rectangulaires fixes dans le mobil fait avec les axes des x, y, z fixes dans l'espace" (p. 468-476). B. „Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu en un point quelconque de son axe" (p. 477-492). C. „Sur la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe" (p. 493-514).

Mit der Integration eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen beschäftigt sich die Abhandlung 13) „Ueber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen", Crelle J. XXXII. p. 220-226.

Das Abel'sche Theorem behandeln: 1) „De theoremate Abeliano observatio", Crelle J. IX. p. 99, und 7) „Demonstratio nova theorematis Abeliani", Crelle J. XXIV. p. 28. Die Theorie der Abel'schen Functionen wird weiter ausgebaut in folgenden Abhandlungen: 2) „Considerationes generales de transcendentibus Abelianis", Crelle J. IX. p. 394-403, worin die Analogie mit den elliptischen Transcendenten durchgeführt wird. 4) „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur", Crelle J. XIII. p 55-78. 8) „Ueber die Additionstheoreme der Abel'schen Integrale 2ter und 3ter Gattung", Crelle J. XXX. p. 120-126. 9) „Note sur les fonctions Abéliennes", Bull. Pétersb. II. No. 7, Crelle J. XXX. p. 183-184. 10) und 11) „Extrait de deux lettres de Charles Hermite à C. G. J. Jacobi et d'une lettre de Jacobi adressée à Hermite", Crelle J. XXXII. p. 277-299; XXXII. p. 176-181, worin die Teilung der Argumente der Abel'schen Functionen, der Ausdruck von $\sin \operatorname{am}(u, k)$ durch $\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{m}, \lambda\right)$, der Beweis des Abel'schen

Theorems für elliptische Functionen, die Addition der Argumente und der Parameter in den Abel'schen Integralen 3[ter] Gattung und die Vertauschung von Argument und Parameter zur Sprache kommen. 12) „Ueber die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abel'schen und höheren Transcendenten", Crelle J. XXXII. p. 185-196. Und aus dem Nachlass: 22) „Ueber die Substitution

$$(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0,$$

und über die Reduction der Abel'schen Integrale erster Ordnung in die Normalform", Crelle J. LV. p. 1-14, mitgeteilt durch F. Richelot. Ferner ist hier zu erwähnen der Nekrolog Göpel's: 14) „Notiz über A. Göpel", Crelle XXXV. p. 313-317, worin eine Uebersicht der Resultate der Göpel'schen Dissertation: „De aequationibus secundi gradus indeterminatis", Berlin 1835, gegeben wird, und der wichtigen Abhandlung: „Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis", welche die Aufgabe behandelt, die umgekehrten Functionen der ersten Klasse der Abel'schen Integrale wirklich darzustellen.

Anwendungen der Abel'schen Transcendenten enthalten folgende Abhandlungen: 6) „Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution", Crelle J. XIX. p. 309-313. Und 5) „De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi diophantea", Crelle J. XIII. p. 353-355.

Die Anmerkungen enthalten ausser einigen Notizen über Aenderungen, die hier und da nötig gewesen sind, einen kürzlich von Herrn Prof. Weierstrass unter den Papieren Borchardt's aufgefundenen Aufsatz Jacobi's „Zur Geschichte der elliptischen und Abel'schen Transcendenten", dem ein Teil der obigen Notiz über Göpel entnommen zu sein scheint, und der für die Geschichte der Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Functionen vieles Interessante enthält. M.

L. Saltel. Sur un moyen d'étendre la théorie des imaginaires sans faire usage des imaginaires. C. R. XCIV. 166-169. Dk.

P. Dziwiński. Richtungszahlen, ihre Bedeutung und Anwendung in der Mathematik. Pr. Jaroslaw. (Polnisch).

Darstellung der elementaren Theorie complexer Zahlen, welche als Repräsentanten der Punkte einer Grundebene definirt, Drehungs- und Richtungszahlen genannt und durch das Symbol $A\alpha$ (A Länge des Radius vector des Punktes, α der Winkel, welchen dieser Radius mit der positiven Richtung der x-Axe bildet) dargestellt sind. Den Inhalt der Schrift bildet die Theorie der Operationen mit den Drehungs- und Richtungszahlen, ihre Anwendung auf die Theorie der Logarithmen, auf goniometrische Functionen und auf einige Aufgaben aus der analytischen Geometrie. Dn.

P. Cazzaniga. Il calcolo dei simboli d'operazione elementaremente esposto. Batt. G. XX. 48-78, 194-230.

Zweck der umfangreichen Abhandlung ist, eine elementare Theorie der Operationen, wie sie von Gregory, Boole, Rob. Carmichael und Andern entwickelt ist, nebst Anwendungen zu geben. Nach Auseinandersetzung der Bedeutung der distributiven Eigenschaft einer Operation und anderer Principien werden die distributiven und commutativen Eigenschaften zusammengesetzter Operationen entwickelt. Dann werden Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und auf lineare Differentialgleichungen im Allgemeinen gegeben. Die Fortsetzung enthält die Theorie der inversen Operationen nebst Anwendungen, ferner Criterien, ob mehrere Functionen eine Abhängigkeit von gegebener Form von einander haben, endlich Systeme von Differential- und Differenzengleichungen. M.

J. C. Glashan. Forms of Rolle's theorem. Sylv. Am. J. IV. 282-292. 1881.

Mit Hülfe eigentümlicher symbolischer Bezeichnungen werden folgende Formeln aus der Theorie der Functionen einer reellen Variabeln dargestellt: Rolle's Fundamentalsatz, Ausdehnung des-

selben, Lagrange's Form, Cauchy's Form, specielle Fälle der letzteren, Erweiterung derselben, Ausdrücke durch bestimmte Integrale, Restglied bei Taylor, Cayley, Lagrange. Dann folgen die Functionen einer complexen Variabeln: allgemeine und besondere Formen des Theorems, Restglied in Taylor's Satz.

M.

A. Cayley. On the geometrical representation of an equation between two variables. J. Hopkins Circ. 1882. 210.

Wird die Darstellung zweier Variablen $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ durch Punkte in zwei Ebenen auf die Gleichung $z' = \sqrt{z^4 - 1}$ angewandt, so entspricht einem System von Halbkreisen (aus dem Coordinatenanfang) in der einen Ebene eine Schaar von lemiscatenartigen Curven in der anderen.

Schg.

A. Cayley. On associative imaginaries. J. Hopkins Circ. 1882. 211-212.

Die imaginären Grössen x, y werden definirt durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x^2 &= ax + by \\ xy &= cx + dy \\ yx &= ex + fy \\ y^2 &= gx + hy; \end{aligned}$$

es werden die Bedingungen untersucht, die zwischen den Coefficienten a, b, c, d, e, f, g, h bestehen müssen, damit die imaginären Grössen associative Grössen sind. Es ergeben sich zwölf verschiedene Relationen zwischen jenen acht Coefficienten.

M.

G. Plarr. On the establishment of the elementary principles of quaternions in an analytical basis. Brit. Ass. Rep. 1882.

Csy.

W. J. Stringham. Determination of finite quaternion groups. Sylv. Am. J. IV. 345-358.

Haben zwei Quaternionen derselben endlichen Gruppe eine Axe, so ist jede von beiden die Potenz einer und derselben Quaternion. Sind q, r zwei Quaternionen einer solchen Gruppe, q mit einem Minimalargument, r so gewählt, dass der Winkel (qr) möglichst klein, aber von Null verschieden ist, dann ist r ein Vector mit der Periode 4. Hat q_1 eine Periode, die grösser als 10 ist, so liegen die Axen aller übrigen Quaternionen der Gruppe in der zur Axe von q_1 senkrechten Ebene, und alle Quaternionen, die nicht Potenzen von q_1 sind, haben die Periode 4 oder 2. Die grösste Periode einer endlichen Gruppe, welche nicht eine Kreisteilungsgruppe ist, wird grade sein. Mit Hülfe dieser Sätze gelingt es, die endlichen Gruppen aufzustellen.

No.

H. Hankel. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Klein Ann. XX. 63-112.

Wörtlicher Wiederabdruck der letzten Arbeit von Hankel, die bisher durch die Art ihrer Veröffentlichung nur schwer zugänglich war. Ueber dieselbe wurde im zweiten Bande (187 dieses Jahrbuches p. 190 berichtet. Sie hat auf die neuere Entwickelung der Theorie der Functionen von reellen Veränderlichen einen bedeutenden Einfluss ausgeübt. Darüber, sowie über das interessanteste Capitel derselben, „das Condensationsprincip der Singularitäten“, möge man die Auseinandersetzungen des Herrn G. Cantor (Klein's Ann. XII. p. 588, siehe das folgende Referat) vergleichen. Die Schrift enthält im Einzelnen einige Unrichtigkeiten, z. B. den Satz, dass die punktirt unstetigen Functionen immer integrabel sind, an welchem, wenn wir nicht irren, zuerst Herr Stephen Smith Anstoss genommen hat. (Vgl. d. Jahrbuch VII. (1875) p. 247.).

St.

G. Cantor. Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen.
Klein Ann. XIX. 588-594.

Hankel hat in seinen „Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen; ein Beitrag zur Feststellung des Begriffes der Function überhaupt" (Tübinger Universitätsprogramm 1870, wieder abgedruckt in Klein's Ann. Bd. XX. 63, cf. das vorhergehende Referat) eine Methode „Condensationsprincip der Singularitäten" gegeben, wonach sich aus Functionen $\varphi(x)$, die an einer gegebenen Stelle irgend ein singuläres Vorkommnis darbieten, andere Functionen herstellen lassen, welche die genannte Unstetigkeit an unendlich vielen Stellen annehmen, und zwar an einer überall dichten Mannigfaltigkeit von Stellen. Die von Hankel gegebene Methode besitzt aber einerseits nicht die wünschenswerte Einfachheit, weil die aufgestellte Function noch durch secundäre Vorkommnisse complicirt erscheint, andererseits nicht volle Allgemeinheit, insofern die Mannigfaltigkeit der Stellen, für welche die Singularität in der gebildeten Function auftritt, sich auf die Menge der rationalen Zahlen beschränkt, ohne dass in der vorliegenden Form eine Erweiterung auf beliebige abzählbare Zahlenmengen möglich erscheint.

Herr Cantor giebt nun ein Bildungsgesetz (eine absolut und gleichmässig convergente Reihe) für eine solche Function an, welche die singulären Stellen für eine ganz beliebige, nur abzählbare Mannigfaltigkeit von Zahlenwerten besitzt, und wo die einzelne Singularität für sich jedesmal durch ein Glied in der Reihenentwickelung der Function charakterisirt erscheint. Ist nämlich $\varphi(x)$ eine Function mit der einzigen singulären Stelle $x = 0$, und ist eine beliebige, abzählbare Menge von Stellen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$ gegeben, so setze man

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} c_\nu \cdot \varphi(x-\omega_\nu),$$

wo durch passende Wahl der Coefficienten stets die Reihe von $f(x)$ absolut und gleichmässig convergent herzustellen ist. Dadurch ist dann eine Function gebildet, welche an allen Stellen

$x = \omega_\nu$ die durch die Function $\varphi(x)$ vorgegebene Singularität besitzt und dabei im Allgemeinen sich sonst völlig regulär verhält. An diese allgemeine Formulirung reihen sich zwei specielle Beispiele, welche der Verfasser einer Mitteilung von Weierstrass verdankt. Einmal setze man $\varphi(x) = \sqrt[n]{x}$, so erhält man bei passender Wahl der Coefficienten c_ν in $f(x)$ eine Function, die jedesmal für $x = \omega_\nu$ einen unendlich grossen Differentialquotienten besitzt, sonst aber für alle endlichen Werte von x endlich und stetig ist. Zweitens sei

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2}\,x\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\log(x^2)\right),$$

wo unter $\log(x^2)$ der reelle Wert verstanden ist. Bildet man jetzt

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} c_\nu \varphi(x-\omega_\nu),$$

wo die $c_1, c_2, \dots, c_\nu, \dots$ positive Grössen sind, welche nur den Bedingungen, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} c_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} [\omega_\nu]\, c_\nu$$

convergente Reihen sind, unterliegen (und das lässt sich für ganz beliebige Werte ω_ν realisiren), so wird gezeigt, dass $f(x)$ eine stetige Function ist, welche ebenso wie $\varphi(x)$ gleichzeitig mit x wächst und abnimmt, und dass sie mit Ausnahme der Stellen ω_ν stets einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzt, für jene Stellen aber einen innerhalb gewisser angebbarer Grenzen unbestimmten Differentialquotienten. Dk.

W. Veltmann. Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function. Schlömilch Z. XXVII. 176-179.

W. Veltmann. Zur Theorie der Punktmengen. Schlömilch Z XXVII. 313-315.

Der Verfasser giebt in den vorliegenden Noten die ersten Beispiele für discontinuirliche Punktmengen, die in keinem noch so kleinen Intervalle überall dicht sind, und für welche doch die Summe der Umgebungen dieser Punkte sich nicht beliebig

verkleinern lässt, sondern einen endlichen Grenzwert besitzt. Die Beispiele betreffen einmal die Anordnung solcher Punktmengen auf einer Curve und weiter in der Ebene. Es wird dabei das Vorhandensein von Functionen einer complexen Variablen angedeutet, für welche die Punkte der Menge wesentliche Unstetigkeitsstellen sind. Hierauf beziehen sich noch weitere Untersuchungen des Verfassers über „Die Fourier'sche Reihe" gleichfalls im XXVII. Bande von Schlömilch's Z. (vgl. diese Fortschr. p. 185-187). Auf das Vorhandensein derartiger Punktmengen und weitere zugehörige Beispiele haben inzwischen auch Harnack (Klein Ann. XIX. p. 239) und Cantor (Klein Ann. XXI. p. 590) aufmerksam gemacht. Man vergl. ferner hierzu den Aufsatz von Harnack im XXIII. Bande von Klein's Ann. „Ueber die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige."

Dk.

H. Poincaré. Sur les transcendantes entières. C. R. XCV. 23-26.

Für die von Weierstrass gegebene Darstellung einer ganzen Function in Productform

$$e^{Q(x)} \, . \, \Pi \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right) . \, e^{P(x)} \right\}$$

hat Laguerre den Begriff des Geschlechtes eingeführt als den Grad n des höchsten Polynoms $P(x)$. Die Note bezweckt einzelne Eigenschaften der ganzen Functionen zu kennzeichnen, für welche der so eingeführte Geschlechtsbegriff in gewissem Sinne charakteristisch ist. Insbesondere werden die Sätze angeführt: Ist $F(x)$ eine ganze Function vom Geschlechte n und ist $\lim e^{\alpha x^{n+1}} = 0$, so ist auch $\lim F(x) \cdot e^{\alpha x^{n+1}} = 0$ bei beliebig kleinem $|\alpha|$. Daraus folgt, dass

$$\int_0^{\infty} e^{(xz)^{n+1}} \, . \, F(z) \, . \, dz$$

eine ganze Function Φ von $\frac{1}{x}$ repräsentirt, und weiter die Dar-

stellung der Function $F(x)$ in der Form

$$F(x) = \int \frac{\Phi(z)}{z} \cdot e^{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{z} - 1} dz,$$

wo $\Phi(z)$ jene ganze Function bezeichnet und das Integral um den Punkt $z = 0$ genommen ist. In etwas weiterer Ausführung sind diese Resultate seither im Bulletin de la société mathématique de France vol XI. (1883) veröffentlicht. Dk.

P. Cazzaniga. Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti. Brioschi Ann. (2) X. 279-290.

Der Verfasser leitet den allgemeinsten analytischen Ausdruck einer Function $f(z)$ von z her, welche an beliebig vorgeschriebenen Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ (welche nur so verteilt sind, dass in jedem endlichen Flächenstück nur eine endliche Anzahl solcher Stellen sind) vorgeschriebene Werte $f_1, f_2, f_3, \dots$ annimmt, und lässt dabei die Analogie mit der Lagrange'schen Interpolationsformel hervortreten, welche das analoge Problem für eine endliche Anzahl vorgegebener Stellen α durch eine rationale ganze Function löst. Die Construction der gemeinten Function gelingt sofort mit Hülfe der von Weierstrass zuerst principiell eingeführten Primfactoren. Setzt man

$$E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) . e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}$$

und

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right),$$

wo die ganzen Zahlen p_ν so gewählt sind, dass für jeden endlichen Wert von z die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} \right|$$

convergirt, bedeutet ferner $w_1(z)$ eine beliebige ganze Function von z, so ist durch den im Endlichen convergenten Ausdruck

$$\delta_{z,\alpha} = \frac{\varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) . e^{w_1(z)}}{\varphi'(\alpha_\nu) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) . e^{w_1(\alpha_\nu)}},$$

(wo der Accent die Differentiation nach z bedeutet) eine Function von z dargestellt, welche für $z = \alpha_\nu$ zu Eins, für $z = \alpha_1$, $\alpha_2, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu+1}, \dots$ zu Null wird. Multipliciren wir das δ_{z,α_ν} mit f_ν und bilden

$$\Sigma f_\nu \; \delta_{z,\alpha_\nu} = f(z),$$

so ist damit die eingangs verlangte Function $f(z)$ hergestellt. Für $w_1(z) = 0$ nimmt der Ausdruck eine Form an, welche unmittelbar der Lagrange'schen Interpolationsformel analog gebaut ist, und welche in die letztere übergeht, wenn man (was bei der dann endlichen Anzahl der α_i gestattet ist) alle p_ν zu Null macht.

Es folgt noch die Untersuchung der Convergenz des für $f(z)$ abgeleiteten Ausdrucks unter der Annahme $w_1(z) = 0$, und endlich die Entwickelung desselben in eine Potenzreihe nach z.

Dk.

K. Weierstrass. Recherches sur les fonctions $2r$-fois périodiques de r variables. Darb. Bull. (2) VI. 111-120.

Eine von Herrn J. Molk veröffentlichte Uebersetzung der Abhandlung Borchardt J. IXC. 1—8, über welche F. d. M. XII. (1880) 313 berichtet worden ist.

M.

G. Mittag-Leffler. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. C. R. XCIV. 414-416, 511-514, 713-715, 781-783, 938-941, 1040-1042, 1105-1108, 1163-1166; XCV. 335-336.

Fortsetzung der Untersuchungen des Herrn Verfassers über die Darstellung eindeutiger analytischer Functionen. Für das

Frühere vergl. F. d. M. XI. (1879) p. 264; XII. (1880) p. 311ff; XIII. (1881) p. 307. Nach der von Herrn Weierstrass (Berl. Ber. 1880) gegebenen Methode lässt sich folgender allgemeine Satz beweisen: „Sind $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine unendliche Reihe verschiedener Werte, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$$

ist, und

$$G_\nu(y) = \sum_m c_m^{(\nu)} y^m \qquad (\nu = 1, 2, \dots, \nu)$$

ganze, rationale oder transcendente Functionen, die für $y = 0$ verschwinden, so lässt sich immer eine analytische Function $F(x)$ bilden, die keine andern singulären Punkte als $a_1, a_2, a_3, \dots$ hat, und die so beschaffen ist, dass für jeden bestimmten Wert von ν die Differenz

$$F(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right),$$

wenn man $x = a_\nu$ setzt, einen endlichen und bestimmten Wert annimmt, so dass sich $F(x)$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ in der Form

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + P(x-a_\nu)$$

entwickeln lässt." Wenn nun in dieser Darstellung, welche die Form hat:

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) + G(x),$$

wo

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

und

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu \quad \text{für} \quad \left(\frac{x}{a_\nu}\right) < 1,$$

$F(x)$ eine bekannte Function ist, und man will sie durch eine Reihe von obiger Form ausdrücken, so handelt es sich darum, solche Zahlen m_ν zu finden, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ eindeutig convergent wird, und die Function $G(x)$ zu bestimmen. Es wird im Folgenden eine Formel entwickelt, welche ein Mittel bietet,

dieses Problem in einem sehr allgemeinen Falle zu lösen. Diese Formel wird noch verallgemeinert zu folgender:

$$F(x) = \overline{G}(x) + \sum_{\nu=0}^{n} \overline{F}_\nu(x)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int F(z) \left\{ \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \left[B_0 - B_1 \frac{x}{z} + \cdots + B_{m-1} \left(\frac{x}{z} \right)^{m-1} \right] \right\} dz,$$

wo die B willkürliche, von z und x unabhängige Grössen sind. Es folgen Anwendungen auf den Fall, wo

$$F(x) = R(y).r(x), \quad y = e^x,$$

worin r eine algebraische rationale Function von x, und $R(y)$ eine algebraische rationale Function von y ist, die für $y = 0$ und $y = \infty$ endlich bleibt. Unter Anderm ergeben sich daraus die Entwickelungen von $\pi \cot \pi x$, von denen Herr Gyldén bei der Störungsrechnung Gebrauch gemacht hat. Ferner wird

$$F(x) = f(x).r(x)$$

gesetzt, wo $f(x)$ eine endliche monogene Function mit einer endlichen Anzahl singulärer Punkte, und

$$f(x+2w) = \mu f(x), \quad f(x+2w') = \mu' f(x),$$

wo w, w' μ, μ' Constanten, $\frac{w'}{w}$ nicht reell, und $[\mu] < 1$, $[\mu'] < 1$.

Alsdann giebt der Herr Verfasser einen Auszug aus einer grösseren Abhandlung, die in den Berichten der Akademie zu Stockholm erschienen ist, und welche auf dem obigen allgemeinen Satze die Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Variabeln aufbaut. Auch wird dieses allgemeine Theorem angewendet auf das Studium der von Herrn Poincaré eingeführten analytischen Functionen. M.

F. Casorati. Aggiunte a recenti lavori dei sig[i]. Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. Brioschi Ann. (2) X. 261-278.

Ebenso wie Herr Mittag-Leffler selbst (s. d. obige Referat) verallgemeinert auch Herr Casorati den von ersterem gegebenen Gedanken, durch eine Summe passend modificirter rationaler Brüche eine eindeutige Function darzustellen, die wie jeder

dieser Brüche unendlich wird, dahin, dass er diese Darstellung auf eine Menge verschiedenartiger eindeutiger oder nicht eindeutiger Functionen anwendet, die sich in der Umgebung einer gegebenen Reihe von Punkten ebenso verhalten wie gewisse für jeden dieser Punkte gegebene, eindeutige oder nicht eindeutige, algebraische oder transcendente, Functionen. Insbesondere wendet er sie an auf die Darstellung eindeutiger Functionen mit einer unendlichen Anzahl solcher wesentlichen singulären Stellen, wie sie Herr Weierstrass in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" (Berl. Abh. 1876) in endlicher Anzahl betrachtet hat. Die gegebene Verallgemeinerung führt zu verschiedenen neuen Resultaten über die eindeutigen und nicht eindeutigen Functionen. M.

F. Casorati. Sulle funzioni analitiche. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 250-251.

Kurze Notiz über einen Bericht, den Herr Casorati dem Institut gegeben, und der die neuesten Untersuchungen des Verfassers, sowie der Herren Weierstrass und Mittag-Leffler über eindeutige Functionen betrifft. M.

S. Pincherle. Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 224-225.

Einige Sätze über die Entwickelung einer analytischen Function $F(x)$, die innerhalb eines Kreises um $x=0$ regulär ist, nach analytischen Functionen $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x), \dots$, die ebenfalls in einem Kreise um den Nullpunkt regulär sind, in der Form:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x),$$

ohne Beweis. M.

Ch. Hermite. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler, dans la théorie des fonctions. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler. Kronecker J. XCII. 145-155.

Der analytische Ausdruck der Function $D_x \log \Gamma(1+x)$ durch die Formel

$$C+\left[1-\frac{1}{1+x}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right]+\cdots$$

war das erste bekannte Beispiel, wo die divergente Reihe der einfachen Brüche sich in eine absolut convergente Reihe verwandelt, indem man jedem der Brüche eine Constante hinzufügt. Das zweite Beispiel bieten die elliptischen Functionen. In der Weierstrass'schen Formel

$$\frac{H'(x)}{H(x)}=\Sigma\left[\frac{1}{x+2mK+2m'iK'}-\frac{1}{2mK-2m'iK'}-\frac{x}{(2mK+2m'iK')^2}\right]$$

muss man ein Binom ersten Grades, anstatt der Constanten, wegnehmen. Herr Hermite giebt weitere Beispiele, wo von den einfachen Brüchen ein ganzes Polynom von endlichem Grade, das aber sonst ganz beliebig sein kann, weggenommen wird. Wenn

$$F(x)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)},$$

deren Pole $x=-n$, und die entsprechenden Residuen

$$R_n=\frac{(-1)^n(a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1\,.\,2\dots n},$$

so ist, wenn a positiv, die Reihe $\Sigma\frac{R_n}{x+n}$ convergent, und man hat:

$$F(x)=\Sigma\frac{R_n}{x+n};$$

aber wenn a negativ $=-\nu+\alpha$, wo ν ganz und α positiv, so lässt sich $F(x)$ in der Form schreiben:

$$F(x)=\Sigma\left[\frac{R_n}{x+n}+G_n(x)\right],$$

wie es das Theorem des Herrn Mittag-Leffler bedingt. Zu ähn-

dieser Brüche unendlich wird, dahin
auf eine Menge verschiedenartig[illegible] [illegible]x)
deutiger Functionen anwendet
gegebenen Reihe von Pun[illegible]
jeden dieser Punkte ge[illegible]
algebraische oder tran[illegible]
er sie an auf die [illegible]
unendlichen Anza[illegible]
sie Herr Weier[illegible]
eindeutigen [illegible]
licher Anz[illegible]
führt zu
und ni[illegible]

F

[illegible] Bemerkung über die Anwendung der Schnitte (coupures) in den bestimmten [illegible] der Euler'schen Integrale (s. Kronecker J. [illegible] VIII. 1881) 307 ff.).

M.

[illegible] Sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions. C. R. XCIV. 907-909.

Es ist bekannt, dass jede Function $\varphi(x)$, deren Werte zwischen den Grenzen $+1$ und -1 der Variabeln gegeben sind, sich mit Hülfe der Legendre'schen Polynome in eine *Reihe* von der Form

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 X_1 + \cdots + A_n X_n + \cdots$$

entwickeln lässt. Ein wichtiges Theorem über diese Entwickelungen ist von G. Plarr hergeleitet worden (C. R. XLIV. 1857), nämlich: „Wenn man die Reihe nach den n ersten *Gliedern* abbricht, so erhält man ein Polynom n^{ten} Grades, so dass das mittlere Quadrat der Differenzen zwischen der Function und dem Polynom, in den Grenzen $+1$ und -1, kleiner ist als für alle andern Polynome desselben Grades".

Diese Eigenschaft wird hier auf eine grosse Zahl anderer Functionen ausgedehnt, von denen die Legendre'schen nur ein besonderer Fall sind; und es wird gezeigt, wie man sehr einfach den Wert des mittleren Quadrates der Differenz zwischen der Function und der abgebrochenen Reihe berechnen kann.

M.

Hugoniot. Sur des fonctions d'une seule variable analogues aux polynômes de Legendre. C. R. XCV. 983-986.

In der obigen Note waren Functionen $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ gebildet, die den Bedingungen

$$\int_\alpha^\beta Z_k Z_{k'} dx = 0$$

, k und k' verschiedene Werte haben, genügten. ...en wird eine ähnliche Reihe von Functionen ge- ...ennt man nämlich $Z_0, Z_1, \dots Z_{n-1}$, und will man Z_n finden, genügt dieses folgenden Gleichungen:

$$\int_\alpha^\beta Z_n Z_0 dx = 0, \quad \int_0^\beta Z_n Z_1 dx = 0, \dots \quad \int_\alpha^\beta Z_n Z_{n-1} dx = 0.$$

Man kann nun Z_0 willkürlich festsetzen und nach und nach die übrigen Z finden. Es wird alsdann der Fall betrachtet, wo alle Z von der Form

$$Z_n = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)$$

sind. Dann lässt sich eine Function $\varphi(x)$, deren Werte zwischen α und β gegeben sind, mit Hülfe der Z in eine Reihe der Functionen $f_0, f_1, \dots$ entwickeln. Für specielle Fälle stimmt Z_n mit dem n^{ten} Legendre'schen Polynom überein. M.

P. Cazzaniga. Sopra una formola di Cauchy, concernente lo sviluppo di funzioni in prodotti infiniti.

Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 273-279.

Es sei $w(z)$ eine monodrome stetige und endliche Function, zugleich mit ihrer Ableitung $w'(z)$, innerhalb eines Bereiches S mit dem Umfang s, ausgenommen die Punkte $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$, in denen sie unendlich von den Ordnungen $n_1, n_2, \dots, n_\nu$ resp. wird, und es verschwinde $w(z)$ in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ von den Ordnungen $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ resp., und endlich seien die Werte von $w(z)$ und $w'(z)$ in irgend einem Punkte γ des Bereiches S gegeben, der natürlich von den β verschieden sein muss. Alsdann lässt sich $w(z)$ durch unendliche Producte in folgender Form ausdrücken:

$$w(z) = w(\gamma) \frac{\Pi \left\{ \varepsilon\left(\frac{z}{\alpha_h}, p_h\right)\right\}^{m_h}}{\Pi \left\{ \varepsilon\left(\frac{\gamma}{\alpha_h}, p_h\right)\right\}^{m_h}} \cdot \frac{\Pi \left\{ \varepsilon\left(\frac{\gamma}{\beta_k}, q_k\right)\right\}^{n_k}}{\Pi \left\{ \varepsilon\left(\frac{z}{\beta_k}, q_k\right)\right\}^{n_k}} \cdot e^{\int_\gamma U(z,\gamma)\, dz}$$

$$(h, k = 1, 2, 3, \dots),$$

wo

$$\varepsilon\left(\frac{z}{c}, r\right) = \left(1-\frac{z}{c}\right) e^{\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \frac{1}{\varrho}\left(\frac{z}{c}\right)^{\varrho}}$$

gesetzt ist. Es ist dies eine Verallgemeinerung der Formel von Cauchy. M.

P. APPELL. Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique. C. XCV. 624-626.

Verallgemeinerung einer früheren Untersuchung (C. R. XCIV. 1238). Die beiden bekannten Theoreme von Cauchy, erstens, dass eine ausserhalb einer geschlossenen Curve holomorphe Function dargestellt wird durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi).d\xi}{x-\xi},$$

das Integral genommen über die Grenzcurve, und zweitens, dass eine ausserhalb eines Kreises vom Mittelpunkt a holomorphe Function $f(x)$ dargestellt wird durch eine convergente Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} A_\nu \left[\frac{d^\nu}{d\xi^\nu}\left(\frac{1}{x-\xi}\right)\right]_{\xi=a},$$

welche sich beide auf die Ebene beziehen, werden ausgedehnt auf die mehrblättrige Riemann'sche Verzweigungsfläche, wobei an Stelle von $\frac{1}{x-\xi}$ das Integral 2ter Gattung $Z(\xi,\eta)$ mit dem Pol (ξ, η) tritt. H. St.

P. APPELL. Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique etc. C. R. XCV. 714-717.

Erweiterung der Untersuchung C. R. XCI. 972 (s. F. d. M. XII. (1880) 250). Definirt man in der durch die algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ bestimmten Riemann'schen Fläche eine

Function $\Phi(x, y)$ derart, dass sie nur in den Punkten

$$(\xi_1, \eta_1), \ (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$$

Pole und in denselben die Residuen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hat und beim Ueberschreiten der $2p$ Querschnitte die $2p$ Multiplicatoren $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p}$ annimmt, so bestehen zwischen den Polen und den Residuen $(p-1)$ Relationen der Form

$$A_1 \omega_s(\xi_1 \eta_1) + \cdots + A_n \omega_s(\xi_n \eta_n) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, p-1),$$

wo die ω gewisse aus algebraischen Functionen und Thetafunctionen zusammengesetzte Ausdrücke darstellen, deren Coefficienten von den Multiplicatoren μ abhängen. H. St.

P. Appell. Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). C. R. XCIV. 700-703.

Auszug aus einer Abhandlung, welche das Studium der eindeutigen Functionen eines analytischen Punktes (x, y) zum Gegenstande hat, wo y mit x durch eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ verbunden ist, die eine Curve m^{ter} Ordnung und p^{ter} Gattung darstellt. Auf diese Functionen werden die Theoreme von Weierstrass und Mittag-Leffler für die eindeutigen Functionen einer Variabeln x ausgedehnt. Zunächst werden Functionen mit einer endlichen Zahl singulärer Punkte, welche in Pole und in wesentlich singuläre Punkte unterschieden werden, in eine Doppelreihe von der Form

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A^{(k)}}{(x-a_k)^\nu}$$

entwickelt. Alsdann wird mit Hülfe der Function $\theta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ von p Variabeln mit den normalen Perioden der Integrale $u^{(i)}(x, y)$ der allgemeinste Ausdruck einer eindeutigen Function mit einem wesentlich singulären Punkte (a, b) gebildet. Zuletzt wird für Functionen, welche eine unendliche Reihe singulärer Punkte haben, eine Verallgemeinerung des Mittag-Leffler'schen Theorems gegeben. M.

P. APPELL. Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. C. R. XCIV. 1238-1240.

Diese Entwickelungen gelten für alle Punkte innerhalb eines Bereiches, der von n Kreisbögen C_1, $C_2, \dots$ begrenzt wird, die ihre Convexität gegen das Innere des Bereiches kehren, mit den Mittelpunkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Die Darstellung durch eine Summe rationaler Brüche hat die Form:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{(x-\alpha_k)^\nu},$$

wo

$$A_\nu^{(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_k} (z-\alpha_k)^{\nu-1} f(z)\, dz.$$

Es folgt die Entwickelung einer Function in eine Reihe doppelt-periodischer Functionen und drittens in eine Reihe einfach-periodischer Functionen. M.

P. APPELL. Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels. C. R. XCIV. 936-938.

Entwickelung einer doppelt-periodischen Function, welche in dem Bereiche zwischen einem Kreise um das feste Centrum a und dem Umfang des Periodenparallelogramms für die Perioden ω, ω' holomorph ist, in der Form:

$$f(x) = \frac{A_0}{2\pi i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n Z^{(n)}(a-x), \quad Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du},$$

$$2\pi i A_n = -\frac{1}{1.2\dots n} \int\limits_{C} (u-a)^n f'(u) du, \quad Z^{(n)}(u) = \frac{d^n Z(u)}{du^n}.$$

Es wird das Theorem von Mittag-Leffler auf diese eindeutigen doppelt-periodischen Functionen mit wesentlich singulären Punkten ausgedehnt. Eine eindeutige doppelt-periodische Function $\Phi(x)$, welche in den Punkten $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ verschwindet, keine Pole hat und den einen wesentlichen singulären Punkt a

besitzt, lässt sich darstellen in der Form:

$$\Phi(x) = A \prod_{\nu=1}^{\nu=x} \frac{\theta_1(x-a_\nu)}{\theta_1(x-a)} e^{(a_\nu-a)Z(x-a)} \cdot e^{\sum_{m=1}^{m=m_\nu} \frac{(a-a_\nu)^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} Z^{(m)}(x-a)},$$

wo die ganzen m_ν passend zu wählen sind. M.

G. Halphén. Sur une série pour développer les fonctions d'une variable. C. R. XCIV. 629-631.

Die schon von Tchébycheff (Mélanges math. et astr. II. 182, Pétersbourg 1859) und Laguerre (Bull. S. M. F. VII. 72, s. F. d. M. XI. (1879) 214) angewendeten und auch von Abel (Oeuvres II. 284) gekannten Polynome

$$P_n(x) = \frac{e^x}{1.2\ldots n} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$
$$= 1 - \frac{n}{1^2}x + \frac{n(n-1)}{(1.2)^2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(1.2.3)^2}x^3 + \cdots$$

werden benutzt zur Entwickelung einer Function in der Form

$$f(x) = = A_1 + A_2 P_1\left(\frac{x}{2\beta}\right) + A_3 P_2\left(\frac{x}{3\beta}\right) + \cdots + A_n P_{n-1}\left(\frac{x}{n\beta}\right) + \cdots,$$

wo β willkürlich und die A_n von x unabhängig sind. Es ist

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \int_0^\infty f(n\beta + x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})dx.$$

M.

E. Picard. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires. C. R. XCIV. 579-582.

Die elliptische Modulfunction bietet das erste Beispiel für eine solche eindeutige Function einer Variabeln, die durch eine Gruppe von unendlich vielen linearen Substitutionen nicht geändert wird. Die Theorie der Abel'schen Functionen bietet hierzu kein Analogon. Herr Picard hat sich nun die Aufgabe gestellt, eindeutige Functionen zweier Variabeln zu finden, die den

Modulfunctionen analog sind. Bei Betrachtung der algebraischen Relation

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

ist der Herr Verfasser zu solchen Functionen gelangt (C. R. XCIII. 835; vergl. F. d. M. XIII. (1881) p. 375). Im Vorliegenden wird eine Ungleichung aufgestellt, der die Werte der Variabeln u und v der eindeutigen Functionen genügen müssen, und die Gruppe der linearen Substitutionen entwickelt, welche diese Functionen unverändert lassen. M.

E. Picard. Sur les fonctions uniformes affectées de de coupures. C. R. XCIV. 1405-1407.

Herr Weierstrass hat in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" die analytische Form jeder Function gegeben, die eine endliche Anzahl wesentlicher singulärer Punkte und eine beliebige Anzahl von Polen hat. Herr Picard giebt zwei Sätze, mit deren Hülfe diese Theorie, mit einfachen Veränderungen, auf solche eindeutige Functionen ausgedehnt werden kann, die eine endliche Zahl von Schnitten (Unstetigkeitslinien) haben, die als gerade Linien vorausgesetzt werden. Es zeigt sich, dass jede solche Function eine Summe von n Functionen ist, die nur eine solche Unstetigkeitslinie haben. Das zweite Theorem betrifft die Zerlegung in primäre Factoren M.

E. Goursat. Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes. C. R. XCIV. 715-718.

Die hier betrachteten eindeutigen Functionen haben die Form

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{1-\dfrac{x}{a_\nu}},$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ eine unendliche Reihe imaginärer aber willkürlicher Grössen und $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu, \ldots$ eine zweite Reihe, in der kein Glied null und für die die Summe Σ mod c_ν einen

endlichen Wert hat. Für jeden Punkt x_0 innerhalb eines Bereiches A der Ebene, der keinen Punkt a_ν enthält, lässt sich $F(x)$ in eine nach steigenden Potenzen von $(x-x_0)$ fortschreitende Reihe $P(x-x_0)$ entwickeln. Wenn ein um x_0 geschlagener Kreis einen Punkt a_ν auf seiner Peripherie enthält, so ist es der Convergenzkreis für die Reihe $P(x-x_0)$. M.

O. Hölder. Beweis des Satzes, dass eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Wert beliebig nahe kommt. Klein Ann. XX. 138-143.

Eine Function $f(x)$ sei als Function einer complexen Variabeln eindeutig bestimmt in jedem Punkte eines Gebietes F mit Ausnahme eines darin gelegenen Punktes a, und $f(x)$ sei zugleich mit $f'(x)$ im ganzen Gebiete ausser a stetig. Alsdann können folgende drei Fälle eintreten: 1) Es existirt eine Potenzreihe von $x-a$, so dass in der Umgebung von a

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots;$$

2) f kann in der Umgebung von a nach positiven und negativen Potenzen von $x-a$ entwickelt werden, wobei die negativen in endlicher Form auftreten:

$$f(x) = (x-a)^{-n}\{b'_0 + b'_1(x-a) + \cdots\}, \qquad n \text{ ganz.};$$

3) $f(x)$ wird in unendlicher Nähe von a sowohl beliebig gross als auch beliebig klein. Dies wird mit Hülfe Weierstrass'scher Principien bewiesen. Als Beispiele dienen $e^{\frac{1}{x}}$, $\sin\frac{1}{x}$ und $\cos\frac{1}{x}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ und $\operatorname{cotg}\frac{1}{x}$. Ist $\varphi(x)$ eine eindeutige analytische Function mit einer wesentlich singulären Stelle im Unendlichen und doppelt-periodisch, so nimmt $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ in jedem den Nullpunkt enthaltenden Gebiet jeden Wert unendlich oft an.

M.

Modulfunctionen analog sind. Bei Betr… …s fuchsiens. Acta Math.
Relation

$$z^3 = t(t-1)…$$

ist der Herr Verfasser zu solc… …st die erste unter einer Reihe
835; vergl. F. d. M. XIII … in welchen der Verfasser seine
eine Ungleichung aufges… …ige Functionen mit linearen Trans-
der eindeutigen Fun… …legt, deren wesentliche Principien und
der linearen Subst… zunächst in den Bänden XCII-XCIV. der
unverändert lass… das Referat in Bd. XIII. (1881) dieser Fort-
… und in einem zusammenfassenden Aufsatze in
… XIV. p. 553ff. entwickelt hat.

E. Picard … linearer Transformationen einer Grösse z,
de… die Gruppen

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

de… sind zunächst in continuirliche (solche, unter welchen sich unendlich kleine Substitutionen finden) und discontuirliche (mit nur endlichen Substitutionen) zu trennen. Unter den letzteren (deren weitere Klassification in den späteren Arbeiten folgt) sondert der Verfasser hier die Gruppen mit reellen Coefficienten ab. Sie haben die Eigenschaft, dass bei ihren Substitutionen die Axe der reellen Zahlen in sich übergeht. Unmittelbar mit diesen sind die Gruppen verbunden, welche aus den eben betrachteten durch eine „Transformation mit irgend einer bestimmten Substitution $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$" hervorgehen, also die Gruppen, für welche sich die einzelnen Substitutionen in der Form schreiben lassen:

$$\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\; \frac{\alpha\cdot\frac{az+b}{cz+d}+\beta}{\gamma\cdot\frac{az+b}{cz+d}+\delta}\right),$$

wo α, β, γ, δ ganz beliebige, die a, b, c, d wieder reelle Zahlen bedeuten. Bei den Substitutionen dieser Gruppe geht derjenige Kreis in der z-Ebene in sich über, der aus der Axe der reellen Zahlen durch die Transformation mit der Substitution $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ entsteht. Es stimmen selbstverständlich diese letzteren Gruppen

nit den Gruppen mit reellen Substitutionen überein, llein zur Betrachtung gezogen werden. Die hier- Klasse von discontinuirlichen Gruppen ist es, als „groupes fuchsiens" bezeichnet, während er gemeinsten discontinuirlichen Gruppen linearer Sub- en die Bezeichnung als „groupes kleinéens" gewählt hat.

Der Ausgangspunkt, den der Verfasser für das Studium unserer Gruppen zu Grunde legt, ist die geometrische Deutung der linearen Substitutionen, für welche zunächst die allgemein bekannten Sätze entwickelt werden. Mit Bezug auf die Gruppen reeller Substitutionen seien dann irgend zwei Figuren in der z-Ebene als „congruent" bezeichnet, wenn sie durch eine reelle lineare Substitution in einander übergeführt werden können. Diese Definition bringt für die z-Ebene die Einführung einer nichteuklidischen Massbestimmung mit sich, in welcher die Bogenlänge ($z = x + iy$ gesetzt) durch das Integral

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{y},$$

der Flächeninhalt durch

$$\int \frac{dx\,dy}{y^2}$$

ausgedrückt wird. Die Entfernung zweier Punkte wird dabei längs des Kreisbogens gemessen, der, durch die beiden Punkte gehend, auf der x-Axe senkrecht steht. Die Bedingung, nach welcher zwei Punkte α, β in zwei andere γ, δ übergeführt werden können, ist dann die der „Congruenz" der entsprechenden Kreisbögen. Berücksichtigt man, dass bei Ueberführung von α, β nach γ, δ gleichzeitig die zu α, β conjugirten Punkte α', β' in die entsprechenden Punkte γ', δ' übergehen, so lautet diese Bedingung:

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'} \cdot \frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\delta'} \cdot \frac{\delta-\delta'}{\delta-\gamma'}.$$

Die Bestimmung der Winkel bleibt in unserer Geometrie in der gewöhnlichen Form enthalten. Es mag dabei noch die Bemerkung eingeschaltet werden, dass die Formulirung unserer Massbe-

22*

stimmung sich am einfachsten übersehen lässt, wenn man, anstatt die Variable z in der Ebene zu deuten, eine Kugelfläche mit dem Aequator als Axe der reellen Zahlen zu Hülfe nimmt. Ueberdies gelangt man durch eine Orthogonalprojection der Kugel auf die Aequatorialebene dort zu der gewöhnlich als nichteuklidisch bezeichneten Massbestimmung mit dem Aequator als „Fundamentalkreis" und hat in dieser so herbeigeführten Versinnlichung der linearen Transformationen in der Ebene eine in den einschlägigen Arbeiten von Klein vielfach angewandte Darstellung vor sich.

Gestützt auf diese geometrischen Formulirungen, und die Existenz discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen vorausgesetzt, hat man nun den Satz, dass jede solche Gruppe Anlass zu einer regulären Gebietseinteilung der complexen Ebene oder eines Teiles derselben giebt, d. h. zu einer Einteilung in zu einander (mit Bezug auf reelle Substitutionen) „congruente" Gebiete, welche jedesmal nur solche Punkte enthalten, die nicht durch eine Substitution der Gruppe aus einander hervorgehen. Dabei entspricht jeder Substitution der Gruppe eindeutig ein bestimmtes Gebiet der Einteilung. Umgekehrt ist durch jede derartige Gebietseinteilung eine Fuchs'sche Gruppe bestimmt, so dass die Frage nach allen diesen Gruppen gleichbedeutend ist mit der geometrischen nach allen so definirten regulären Einteilungen der z-Ebene. In der Folge handelt es sich eben um die Lösung dieses letzteren Problems, aus der geometrischen Formulirung heraus die zugehörigen Gruppen linearer Transformationen zu finden.

Zu dem Ende werden (in § 3) zunächst die möglichen Gestalten der Eckpunkte und Kanten einer solchen Einteilung klassificirt. Berücksichtigt man, dass sich unsere Gebietseinteilungen bis an die x-Axe fortsetzen lassen, so hat man zunächst für die Kanten der Einteilung zwei Fälle: a) Kanten erster Art, die von der x-Axe verschieden sind, b) Kanten zweiter Art, die ein Stück der x-Axe bilden. Weiter klassificiren sich die Eckpunkte a) in solche ausserhalb der x-Axe, b) in solche auf der x-Axe, und diese letzteren sind wieder zu trennen in solche, in

denen zwei Kanten erster Art, und in solche, in denen eine Kante erster Art und eine Kante zweiter Art einlaufen. Die Kanten erster Art eines „Ausgangspolygons“ der Einteilung müssen dabei stets paarweise durch Substitutionen der Gruppe einander zugeordnet sein. Die Substitutionen, welche die sämmtlichen Kanten erster Art des Ausgangspolygons einander zuordnen, bilden dabei das System der „erzeugenden Substitutionen“ der Gruppe; sie mögen in der Form

$$(z, f_i(z))$$

geschrieben sein. Zwischen diesen erzeugenden Substitutionen besteht eine Reihe von Relationen der Form

$$z = f_{a_1}(f_{a_2}(\cdots f_{a_\nu}(z)\cdots),$$

die man erhält, wenn man alle Ecken des Ausgangsgebietes mit kleinen geschlossenen Wegen umgiebt und diese Wege durch die entsprechenden Substitutionen (nach den dabei durchlaufenen Gebieten) charakterisirt. Die Bemerkung, dass zwar durch eine gegebene reguläre Einleitung die zugehörige Gruppe völlig bestimmt, nicht aber umgekehrt durch eine gegebene Gruppe reeller linearer Substitutionen die zugehörige Einteilung, lässt gewisse Normalformen einer solchen Einteilung formuliren, die den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Man zeigt nämlich (§ 4), dass die Einteilung stets, und noch auf unendlich viele Weisen, in der Form hergestellt werden kann, dass die einzelnen Gebiete von Kreisbögen begrenzt erscheinen, die auf der x-Axe senkrecht stehen. Es wird nun (in § 5) eine erste Klassification der verschiedenen Arten von Gebietseinteilungen getroffen, und zwar nach der Anordnung der einzelnen Eckpunkte derselben zu „Cyklen“. Der Verfasser definirt nämlich einen „Cyklus von Eckpunkten“ folgendermassen: Man gehe von einem Eckpunkte der Einteilung, bezeichne (den Rand des betreffenden Ausgangspolygons in einem bestimmten Sinne durchlaufend) die anstossende Kante, dann gehe man zu der ihr in diesem Polygone zugeordneten Kante (sofern dieselbe erster Art ist), dann zum angrenzenden Eckpunkt, zur hier anstossenden Kante, zu deren conjugirten, u. s. w. Schliesslich kommt man entweder zu einer Kante zweiter Art, wo dann der Cyklus der durch-

laufenen Eckpunkte, mit zwei Kanten zweiter Art abbrechend, als offen bezeichnet wird, oder aber man kommt wieder zu dem Eckpunkte zurück, von dem man ausgegangen, „geschlossener Cyklus“. Je nachdem nun die durchlaufenen Eckpunkte nur der Categorie 1) (conf. oben), oder der Categorie 2), oder endlich den Categorien 2) und 3) angehören, spricht man von Cyklen erster Art (für welche sämmtliche Eckpunkte ausserhalb der x-Axe liegen), von Cyklen zweiter und dritter Art. Die Cyklen erster und die zweiter Art sind geschlossene, die dritter Art sind offene Cyklen. Nach dieser Einteilung lassen sich die möglichen Formen des Ausgangspolygons für unsere Gruppen in sieben Familien einordnen, je nachdem die Ecken dieses Polygons nur Cyklen der ersten, der zweiten, der dritten, der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, der dritten und ersten oder endlich allen drei Categorien angehören. Die Mannigfaltigkeit der hiermit bezeichneten Formen, sowie noch eine weitere Untergliederung, auf die wir hier nicht näher eingehen, ist an einzelnen Beispielen erläutert, die auch für die folgenden Untersuchungen wieder herangezogen werden.

Nun lassen sich zwei nothwendige Bedingungen für die Möglichkeit einer regulären Einteilung in unserem oben definirten Sinne angeben. Sie lauten: 1) Es müssen je zwei einander zugeordnete Kanten des Ausgangspolygons „congruent“ sein. 2) Es muss die Winkelsumme derjenigen Eckpunkte des Ausgangspolygons, die zu einem Cyklus erster Art gehören, ein aliquoter Teil von 2π sein. In § 7 wird nun gezeigt, dass diese Bedingungen auch hinreichend für die Existenz solcher Einteilungen sind, und damit ist gleichzeitig der Existenzbeweis für die Fuchs'schen Gruppen geliefert. Der Beweis wird durch eine detaillirte geometrische Untersuchung und Discussion der verschiedenen gestaltlichen Möglichkeiten erbracht. Es schliessen sich Beispiele an, in welchen insbesondere der durch die Arbeiten von Schwarz und Klein zuerst betonten „regulär-symmetrischen“ Einteilungen Erwähnung getan wird.

Eine weitere Klassification der verschiedenen regulären Gebietseinteilungen, die in § 8 ausgeführt ist, und welche jedenfalls

eine viel principiellere Bedeutung besitzt, als die vorhergenannte Klassification nach Familien, ist die nach dem Geschlechte, deren erste Formulirung von Klein herrührt. Denkt man sich nämlich die paarweise Zuordnung der Kanten erster Art im Ausgangspolygon durch Zusammenbiegen der Ränder wirklich ausgeführt, so entsteht eine Fläche, die jetzt bis auf die von den Kanten zweiter Art gebildeten Oeffnungen geschlossen ist, und deren Geschlecht sich sofort aus den bekannten Formeln herleitet.

Nachdem in § 9 die vorhin erwähnte Möglichkeit der Deformation der Gebietseinteilung auch an Beispielen erläutert und Familie, Geschlecht und gewisse Eigenschaften der Cyklen als unveränderlich bei solchen Deformationen erwiesen sind, geht der Verfasser in § 10 auf den Isomorphismus der Gruppen näher ein. Zwei Gruppen können nämlich dann und nur dann auf einander isomorph bezogen werden, wenn die Zahl ihrer erzeugenden Substitutionen für beide dieselbe ist, und ausserdem die zwischen jenen statthabenden Relationen für beide Gruppen übereinstimmen. Insofern nun die Anzahl jener Fundamentalrelationen mit der Zahl der Cyklen erster Art des Ausgangspolygons übereinstimmt, kann man sofort gewisse Schlüsse auf die Möglichkeit einer isomorphen Beziehung machen, wobei insbesondere die Gruppen hervorgehoben werden, für welche überhaupt keine Relationen existiren.

Nun handelt es sich noch darum (§ 11), nachdem gezeigt ist, wie aus den geometrischen Daten des Ausgangspolygons sofort die linearen Substitutionen $z = f_i(z)$ gebildet werden können, die Charakteristik aller möglichen Ausgangspolygone einer bestimmten Familie und einer bestimmten Anzahl erzeugender Substitutionen zu bilden. Der zunächst geometrisch aus den möglichen Gestalten der Fundamentalpolygone erschlossene Charakter giebt die Bedingungen (Ungleichungen) für die Coefficienten der linearen Substitutionen, welche als die erzeugenden Substitutionen der entsprechenden linearen Gruppe auftreten. Die Durchführung dieser Aufgabe ist nicht in abstracto gegeben, sondern an eine Reihe einzelner Beispiele angeschlossen, welche die auftretenden Möglichkeiten zu behandeln bestimmt sind.

laufenen Eckpunkte
als offen bezeichn
Eckpunkte zurüc
Cyklus". Je na
Categorie 1)
lich den Ca
Cyklen ers
der x-Ax
Cyklen
Art sir
mögli
sieb
go
u

... eine kurze Zusammen-
... des Gegenstandes.

Dk.

... Sur les groupes kleinéens. C. R. XCIII. 44-46.

... ist inzwischen ausführlich in den „Acta Mathe-
... erschienen. Das Referat wird daher verschoben.

Dk.

H. POINCARÉ. Sur les fonctions fuchsiennes. C. R. XCV. 626-629.

Note zur Theorie der eindentigen Functionen mit linearen Transformationen in sich, welche inzwischen Acta mat. I. 3 in eine Gesammtdarstellung der „Théorie des fonctions fuchsiennes" eingeordnet ist, und über welche in diesem Zusammenhange referirt wird. (Vergl. F. d. M. XIII. (1881) p. 247).

Dk.

H. POINCARÉ. Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. Klein Ann. XIX 553-565.

Die vorliegende Abhandlung fasst die in den C. R. XCII., XCIII. in kurzen Noten veröffentlichten Untersuchungen des Verfassers über die Theorie der eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich präcis zusammen. Man vergl. hierüber das Referat in diesem Jahrbuche XIII. (1881) 247. Ein erstes Referat über diese inzwischen in ausführlicher Form in den „Act. mat." veröffentlichten Untersuchungen vergl. in gegenwärtigem Bande der Fortschritte p. 338.

Dk.

H. POINCARÉ. Sur les fonctions uniformes, qui se reproduisent par des substitutions linéaires. Klein Ann. XX. 52-53.

..k auf einige von Herrn Klein im Anschluss an die ..aré'sche Arbeit „Sur les fonctions uniformes etc.“ in Klein ..nn. Bd. XIX. (siehe das folgende Referat) gemachte Bemerkungen, die von Poincaré in die Theorie der eindeutigen Functionen eingeführte Nomenclatur betreffend. Dk.

F. Klein. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. Klein Ann. XIX. 565-560, XX. 49-52.

A. Hurwitz. Ueber eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden. Klein Ann. XX. 125-135.

O. Rausenberger. Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden. Klein Ann. XX. 187-213.

F. Schottky. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. Klein Ann. XX. 293-300.

Die Klasse von Functionen, auf welche sich die vorstehend genannten Arbeiten beziehen, hat neuerdings das Interesse der Mathematiker vielfach in Anspruch genommen. Dieselbe findet ihren Ursprung in folgender Fragestellung: Man bezeichne mit

$$S_1(\eta) = \frac{\alpha_1\eta+\beta_1}{\gamma_1\eta+\delta_1}, \quad S_2(\eta) = \frac{\alpha_2\eta+\beta_2}{\gamma_2\eta+\delta_2}, \dots$$

eine Reihe von linearen Transformationen der Veränderlichen η und frage nun nach solchen eindeutigen Functionen $\varphi(\eta)$, welche den Gleichungen

$$\varphi(S_i(\eta)) = \varphi(\eta) \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

unabhängig von dem Werte des Argumentes η Genüge leisten, welche übrigens aber ihren Wert im Allgemeinen verändern, wenn η einer nicht in der Reihe $S_1(\eta)$, $S_2(\eta), \dots$ enthaltenen linearen Transformation unterworfen wird. Man erkennt leicht, dass nicht zu jedem willkürlich angenommenen Systeme von Transformationen $S_1(\eta)$, $S_2(\eta), \dots$ Functionen $\varphi(\eta)$ gehören. Es

ergiebt sich sofort als notwendige Bedingung, dass die Transformationen $S_1(\eta)$, $S_2(\eta)$,... eine „Gruppe“ bilden, d. h., dass die Zusammensetzung irgend zweier Transformationen $S_i(\eta)$, $S_k(\eta)$ wieder eine Transformation $S_l(\eta)$ der Reihe ergiebt, in Zeichen: $S_i(S_k(\eta)) = S_l(\eta)$.

Diese Bedingung ist aber noch nicht hinreichend. Eine Gruppe möge „zulässig“ oder „unzulässig“ genannt werden, je nachdem zu ihr Functionen $\varphi(\eta)$ gehören oder nicht. Dann kann man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zulässigkeit einer Gruppe angeben, wenn man sich der geometrischen Repräsentation der Veränderlichen η durch die Punkte einer Ebene oder einer Kugel bedient. Es muss nämlich möglich sein, die Ebene (Kugel) η oder einen zusammenhängenden Teil derselben derart in lückenlos neben einander liegende Parcellen P, P_1, P_2, ... zu zerlegen, dass die Punkte der Parcelle P durch die Transformation S_i in die Punkte der Parcelle P_i übergehen. Die Betrachtung der unmittelbar an die Parcelle P anstossenden Parcellen lehrt, dass die Begrenzungslinien von P paarweise zusammengehören, und dass jede aus der zugehörigen durch eine Transformation S hervorgeht. Diese, die zusammengehörigen Ränder von P vereinigenden Transformationen können als erzeugende oder Fundamental-Transformationen der Gruppe bezeichnet werden, indem die Zusammensetzung derselben, wie leicht zu sehen, notwendig zu allen Transformationen der Gruppe führt. Vgl. das obige Referat p. 338.

Geht man umgekehrt von irgend einem vollständig begrenzten Gebiete P aus, dessen Begrenzungslinien paarweise durch lineare Transformationen verbunden sind, so entstehen aus P durch wiederholte Anwendung dieser Transformationen eine Reihe von Parcellen P_1, P_2, ... Die aus der Zusammensetzung dieser Transformationen hervorgehende Gruppe ist dann offenbar zulässig, falls die Parcellen P, P_1, P_2,... die η-Ebene (Kugel) oder einen Teil derselben einfach und lückenlos überdecken. Diese umgekehrte Betrachtung bildet im Wesentlichen die Grundlage der ersten drei Abhandlungen.

Die erste Note von Herrn Klein bezieht sich auf den Fall, wo die Ausgangsparcelle P von $2p\,(p>1)$ geschlossenen, sich selbst

und einander nicht schneidenden Curven, welche unbeschadet der Allgemeinheit als Kreise angenommen werden können, begrenzt ist. Diese Curven gehören paarweise zusammen, und zwar geht jede aus der zugehörenden durch eine lineare Transformation hervor. Die Zulässigkeit der von diesen Transformationen erzeugten Gruppe ist geometrisch evident. Das Hauptresultat, zu welchem Herr Klein in seiner Note gelangt, lässt sich nun folgendermassen formuliren: „Die $2p$ Begrenzungscurven der Parcelle P lassen sich so bestimmen, dass zwei zu der entstehenden Gruppe gehörende Functionen $w(\eta)$ und $z(\eta)$ existiren, welche eine beliebig vorgelegte algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ vom Geschlechte p identisch befriedigen.“ Die genannten Functionen besitzen unendlich viele wesentlich singuläre Stellen, welche discret über die η-Ebene (Kugel) zerstreut liegen. Eine besondere Berücksichtigung erfahren die algebraischen Gleichungen mit reellen Coefficienten.

Die zweite Note enthält ein ähnliches Theorem. Die Parcellen-Einteilung, welche hier in Betracht kommt, bezieht sich jedoch nur auf eine Kalotte der η-Kugel. Der Begrenzungskreis der Kalotte trägt unendlich viele überall unendlich dicht liegende singuläre Punkte der zugehörigen Functionen, und bildet daher für die letzteren eine natürliche Grenze.

Die dritte Arbeit (deren Abfassung in eine frühere Zeit fällt) beschäftigt sich mit specielleren hierher gehörigen Functionen. Sie knüpft an das Princip der Symmetrie des Herrn Schwarz an, welches zu einer unendlichen Zahl von zulässigen Gruppen hinleitet. Aus diesen werden die einfachsten ausgewählt, welche zu bislang nicht behandelten Functionen führen. Zur Kennzeichnung dieser Gruppen reicht es hin, die betreffende Ausgangsparcelle P anzugeben. Dieselbe besteht aus einem Kreisbogen-Vierecke, mit den Winkeln $0, \frac{\pi}{n}, \pi, \frac{\pi}{n}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Der Fall $n = 3$ ergiebt die Gruppe aller ganzzahligen linearen Transformationen der Determinante 1, also die bekannte Function $J(\omega)$ (oder in der hier gewählten Bezeichnung $J(\eta)$), welche als die absolute Invariante des elliptischen Integrals erster Gattung definirt werden kann. Es werden nun

die Fälle $n = 4, 6, \infty$, welche die einzigen sind, die ebenfalls auf eine Gruppe ganzzahliger Transformationen führen, eingehend behandelt. Es stellt sich namentlich heraus, dass die hier auftretenden Functionen algebraisch von der Function $J(\eta)$ abhängen. Schliesslich folgen einige Bemerkungen über die aus der Zusammensetzung der Transformationen $\eta + 1$ und $-\frac{1}{m\eta}$ entstehenden Gruppe, wo m eine ganze Zahl bezeichnet.

Einige Berührungspunkte bietet diese Arbeit in den Resultaten mit der Abhandlung des Herrn Rausenberger, welcher sich das folgende Problem gestellt hat: „Es ist eine Zahl von linearen Transformationen gegeben; man soll untersuchen, ob die durch Zusammensetzung derselben hervorgehende Gruppe zulässig ist oder nicht.“ Der erste Abschnitt der Abhandlung enthält die Darstellung der allgemeinen Methoden, deren sich Herr Rausenberger bedient. Dieselben sind überwiegend arithmetischer Natur und stützen sich auf folgende beiden Sätze:

1) Es dürfen in der Gruppe keine infinitesimalen Transformationen vorkommen; d. h. es darf keine Transformation geben, welche einen beliebig gewählten Punkt der η-Ebene in einen unendlich benachbarten Punkt überführt.

2) Wenn die durch die Gruppe notwendig bedingten Unstetigkeitspunkte der zugehörenden Functionen die Ebene in getrennte Teile zerlegen, so darf kein Punkt eines dieser Teile durch eine Transformation der Gruppe in einen Punkt eines anderen Teiles übergehen.

Im zweiten Abschnitt behandelt Herr Rausenberger die durch Zusammensetzung zweier Transformationen entstehenden Gruppen. Es werden jedoch diese beiden Transformationen zunächst so specialisirt, dass die Betrachtung auf die beiden Transformationen $\eta + 1$ und $\frac{-a}{\eta + b}$ zurückgeführt werden kann. Ferner wird a als eine reelle Zahl, b beliebig angenommen. Die Untersuchung ergiebt nun die Fälle, in welchen durch diese beiden Transformationen eine unzulässige, bezüglich zulässige Gruppe erzeugt wird.

Es genügt, die letzteren Fälle aufzuzählen. Diese sind, unter n eine ganze Zahl verstanden:

1) $b = 0$, $a = \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}$ (vgl. die Arbeit von Hurwitz),

2) $b = 0$, $a = \frac{-1}{4\cos^2\frac{2\pi}{n}}$ (ausgenommen $n = 3, 4$),

3) $b = 0$, mod. $a \leqq \frac{1}{4}$, (hier sind selbst complexe Werte von a zulässig).

Schliesslich ist zu bemerken, dass nur der Fall mod. $a \leqq \frac{1}{4}$, b beliebig, wegen der sich darbietenden Schwierigkeiten nicht vollständig erledigt werden konnte. (Inzwischen hat Herr Rausenberger diese Lücke in einer neueren Arbeit ausgefüllt).

Der Auszug aus einem Briefe des Herrn Schottky an Herrn Klein enthält einige Mitteilungen, welche sich darauf beziehen, wie sich nach Inhalt und Entstehung die Arbeit des Herrn Schottky „Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen" zu den späteren Arbeiten über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich verhält. Hz.

L. Fuchs. Ueber Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben. Gött. N. 1882. 81-84.

Erwiderung auf die Note, welche Herr Klein der Arbeit von Poincaré „Sur les fonctions uniformes" etc. (Klein Ann. XIX.) beigefügt hat. Der Verfasser fixirt seinen Anteil an der Theorie der Functionen mit linearen Transformationen in sich. Man vergl. hierzu noch die Note von Poincaré „Sur les fonctiones uniformes etc." im XX. Bande der math. Annalen und die Anmerkungen von Klein in dessen Abhandlung „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie". Klein Ann. XXI. p. 143 und 214. Dk.

E. Picard. Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes. C. R. XCV. 594-597.

Siehe Abschn. VI. Cap. 6. p. 291.

E. Picard. Sur un groupe de substitutions linéaires. C. R. XCIV. 837-840.

Herr Picard hat in einer Note „Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires" (C. R. XCIV. p. 579; vgl. diesen Band p. 335) gewisse discontinuirliche Gruppen linearer Transformationen bei zwei Veränderlichen aufgestellt von der Form:

$$\left(u,\ v,\quad \frac{A_3+B_3v+C_3u}{A_1+B_1v+C_1u},\quad \frac{A_2+B_2v+C_2u}{A_1+B_1v+C_1u}\right),$$

für welche die A_i, B_i, C_i mit dritten Einheitswurzeln gebildete complexe ganze Zahlen sind, und für welche, unter α_i, β_i, γ_i die zu A_i, B_i, C_i conjugirten Zahlen verstanden, die Relationen

$$C_1\gamma_2+C_2\gamma_1+C_3\gamma_3 = A_1\beta_2+A_2\beta_1+A_3\beta_3 = K$$

und

$$A_1\alpha_2+A_2\alpha_1+A_3\alpha_3 = 0 \text{ etc.}$$

bestehen. In Verbindung mit den in der früheren Abhandlung gegebenen Beziehungen erweist sich nun zunächst K von der Form a^2-ab+b^2. Betrachtet man dann einmal Substitutionen T mit $K=1$, und zweitens die allgemeinen S, S', für welche K von eins verschieden, und bezeichnet zwei Substitutionen S, S' als „äquivalent", für welche $S'=ST$, so ergiebt sich hieraus für jedes K eine Einteilung der zugehörigen Substitutionen in nicht äquivalente Substitutionen. Für K Primzahl werden die Typen dieser Systeme, sowie die Anzahl derselben $[=2K(K+2)]$ bestimmt. Dk.

H. Poincaré. Sur les groupes discontinus. C. R. XCIV. 840-843.

Herr Picard hat in einigen Noten in den Comptes rendus

die ersten Beispiele für discontinuirliche Gruppen gebrochener linearer Substitutionen bei zwei Veränderlichen gegeben. (Man sehe Comptes rendus vol. XCIV. p. 579 u. 837; vergl. diesen Band p. 335 u. 350; man vergl. ferner die inzwischen veröffentlichten weiteren hierher gehörigen Abhandlungen von Picard in den Comptes rendus von 1883, den Acta mathematica vol. 1 und 2 und den Annales de l'école normale.) Herr Poincaré zeigt in vorliegender Note, wie man durch zahlentheoretische, algebraische und geometrische Betrachtungen auf unendlich viele derartige Gruppen geführt wird.

Einmal ergiebt die Theorie der quadratischen Formen für jede quadratische Form $F(x,y,z)$ mit ganzzahligen Coefficienten sofort unendlich viele Substitutionen

$$(1) \qquad (x, y, z, \ ax+by+cz, \ a'x+b'y+c'z, \ a''x+b''y+c''z)$$

mit ganzzahligen Coefficienten, welche die obige Form in sich überführen; aus ihnen ergiebt sich dann sofort eine discontinuirliche Gruppe linearer Substitutionen bei zwei Veränderlichen in der Form

$$(2) \qquad \left(x, \ y, \ \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \ \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right),$$

und dieselbe Regel ist auch auf Formen mit complex-ganzzahligen Coefficienten ausdehnbar.

Zweitens lässt sich aus jeder Gruppe linearer Substitutionen einer Veränderlichen mit reellen Coefficienten

$$(3) \qquad \left(t, \ \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)$$

eine entsprechende (isomorphe) Gruppe für zwei Veränderliche herstellen. Man betrachte nämlich etwa die quadratische Form

$$z^2 - xy$$

und setze t als der Gleichung

$$xt^2 - 2zt + y = 0$$

genügend voraus. Führt man dann die obigen Substitutionen (3) in die letzte Gleichung ein, so ergiebt dieselbe eine lineare Transformation der Coefficienten x, y, z derselben von der obigen Form (1), und aus ihr folgt wieder eine Gruppe linearer Transformationen

zweier Veränderlichen x, y in der Form (2), eine Gruppe, welche gleichzeitig mit der in (3) gegebenen discontinuirlich ist. Die Formulirung ist einer einfachen geometrischen Deutung und einer unmittelbaren Ausdehnung auch auf solche Gruppen (3), für welche die Coefficienten der Substitutionen nicht reell sind, fähig.

Dk.

R. Dedekind und H. Weber. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. Kronecker J. XCII. 181-291.

Zweck dieser ausführlichen Arbeit ist, die Entwickelung einer allgemeinen und strengen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen zu geben, ohne beschränkende Voraussetzungen über die Singularitäten derselben zu machen und ohne von den Grundsätzen über Stetigkeit und Entwickelbarkeit von Functionen überhaupt Gebrauch zu machen, welche z. B. der Riemann'schen Theorie zu Grunde liegen, die aber bezüglich einer strengen Begründung bisher noch gewisse Schwierigkeiten bieten. Die Mittel hierfür werden durch eine Verallgemeinerung der Theorie der rationalen Functionen gewonnen, welche die Uebertragung des Fundamentalsatzes von der Zerlegbarkeit ganzer rationaler Functionen in lineare Factoren auf das Gebiet der algebraischen Functionen ermöglicht. Zu diesem Ziele führt die Uebertragung derjenigen Methoden, deren sich die Zahlentheorie zu einem ähnlichen Zwecke bedient, auf die Theorie der Functionen, die ohne Weiteres möglich war. Demnach läuft auch die erste Abteilung der vorliegenden Arbeit im Wesentlichen, und soweit es in der Natur des Gegenstandes liegt, der allgemeinen Darstellung der Theorie der algebraischen Zahlen (ohne indessen die Kenntnis derselben beim Leser vorauszusetzen) parallel, wie sie der erste der genannten Herrn Verfasser in einem Anhange zu Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie (2te Aufl., ausführlicher in der 3ten Aufl.) und in einem Aufsatze: „Sur la théorie des nombres entiers algébriques“ in Darboux Bull. (2) I. (cf. F. d. M. X. (1877) 126) gegeben hat. Besteht zwischen den Grössen θ und z die algebraische Gleichung

$$f(\theta, z) \equiv \theta^n + b_1\,\theta^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\,\theta + b_n = 0,$$

wo die b rationale Functionen von z sind, so hat das System aller rationalen Functionen von θ und z die Eigenschaft, dass es sich durch Anwendung der vier Species auf seine Individuen reproducirt, und wird deshalb als ein Körper algebraischer Functionen Ω vom Grade n bezeichnet. Jede Function ξ desselben lässt sich stets und nur auf eine Weise in die Form setzen:

$$\xi = x_0 + x_1\,\theta + \cdot \cdot x_{n-1}\theta^{n-1},$$

wo die x rationale Functionen von z sind, und umgekehrt gehören alle Functionen von dieser Form dem Körper Ω an; allgemeiner lässt sich ξ linear und homogen durch irgend n Functionen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ (Basis) des Körpers Ω darstellen, dann und nur dann, wenn $\eta_1, \ldots, \eta_n$ rational unabhängig sind (ein rational irreductibles System bilden), d. h. wenn zwischen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ keine Relation

$$y_1\,\eta_1 + \cdots + y_n\,\eta_n = 0$$

mit in z rationalen y besteht, ohne dass die y sämmtlich verschwinden. Jede Function ξ in Ω genügt einer irreductiblen Gleichung mit in z rationalen Coefficienten, deren Grad n oder ein Teiler von n ist; eine Gleichung n^{ten} Grades

$$\varphi(\xi) \equiv \xi^n + a_1\,\xi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$$

für ξ erhält man, indem man unter Zugrundelegung einer beliebigen Basis $\eta_1, \ldots, \eta_n$ das Gleichungssystem $\xi\eta_i = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}\eta_\lambda$ aufstellt und $\eta_1, \ldots, \eta_n$ hieraus eliminirt; $N(\xi) \equiv (-1)^n b_n = \Sigma \pm y_{1\,1} \ldots y_{nn}$ heisst die Norm von ξ, $S(\xi) \equiv b = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\lambda}$ die Spur von ξ; für Norm und Spur existiren sehr einfache Sätze; hervorgehoben sei die Beziehung $\varphi(t) = N(t - \xi)$, wo t eine willkürliche Grösse bedeutet; ferner: $\varphi(t)$ ist entweder irreductibel oder eine ganze Potenz einer irreductibeln Function. Discriminante von n Functionen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ in Ω heisst die rationale Function von z:

$$\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n) \equiv \Sigma \pm S(\eta_1\,\eta_1) \ldots S(\eta_n \eta_n).$$

Ist $\eta_1, \ldots, \eta_n$ eine Basis von Ω und $\eta'_1, \ldots, \eta'_n$ irgend ein System von Functionen in Ω, so ist

$$\Delta(\eta'_1, \ldots, \eta'_n) = X^2 \Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

wo X die Determinante der η' nach den η ist; und die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\eta_1, \ldots, \eta_n$ eine Basis von Ω bilden, ist, dass $\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ nicht identisch verschwinde.

Eine Function ω in Ω heisst eine ganze Function von z, wenn in der Gleichung niedrigsten Grades, der ω genügt, $\omega^e + b_1 \omega^{e-1} + \cdots + b_{e-1} \omega + b_e = 0$, die b ganze rationale Functionen von z sind. Jede Function η in Ω kann durch Multiplication mit einer rationalen Function von z in eine ganze Function verwandelt werden. Das System $\mathfrak{o}$ der ganzen Functionen in Ω reproducirt sich durch Addition, Subtraction und Multiplication seiner Individuen; ω heisst durch ω' teilbar, wenn $\omega = \omega'\omega''$ ist, wo ω'' ebenfalls eine ganze Function bedeutet. Aus jeder Basis von Ω lassen sich unzählig viele andere ableiten, deren Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ganze Functionen von z sind; während dann $x_1 \omega_1 + \cdots + x_n \omega_n$ sicher eine ganze Function ist, so lange $x_1, \ldots, x_n$ ganze rationale Functionen von z sind, braucht nicht umgekehrt jede ganze Function in dieser Form darstellbar zu sein; damit dies aber der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, dass der Grad der Discriminante $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ ein Minimum sei, d. h. nicht grösser sei, als der irgend einer Basis, die aus lauter ganzen Functionen besteht. In diesem Fall heisst das System $\omega_1, \ldots, \omega_n$, dessen Herstellungsweise angegeben wird, eine Basis von $\mathfrak{o}$. Die Discriminante einer solchen ist von der Wahl der Basis unabhängig, wenn man noch den Coefficienten der höchsten Potenz von z durch Division mit einer Constanten $= 1$ macht; darum heisst sie Discriminante des Körpers $\Omega : \Delta(\Omega)$. Ein System $\mathfrak{a}$ von Functionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ (in Ω) heisst ein Modul, wenn die Functionen desselben addirt, subtrahirt oder mit ganzen rationalen Functionen von z multiplicirt, wieder Functienen desselben liefern; der Modul heisst ein endlicher, wenn er sich aus einer endlichen Anzahl von Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ durch diese Operationen erzeugen lässt, und wird durch $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ bezeichnet, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ heisst seine Basis. Jeder endliche Modul besitzt rational irreductible Basen (alle von derselben Elementenanzahl). Ist jede Function in $\mathfrak{a}$ auch in einem zweiten Modul $\mathfrak{b}$ enthalten, so heisst

$\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar, $\mathfrak{b}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ etc. (Der Teiler ist umfassender als das Vielfache; damit stimmt die von den Zahlen her gewohnte Anschauung, wenn man statt der Zahlen a und b die Systeme $0, \pm a, \pm 2a, \ldots$, resp. $0, \pm b, \pm 2b, \ldots$ nimmt.) Alle Functionen, die in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ enthalten sind, bilden ebenfalls einen Modul, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; dasselbe gilt für den grössten gemeinschaftlichen Teiler, d. h. den Inbegriff aller Functionen $\alpha + \beta$, wo α und β irgend welche Functionen aus $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{b}$ sind. Unter Product von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man ferner den Inbegriff sämmtlicher Functionen $\Sigma\alpha\beta$, der selbst ein Modul ist und zwar ein endlicher, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ es sind. Es ist zwar $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$, $\mathfrak{abc} = \mathfrak{acb} = \ldots$, aber $\mathfrak{ab}$ braucht nicht durch $\mathfrak{a}$ teilbar zu sein, dagegen ist, falls $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}_1$ teilbar ist, auch $\mathfrak{ab}$ durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ teilbar. Endlich ist $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ der Inbegriff aller Functionen γ von der Art, dass $\gamma\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist, und ebenfalls ein Modul; $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{a}$ ist durch $\mathfrak{b}$ teilbar, wenn auch nicht immer gleich $\mathfrak{b}$. Aus der Definition des Teilers ist klar, was unter der Congruenz $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}}$ zu verstehen ist. Hieran schliesst sich dann unmittelbar die Definition eines vollständigen Restsystems des Moduls $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$. Von Wichtigkeit ist ferner der Begriff der Norm $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{b}$; es ist dies eine gewisse rationale, in bestimmter Weise herzustellende Function von z, welche die Eigenschaft hat, dass durch Multiplication mit ihr jede Function von $\mathfrak{b}$ in eine Function von $\mathfrak{a}$ verwandelt wird. Für die Norm wird eine Reihe von Sätzen abgeleitet. Das für die vorliegende Theorie wichtigste Gebilde, das Ideal, ist eine besondere Art von Modul; ein System $\mathfrak{a}$ von ganzen Functionen von z in Ω heisst ein Ideal, wenn 1) Summe und Differenz je zweier Functionen in $\mathfrak{a}$ wieder eine Function in $\mathfrak{a}$ ergeben, 2) das Product einer jeden Function in $\mathfrak{a}$ mit einer jeden Function in $\mathfrak{o}$ wieder eine Function in $\mathfrak{a}$ ist. Der Modul $\mathfrak{o}$ ist selbst ein Ideal, und jedes Ideal ist durch $\mathfrak{o}$ teilbar, wie überhaupt $\mathfrak{o}$ in der Theorie der Ideale die Rolle der Einheit spielt. Bedeutet μ eine beliebige Function in $\mathfrak{o}$, so ist das System $\mathfrak{o}\mu$

aller durch μ teilbaren ganzen Functionen ein Ideal, welches Hauptideal heisst. Grad des Ideals $\mathfrak{a}$ heisst der Grad der ganzen rationalen Function $(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$, die kurz Norm von $\mathfrak{a}$ genannt und mit $N(\mathfrak{a})$ bezeichnet wird, dieselbe ist stets eine Function in $\mathfrak{a}$ und Teiler der Norm einer jeden Function α in $\mathfrak{a}$; $N(\mathfrak{o}) = 1$. Wesentlich unterscheidend für die Ideale von den allgemeinen Moduln ist der nur für Ideale geltende Satz: „Sind μ, μ_1, ν, ν_1 Functionen in $\mathfrak{o}$ und $\mu \equiv \mu_1$ $\nu \equiv \nu_1$ (mod. $\mathfrak{a}$), so ist auch $\mu\nu \equiv \mu_1\nu_1$ (mod. $\mathfrak{o}$)." Heisst nun eine Function α in $\mathfrak{o}$ durch das Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar, wenn $\mathfrak{o}\alpha$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, d. h. wenn α eine Function in $\mathfrak{o}$ ist, heissen ferner zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ relativ prim, wenn ihr grösster gemeinsamer Teiler $\mathfrak{o}$ ist, und nennt man endlich $\mathfrak{p}$ ein Primideal, wenn es von $\mathfrak{o}$ verschieden ist und nur $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$ als Teiler hat, so lässt sich ohne Mühe eine Reihe von Sätzen über die Teilbarkeit der Ideale aufstellen, die denjenigen über die Teilbarkeit der ganzen rationalen Functionen entsprechen. Um aber die vollständige Analogie, die zwischen den Idealen und den ganzen rationalen Functionen herrscht, zu beweisen, bedarf es eingehenderer Betrachtungen; aus diesen ergiebt sich: ist $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar, so giebt es ein und nur ein Ideal $\mathfrak{b}$, welches der Bedingung $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ genügt; jedes von $\mathfrak{o}$ verschiedene Ideal ist entweder ein Primideal, oder es lässt sich, und zwar nur auf eine Weise, als Product von lauter Primidealen darstellen; ferner ist $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})\, N(\mathfrak{b})$; endlich: Primideal und Ideal ersten Grades sind identische Begriffe und überhaupt der Grad eines Ideals gleich der Anzal seiner Primfactoren. Da die Discriminante von Ω durch das Product $\Delta(\Omega) = \Pi(z-c)^{n-s}$ darstellbar ist, wo alle diejenigen linearen Ausdrücke $z-c$ zu multipliciren sind, die durch die zweite oder eine höhere Potenz eines Primideals teilbar sind, und wo s die Anzahl der verschiedenen in $z-c$ aufgehenden Primideale bedeutet, so ist ersichtlich, dass es nur eine endliche Anzahl linearer Functionen $z-c$ giebt, die durch das Quadrat eines Primideals teilbar sind. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ ein solches Primideal, und ist e der Exponent der höchsten in seiner Norm aufgehenden Potenz von $\mathfrak{p}$, so heisst das über alle derartigen Primideale erstreckte Product $\Pi\mathfrak{p}^{e-1}$ das Verzweigungsideal $\mathfrak{z}$ des Körpers Ω, das wegen

seiner Wichtigkeit einer eingehenden Untersuchung unterworfen wird. Auf Grund dieser Theorie der ganzen Functionen in Ω werden nun auch die gebrochenen Functionen untersucht. Den Schluss der ersten Abteilung bildet die Behandlung der rationalen Transformationen der Functionen des Körpers Ω, aus der sich die Berechtigung ergiebt, an Stelle der unabhängigen Veränderlichen z jede beliebige Function des Körpers als unabhängige Variable der Betrachtung zu Grunde legen zu dürfen, wenn es auf die Erhaltung der Gesammtheit der Functionen des Körpers ankommt; die Begriffe: Basis, Norm, Spur, Discriminante, ganze Function, Modul, Ideal sind allerdings wesentlich abhängig von der Wahl der unabhängigen Variablen z.

Sind die soweit geführten Betrachtungen über die Functionen des Körpers Ω rein formaler Natur, d. h. bewegten sie sich überall nur im Gebiete der rationalen Rechnungsoperationen, ohne die numerischen Werte der Functionen in Betracht zu ziehen, so drängt sich nun die Frage auf, welche an die Spitze der zweiten Abteilung gestellt wird: „In welchem Umfange ist es möglich, den Functionen in Ω solche bestimmte Zahlenwerte beizulegen, dass alle zwischen diesen Functionen bestehenden rationalen Relationen (Identitäten) in richtige Zahlengleichungen übergehen?“ Zu diesem Zwecke wird folgende, zunächst ganz abstrakte Definition aufgestellt: Wenn alle Individuen $\alpha, \beta, \ldots$ des Körpers Ω durch bestimmte Zahlenwerte $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ so ersetzt werden, dass (I.) $\alpha_0 = \alpha$, falls α eine Constante ist, und allgemein

$$\text{(II.)}\ (\alpha+\beta)_0 = \alpha_0 + \beta_0, \qquad \text{(III.)}\ (\alpha-\beta)_0 = \alpha_0 - \beta_0,$$

$$\text{(IV.)}\ (\alpha\cdot\beta)_0 = \alpha_0\cdot\beta_0, \qquad \text{(V.)}\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

wird, so soll einem solchen Zusammentreffen bestimmter Werte ein „Punkt“ P zugeordnet werden, und wir sagen, in P sei $\alpha = \alpha_0$, oder α habe in P den Wert α_0. Zwei Punkte heissen stets und nur dann verschieden, wenn eine Function α in Ω existirt, die in beiden Punkten verschiedene Werte hat. Es sind nun die Primideale, die den Uebergang von dieser Definition des Punktes zum Nachweise seiner Existenz vermitteln. Ist nämlich z irgend eine in P endliche Variable, so ist der Inbegriff $\mathfrak{p}$ aller

derjenigen ganzen Functionen von z, welche in P verschwinden, ein Primideal in z, das vom Punkte P erzeugte Primideal $\mathfrak{p}$; da jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in z stets durch einen, und nur durch einen Punkt P, den Nullpunkt von $\mathfrak{p}$, erzeugt werden kann, so ergiebt sich der Weg, um alle existirenden Punkte P und jeden nur ein einziges Mal zu erhalten, deren Inbegriff die Riemann'sche Fläche T bildet, von selbst. Dies ist die Grundlage, auf der dann mit Hülfe der Ergebnisse der ersten Abteilung eine Theorie der algebraischen Functionen entwickelt wird. Eine ganz formale Definition des Differentialquotienten führt zu der Geschlechtszahl, und zu einer allgemeinen Darstellung der Differentiale erster Gattung. Hieran schliesst sich der Beweis des Riemann-Roch'schen Satzes über die Anzahl der willkürlichen Constanten in einer durch ihre Unendlichkeitspunkte bestimmten Function und die Theorie der Differentiale zweiter und dritter Gattung.

T.

F. Klein. Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Leipzig. Teubner.

Es sind zwei Hauptpunkte, durch welche sich die vorliegende Darstellung der Riemann'schen Theorie von der Darstellung unterscheidet, wie sie Riemann selber in seiner berühmten Abhandlung über Abel'sche Functionen gegeben hat. Einmal benutzt Herr Klein durchweg physikalische Anschauungen, wo sich Riemann des Dirichlet'schen Princips bedient; sodann legt Herr Klein seiner Untersuchung beliebige geschlossene, nicht nur, wie Riemann, mehrblättrige über einer Ebene ausgebreitete Flächen zu Grunde.

Die Vorteile, welche diese Abweichungen gewähren, liegen namentlich nach der didaktischen Seite hin (siehe d. Vorwort). Es tritt „das heuristische Element der Methode klarer hervor"; der Leser gewinnt beim Studium der Schrift unwillkürlich die Empfindung, dass er selber aus sich auf dem vorgezeichneten Wege die Theorie hätte entwickeln können. Hierauf vor Allem dürfte die grosse anregende Kraft zurückzuführen sein, welche

der von Herrn Klein gegebenen Darstellung innewohnt. Was die Anlage der Untersuchung angeht, so wird zunächst im ersten Abschnitt die physikalische Deutung der Functionen eines complexen Argumentes ausführlich studirt, bei welcher der reelle Teil der Function als Geschwindigkeitspotential einer stationären Strömung in der Ebene, deren Punkte die Werte des Argumentes geometrisch repräsentiren, betrachtet wird. Die rationalen Functionen und ihre Integrale geben hier zweckmässige Beispiele; sie liefern alle einförmigen Strömungen, bei welchen durch jeden Punkt der Ebene im Allgemeinen nur eine Strömungslinie geht. Der Uebergang von der Ebene zur Kugel beseitigt einmal die Ausnahmestellung, welche in der Ebene der Punkt $z = \infty$ einnimmt, so dass nunmehr auf der Kugel der Verlauf der Strömungen vollständig überblickt werden kann. Es schliesst sich an diesen Uebergang aber auch sofort die Fragestellung an, welche als die Riemann'sche bezeichnet wird, und aus der sich alles Weitere entwickelt: Man nehme eine beliebige geschlossene Fläche im Raume; welche einförmigen Strömungen existiren auf derselben? Diese Strömungen führen offenbar zu einer wohlumgrenzten Classe von Functionen, deren Eigenschaften unmittelbar durch die Anschauung der zugehörigen, die Functionen definirenden Strömungen erkannt werden. Die Ausführung dieser Idee und damit die Entwickelung der Riemann'schen Theorie enthält der zweite Abschnitt der Schrift. Die geschlossenen Flächen werden zuerst nach der Zahl p der sie nicht zerstückenden Rückkehrschnitte eingeteilt und der weiteren Betrachtung bestimmte Normalflächen (für das Geschlecht p eine Kugel mit p Anhängseln) zu Grunde gelegt. Die physikalische Anschauung lehrt nun die allgemeinsten auf einer solchen Normalfläche existirenden einförmigen Strömungen kennen. Es ergeben sich dann die Sätze der Riemann'schen Theorie einfach durch Uebertragung der anschauungsmässig erkannten Eigenschaften dieser Strömungen auf die durch dieselben definirten Functionen. Der Uebergang von der Normalfläche zu der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche, welcher durch die eindeutigen unter den gefundenen Functionen vermittelt werden kann, ist für den Fall $p = 1$ auch rechnerisch durchgeführt,

wie überhaupt die allgemeinen Untersuchungen vielfach durch specielle Beispiele erläutert sind.

Der dritte Abschnitt der Schrift ist weiteren Folgerungen aus den vorhergegangenen Entwickelungen gewidmet. Er enthält nicht nur der Form, sondern auch dem Inhalte nach neue Resultate über die eindeutige conforme Abbildung geschlossener Flächen auf einander. Hierbei werden insbesondere auch die vom Verfasser als „symmetrisch" bezeichneten Flächen betrachtet, welche eine conforme Abbildung auf sich zulassen, die zweimal angewandt, zur Identität führt. Diese Flächen, welche auch als die zu reellen algebraischen Gleichungen gehörenden Flächen definirt werden können, gewinnen ein besonderes Interesse noch dadurch, dass sich die berandeten und Doppelflächen als specielle derartige Flächen auffassen lassen. Hz.

N. Herz. Beweis des Riemann'schen Satzes über algebraische Functionen. Hoppe Arch. LXVIII. 14-18.

Es handelt sich um den Satz: „Jede Function u von x, welche in einer durch die irreductible Gleichung $f(y,x) = 0$ definirten Fläche vom Geschlechte p eindeutig ist und nur für eine endliche Anzahl ($= m$) von Punkten unstetig von der ersten Ordnung wird, ist in y und x rational darstellbar." Der Beweis des Satzes lässt sich in zwei Teile trennen, deren erster den allgemeinen Ausdruck für jene Function u herstellt und zeigt, dass derselbe im Allgemeinen $m-p+1$ willkürliche Constanten besitzt; deren zweiter aus y und x rationale Functionen von verlangter Beschaffenheit mit gleichfalls $m-p+1$ willkürlichen Constanten bildet. Hier handelt es sich um den ersten Teil des Beweises, welcher durch Constantenzählung erbracht wird, und dabei, im Gegensatz zu der Darstellung bei Riemann, lediglich die Theorie der algebraischen Functionen heranzieht, ohne die Abel'schen Integrale zur Construction einer Function u zu benutzen. Es wäre dabei vom Verfasser wol der analoge Betti'sche Beweis (in der Abhandlung: Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa. Annali delle Università Toscane. Tom. VII.

1862) in Vergleich zu ziehen gewesen; übrigens finden auch hier die Bemerkungen von Prym über die Durchführbarkeit der abzählenden Methoden in speciellen Fällen in der gleichfalls diesen Riemann'schen Satz betreffenden Abhandlung im LXXXIII. Band von Borchardt J. p. 253 Anwendung (siehe F. d. M. IX. (1877) p. 284.). Dk.

F. Casorati. Sopra il teorema di Jacobi. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 623-634.

Der Verfasser hat schon früher (C. R. Dec. 1863 u. Jan. 1864) darauf aufmerksam gemacht, dass das Theorem von Jacobi, nach dem eine Function einer Variablen mit mehr als zwei Perioden unmöglich ist, zu beschränken sei auf Functionen, die für jeden Wert der Variable nur einen oder nur eine endliche Zahl von Werten habe, was Jacobi vermutlich ebenso aufgefasst, aber nicht ausdrücklich hervorgehoben habe. Da diese Bemerkungen nur wenig beachtet und zum Teil nicht verstanden wurden, will der Verfasser in weiteren Mitteilungen nochmals die Existenz analytischer Functionen einer Variablen mit mehrfacher Periodicität und die Möglichkeit der Umkehrung eines einzelnen Integrals zeigen. H. St.

Ad. Schumann. Ein Beweis für ein Theorem von Liouville, die doppelt-periodischen Functionen betreffend. Schlömilch Z. XXVII. 125-126.

Der Satz von Liouville, dass sich die Summe der Pole von der Summe der Nullpunkte in einem elementaren Periodenparallelogramm um eine vollständige Periode unterscheidet, wird hergeleitet aus dem Integral $\int z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, das über die Umgrenzung eines solchen Parallelogramms, dessen Ecken den Werten

$$z_0,\ z_0+\omega,\ z_0+\omega+\omega',\ z_0+\omega'$$

entsprechen, ausgedehnt wird. M.

[illegible] Ueber die doppelt-periodischen Functionen zweiter Art. Wien. Ber. LXXXVI. 969-975.

Stellt man eine doppelt-periodische Function einmal in der Form eines Quotienten zweier Producte von Jacobi'schen Functionen *H* dar, und zweitens mit Hülfe einer Function, welche nur an einer einzigen Stelle und den congruenten von der ersten Ordnung unendlich wird, und ihrer successiven Ableitungen, in eine Form, welche der Partialbruchzerlegung rationaler Functionen entspricht, so besteht zwischen den in diesen Darstellungen auftretenden Grössen eine lineare Relation. Einen speciellen Fall für diesen hier bewiesenen Satz liefert die von Herrn F. Brioschi (C. R. XCII. 1881. 325., s. F. d. M. XIII. (1881) 257.) bewiesene Relation zwischen den Grössen ω, die in den beiden Ausdrücken für die der Gleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = [n(n+1)k^2 sn^2 u + h]y$$

genügenden Functionen enthalten sind.

M.

O. Rausenberger. Zur Theorie der Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden. Klein Ann. XX. 47-49.

Ist $f(x)$ eine eindeutige Function, welche den Functionalgleichungen

$$f(x+1) = f(x), \quad f\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

genügt, (Modulfunction), so genügt jede Function $F(x)$, die sich rational aus $f(x.\sqrt{n})$ und $f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ zusammensetzt, den Functionalgleichungen

$$F(x+\sqrt{n}) = F(x) \quad \text{und} \quad F\left(-\frac{1}{x}\right) = F(x);$$

oder sie besitzt, wie man sich ausdrücken mag, die Perioden $x+\sqrt{n}$ und $-\frac{1}{x}$. Wie sich dieses Beispiel in die allge-

meinen Conceptionen über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich einordnet, sehe man einerseits in der weiteren Abhandlung desselben Verfassers: „Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden" (Klein Ann. XX. p. 187. und diesen Band p. 345), andererseits in den von viel allgemeineren Gesichtspunkten ausgehenden Arbeiten von Poincaré und Klein über die Theorie des eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich. Dk.

O. Rausenberger. Ueber periodische Functionen zweiter Gattung. Klein Ann. XX. 550-557.

Herr Rausenberger definirt im XVIII. Bande der Math. Ann. in der Arbeit: „Theorie der allgemeinen Periodicität" als „periodische Function" eine Function $F(x)$, welche der Gleichung

$$F[\varphi_1(x)] = F(x)$$

genügt, wo $\varphi_1(x)$ eine beliebige algebraische Function bedeutet (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 317). Hieran knüpft er jetzt die Betrachtung „periodischer Functionen zweiter Gattung", definirt durch eine oder mehrere Functionalgleichungen

$$F[\varphi_1(x)] = \psi_1[F(x)],$$

worin $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ allgemein algebraische Functionen bedeuten. In der vorliegenden Abhandlung sind diese Functionen insbesondere als lineare vorausgesetzt. Mit Bezug auf diese Functionen wird nun die schon für jene periodischen Functionen erster Gattung beantwortete Frage gelöst nach allen eindeutigen, einfach oder mehrfach periodischen Functionen zweiter Gattung mit einer endlichen Anzahl von wesentlichen Discontinuitätspuncten.

Die einfach periodischen Functionen zweiter Gattung erweisen sich sofort auf vier Normalformen zurückführbar:

$$(1) \qquad F(x+1) = F(x)+1,$$
$$(2) \qquad F(x+1) = q.F(x),$$
$$(3) \qquad F(p.x) = F(x)+1,$$
$$(4) \qquad F(p.x) = q.F(x),$$

wobei noch mod. $p < 1$ angenommen werden darf; hieraus ergeben sich leicht die wesentlichen Eigenschaften solcher Functionen.

Für die mehrfach periodischen Functionen zweiter Gattung zeigt die Aufstellung einer Reihe von Normalformen, „dass alle überhaupt existenzfähigen Functionen zweiter Gattung mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden, ganz unwesentliche Ausnahmefälle abgerechnet, unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte besitzen müssen." Zum Schlusse wird noch die Bezeichnung der „periodischen Functionen dritter Gattung" fixirt für Functionen $F(x)$, welche der Gleichung

$$F[\varphi_1(x)] = G[x, F(x)]$$

genügen, worin φ_1 eine rationale Function von x, G eine in x und $F(x)$ rationale Function bezeichnet. Dk.

Tchébychef. Ueber die Functionen, die für gewisse Werte der Variabeln wenig von Null abweichen. Petersb. Abh. X. (Russisch).

Weicht die Function $F(x)$ zwischen den Grenzen $x = -h$ und $x = +h$ wenig von Null ab, so kann sie für einen ausserhalb dieser nahe bei denselben liegenden Wert von x nur dann gross werden, wenn ihr Grad ziemlich gross ist. In der angeführten Abhandlung wird die Aufgabe gelöst, die höchste Grenze für den Wert, den eine Function n^{ten} Grades, welche nicht mehr als um $\pm C$ von Null zwischen den Grenzen $x = -h$ und $x = +h$ abweicht, für einen ausserhalb dieser liegenden Wert H von x annehmen kann, zu bestimmen. Da durch Einführen eines Proportionalitätsfactors der Wert der Function für $x = H$ immer einer gegebenen Grösse M gleich gemacht werden kann, so ist nur eine Function zu suchen, die zwischen den Grenzen $x = -h$ und $x = +h$ am wenigsten von Null abweicht, und für $x = H$ den Wert M annimmt; dann wird das Verhältnis $M:L$, wenn jetzt L die grösste Abweichung dieser Function von Null zwischen $x = -h$ und $x = +h$ bezeichnet, die gesuchte höchste Grenze des Wertes der Function für $x = H$ relativ zu der grössten

Abweichung zwischen genannten Grenzen geben. Wenn die Aufgabe auf diese letzte zurückgeführt worden ist, wird sie durch dieselben Betrachtungen gelöst, von denen der Verfasser in seiner Abhandlung: Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions (Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersb. sixième série. Sciences mathématiques et physiques. T. VII.) Gebrauch gemacht hatte, und die in dem „Calcul différentiel“ von Bertrand S. 512-521 angeführt sind.

Dieselbe Aufgabe wird auch in Bezug auf die trigonometrische Function

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \cdots + A_n \cos n\varphi$$
$$+ B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \cdots + B_n \sin n\varphi$$

gelöst. Ty.

T. J. Stieltjes jr. Over de transformatie van der periodiche functie

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \cdots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

Nieuw Arch. IX. 111-116

Einfache Entwickelung in Factoren von Ausdrücken obiger Form; für $n = z$ und unter der Voraussetzung, dass der Ausdruck für keinen Wert von φ gleich Null wird, hat man die Entwickelung bei der Störungsfunction schon lange angewendet. Hier bleibt die Form allgemein und so wird die Entwickelung angewendet, welche nachher durch ein Beispiel erklärt wird.

G.

G. Ascoli. Una osservazione relativa ad un teorema contenuto nella mia Memoria: „Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica.“ Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 543-546.

Verbesserung eines Lemma über die Reihe $\sum_{0}\mu \sum_{0}\nu\, c_\mu^{(\nu)}$, das in § 3 Nr. 1 der oben genannten Abhandlung nicht ganz correct ausgesprochen war. M.

LAGUERRE. Sur la distribution, dans le plan, des racines d'une équation algébrique dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R. XCIV. 412-414, 509-511.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 54.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

PEROTT. Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières. S. M. F. Bull. X. 250-251.

Angabe eines Verfahrens, welches die Zerlegung eines Polynoms

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

mit ganzzahligen Coefficienten in seine Primfactoren aus einer endlichen Anzahl von Versuchen ergiebt. Dk.

ST. RYCHLICKI. Ein Beitrag zum Rationalmachen einer Summe von $2^{q\text{ten}}$ Wurzeln. Hoppe Arch. LXVIII. 180-196.

Es werden zunächst die expliciten rationalen Ausdrücke entwickelt, welche den algebraischen Summen von 2, 3, 4, 5 Quadratwurzeln entsprechen; sodann wird die Form des rationalen Ausdrucks discutirt, der für die Summe von n Quadratwurzeln erscheint; und zuletzt finden sich einige Bemerkungen über den in der Ueberschrift bezeichneten allgemeinsten Fall.

Sn.

PEROTT. Sur un théorème de Gauss. S. M. F. Bull. X. 87-88.

Es wird ein neuer Beweis für den Gauss'schen Satz (Sum-

matio quarundam serierum singularium) gegeben, dass, wenn m und μ ganze Zahlen und $m > \mu$ ist, der Ausdruck

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\mu)}$$

eine ganze Function von x ist. M.

O. Dziobek. Ueber diejenigen Functionen von sechs Variabeln, welche die Eigenschaft haben, bei Vertauschung derselben nur sechs verschiedene Werte anzunehmen, ohne in Bezug auf fünf derselben symmetrisch zu sein. Hoppe Arch. LXVIII. 225-255.

Es werden die einfachsten Formen solcher Functionen aufgestellt. Dieselben lassen sich für die Darstellung der Invarianten der linearen Formen sechsten Grades verwerten. Indem ferner jeder Punkt eines Kegelschnittes

$$xz - y^2 = 0$$

durch einen Parameter α mittels der Formeln

$$x = 1,\ y = \alpha,\ z = \alpha^2$$

dargestellt wird, ergeben sich Anwendungen der genannten Functionen auf die Theorie des Pascal'schen Sechsecks. M.

G. Halphén. Sur une série d'Abel. S. M. F. Bull. X. 67-87.

Die Resultate dieser Abhandlung sind bereits früher C. R. XCIII. 1003-1005 veröffentlicht worden; wir verweisen deshalb auf das betreffende Referat in F. d. M. XIII. (1881) p. 180.

M.

H. A. Schwarz. Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires. Torino, Att. XVII. 740-743

Ein eleganter, nur elementare Hülfsmittel benützender Beweis der Formel

$$f(t_1, t_2, \dots t_n) = \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(-1)}(u),$$

in welcher, für $f(t)$ als Ausgangsfunction,

$$f(t_1, t_2) = \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2},$$

$$f(t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_1, t_2)-f(t_1, t_3)}{t_2-t_3} \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt ist, wo ferner $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ eine reelle Wertreihe, u einen Zwischenwert derselben bezeichnet **Dk.**

M. Lerch. Bemerkungen über den Quotienten $\frac{x}{\sin x}$.
Cas. XI. 292-204. (Böhmisch).

Enthält die Ableitung und eine Anwendung der Formel

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\dots \text{ in inf.}$$

Std.

J. W. L. Glaisher. Une identité trigonométrique.
Ass. fr. 1880.

Die hier betrachtete Identität lautet:

$$\frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\sin(a-h)}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{\sin(b-f)\sin(b-g)\sin(b-h)}{\sin(b-a)\sin(b-c)}$$
$$+\frac{\sin(c-f)\sin(c-g)\sin(c-h)}{\sin(c-a)\sin(c-b)} + \frac{\sin(f-a)\sin(f-b)\sin(f-c)}{\sin(f-g)\sin(f-h)}$$
$$+\frac{\sin(g-a)\sin(g-b)\sin(g-c)}{\sin(g-f)\sin(g-h)} + \frac{\sin(h-a)\sin(h-b)\sin(h-c)}{\sin(h-f)\sin(h-g)} = 0,$$

wo a, b, c, f, g, h irgend welche Grössen sind. Für letztere wird $\sin^2 a$, $\sin^2 b, \dots$, gesetzt; alsdann ergiebt sich eine ähnliche Identität. **M.**

S. Günther. Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Eine vergleichende Untersuchung.
Leipzig. Teubner.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 3.

A. Forti. Tafeln der hyperbolischen Functionen. Schlömilch Z. XXVII. Hl. A. 1-12.

Für die Rechnung mit Hyperbelfunctionen konnte man sich bisher zweier Tafelwerke bedienen, desjenigen von Gronau und desjenigen von Forti: ältere Arbeiten dieser Art, wie wir sie von Lambert und Gudermann besitzen, hatten mehr eine theoretische, als eine praktische Bedeutung. Gronau legte den sogenannten transcendenten Winkel τ, Forti den gemeinsamen Winkel φ zu Grunde. Letzterer erzählt uns, dass seine Anordnung von manchen sachkundigen Männern, so besonders von Hoüel und Bellavitis, getadelt worden sei, dass er jedoch in seinen zu Rechnungszwecken bestimmten Tafeln trotzdem die ursprüngliche Idee als die vorteilhafteste beibehalten habe. „Für den ausschliesslichen Gebrauch der Mathematiker" aber gedenke er nunmehr neue Tafeln zu entwerfen, in welchen er sich den Wünschen seiner Kritiker mehr anbequeme und den doppelten hyperbolischen Sector ω zum Argumente nehme. Eine Probe dieses in der Ausführung befindlichen Werkes wird mitgeteilt. Ausserdem sind der Abhandlung zahlreiche geschichtliche Notizen, namentlich über Newton's Stellung zu den Hyperbelfunctionen, beigegeben.

Gr.

— —

F. Lindemann. Ueber die Ludolph'sche Zahl. Berl. Ber. 1882, 679-682.

F. Lindemann. Sur le rapport de la circonférence au diamètre, et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques. C. R. CXV. 72-74.

F. Lindemann. Ueber die Zahl π. Klein Ann. XX. 213-225.

In seiner Abhandlung: Sur la fonction exponentielle (C. R. Bd. LXXVII., s. F. d. M. V. (1873.) p. 248) hat Herr Hermite die Unmöglichkeit einer Relation von der Form

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0$$

bewiesen, wo sowohl die z als die N als ganz vorausgesetzt

werden. Herr Lindemann erweitert die hier gemachten Schlüsse und gelangt zu folgendem Satze: „Sind

$$f_1(z) = 0,\ f_2(z) = 0,\ \ldots,\ f_s(z) = 0$$

s algebraische Gleichungen, von denen jede irreductibel und von der Form

$$z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n = 0$$

ist, wo unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen zu verstehen sind, werden ferner mit $z_i, z_i', z_i'', \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $f_i(z) = 0$ bezeichnet, wird kurz

$$\Sigma e^{z_i} = e^{z_i} + e^{z_i'} + e^{z_i''} + \ldots$$

gesetzt, bedeuten endlich $N_0, N_1, \ldots, N_s$ beliebige ganze Zahlen, welche nicht sämmtlich gleich Null sind, so kann eine Relation von der Form

$$0 = N_0 + N_1 \Sigma e^{z_1} + N_2 \Sigma e^{z_2} + \cdots + N_s \Sigma e^{z_s}$$

nicht bestehen, es sei denn, dass eine der Grössen z gleich Null ist.“

Ersetzt man die Gleichungen $f_i(z) = 0$ durch diejenigen irreduciblen Gleichungen, welche bez. von den Zahlen

$$Z_1 = z_1,\ Z_2 = z_1 + z_2,\ Z_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots,\ Z_n = z_1 + z_2 \cdots + z_n$$

befriedigt werden, so führt dieser besondere Fall zu dem Satze: „Ist z eine von Null verschiedene rationale oder algebraisch irrationale Zahl, so ist e^z immer transcendent.“ Damit ist bewiesen, dass die Ludolph'sche Zahl π eine transcendente Zahl ist. Die angeführten Sätze bleiben bestehen, wenn man unter den N_i nicht ganze oder rationale, sondern beliebige algebraisch-irratinale Zahlen versteht. Analog folgt aus dem obigen Satze der folgende: „Versteht man unter $N_0, N_1, \ldots, N_n$ beliebige, und unter $z_0, z_1 \ldots, z_n$ beliebige, von einander verschiedene (reelle oder complexe) algebraische Zahlen, so kann eine Relation von der Form

$$0 = N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n}$$

nicht bestehen, es sei denn, dass die N_i sämmtlich gleich Null werden.“ M.

Ad. Hurwitz. Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(x) = \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten. Schlömilch Z. XXVII. 86-102.

Durch Vergleichung der beiden von Herrn Schlömilch gegebenen Relationen

$$f(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \cdot \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot \Gamma(s) \cdot f(s),$$

wo

$$f(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots + (1)^n \frac{1}{(2n+1)^s} + \cdots,$$

und

$$\varphi(1-s) = \frac{2^s-1}{2^{1-s}-1} \cdot \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right) \cdot \Gamma(s) \cdot \varphi(s),$$

wo

$$\varphi(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^s} + \cdots,$$

mit der von Riemann („Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze") betrachteten Function

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots,$$

für welche er u. A. die Gleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s)$$

herleitet, ist der Herr Verfasser zu allgemeinen, die obigen als specielle Fälle enthaltenden Sätzen, gelangt. Seine Untersuchungen betreffen die Dirichlet'sche Function $F(s, D)$, welche, wenn

$$D \equiv 1 \,(\text{mod}\, 4) \text{ ist}, = \frac{1}{1-(-1)^{\frac{D^2-1}{8}} \cdot \frac{1}{2^s}} \cdot \Sigma\left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s},$$

in allen übrigen Fällen $= \Sigma\left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s}$ gesetzt wird, wo die Summe sich auf alle n erstreckt, die positiv, ganzzahlig und relativ prim zu $2D$ sind. Als Resultat der Untersuchung ergeben sich folgende Sätze:

I. „Die Functionen $F(s, D)$ sind durchaus eindeutige Functionen der complexen Variabeln s.“ II. „Alle Functionen $F(s, D)$, mit einziger Ausnahme von $F(s, 1)$, haben einen endlichen Wert des Arguments s.“ III. „Die Function $F(s, 1)$ hat für jeden im Endlichen gelegenen Wert von s selbst einen endlichen Wert, mit Ausnahme der Stelle $s = 1$, wo $F(s, 1)$ so unendlich wird, dass $\lim[(s-1)F(s,1)]_{s=1}$ ist.“ IV. „Die Functionen $F(s, D)$ genügen folgenden einfachen Relationen:

$$F(1-s, D) = \left(\frac{2\pi}{\varkappa D}\right)^{1-s} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \sqrt{\varkappa D} \cdot \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot F(s, D),$$

oder auch

$$F(1-s, D) = \left(\frac{\varkappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \cdot F(s, D),$$

wenn D positiv ist;

$$F(1-s, D) = \left(\frac{2\pi}{-\varkappa D}\right)^{1-s} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \sqrt{-\varkappa D} \cdot \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot F(s, D),$$

oder auch

$$F(1-s, D) = \left(\frac{-\varkappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)} \cdot F(s, D),$$

wenn D negativ ist. Dabei ist $\varkappa = 1$ für $D \equiv 1 (\mathrm{mod.} 4)$ und $\varkappa = 4$ in allen übrigen Fällen.“ M.

A. Genocchi. Sur les fonctions de M. Prym et de M. Hermite. Belg. Bull. (3) IV.

Die beiden Functionen von Herrn Hermite

$$P(x) = a^x\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2(x+2)} - \text{etc.}\right),$$

$$Q(x) = \int_a^\infty v^{x-1} e^{-v} dv,$$

welche in die von Herrn Prym für $a = 1$ übergehen, sind schon

in dem Falle, wo a reell ist, von Legendre (Fonctions elliptiques, II. p. 502) betrachtet worden. Mit Hülfe der Formel

$$P(x) = \frac{1}{\sin 2\pi x}\int_{-\pi}^{+\pi} t^x e^{-t}\, d\varphi\,, \quad t = ae^{2\varphi\sqrt{-1}}$$

lassen sich verschiedene andere interessante, aber ziemlich complicirte Darstellungsformen für jene Functionen geben. Wenn x eine ganze Zahl ist, so nimmt man für $P(x)$ die Definition $\lim P(x+\varepsilon)_{\varepsilon=0}$.

Mn. (M.)

A. Berger. En generalisation af några formler i Gammafunktionens teori. Stockh. Öfv. 1881. 13-30.

Wenn die Function $f(x)$ für $x > 0$ endlich und continuirlich bleibt, wenn ferner

$$\int^{\infty} f'(x) = \int^{\infty} f''(x) = \cdots = 0$$

ist, und für $x > -1$

$$F(x+1) - F(x) = f(x)$$

gesetzt wird, so findet der Verfasser, dass

$$F(x+1) = \int_1^x f(z)\,dz + \frac{f(x)}{2} + K_0$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}\Big[\frac{f(k+x-1)+f(k+x)}{2} - \int_k^{k+1} f(x-1+z)\,dz\Big],$$

worin

$$K_0 = \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{k=x}\Big[\frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(z)\,dz\Big].$$

Diese Formel combinirt der Verfasser nur mit der Euler'schen Summenformel, und findet dadurch eine Reihe von Formeln, aus welchen für den speciellen Fall

$$f(x) = \log(x)$$

bekannte Gamma-Formeln erhalten werden. So wird z. B. die Gleichung

$$\Gamma(1+x)\cdot\Gamma(1-x) = \prod_{k=1}^{k=\infty}\frac{k^2}{k^2-x^2} = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

aus der allgemeinen Formel

$$F(1+x)+F(1-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} [-f(k-x)+2f(k)-f(k+x)]$$

hergeleitet. E.

E. Goursat. Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables. C. R. XC. 903-904, 1044-1047.

Herr Picard hatte die Riemann'sche Definition der hypergeometrischen Functionen durch ihr Verhalten in der Umgebung der singulären Stellen der unabhängigen Veränderlichen auf Functionen zweier Veränderlichen x und y ausgedehnt und war dabei auf die Appell'sche Function $F_1(\alpha\beta\beta'\gamma xy)$ geführt worden (C. R. XCI. 1267., Ann. de l'Éc. N. X. 305., s. F. d. M. XII. (1880) 329). Der Verfasser zeigt, dass man in analoger Weise die Appel'schen Functionen F_2 und F_3 definiren kann, wenn man die Picard'schen Festsetzungen dahin modificirt, dass, statt zwischen vier, zwischen fünf Zweigen der Function $z = F(xy)$ eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten bestehen soll. Demgemäss werden hier in der Nachbarschaft der singulären Punkte die Formen für vier Zweige der Function, in ähnlicher Weise wie bei Herrn Picard für drei Zweige, vorgeschrieben. Die singulären Stellen sind $x = 0, 1, \infty$ für jedes y, $y = 0, 1, \infty$ für jedes x und $x = a$, $y = b$ wenn $ab = a+b$. Jede Function z, die diese Bedingungen erfüllt, genügt zwei linearen Differentialgleichungen vierter Ordnung, von denen jede nur die Ableitungen von z nach einer der Variablen x, y enthält. Diese Gleichungen werden durch jedes gemeinsame Integral zweier linearer, simultaner, partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ebenfalls von Herrn Appell aufgestellt sind, befriedigt. Zweck der zweiten Note ist, zu beweisen, dass die erwähnten simultanen Differenzialgleichungen vierter Ordnung kein anderes gemeinschaftliches Integral zulassen, als diejenigen, die dem Appell'schen System zweiter Ordnung genügen.

Hr.

P. APPELL. Sur les functions hypergéométriques de deux variables. Résal J. (3) VIII. 173-217.

Der Herr Verfasser hat für die Gauss'sche hygeometrische Reihe eine Verallgemeinerung gefunden, welche die wesentlichen Eigenschaften jener Reihe beibehält; dieselbe besteht in der Einführung der vier Functionen:

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y) = \Sigma \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)} x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y) = \Sigma \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)} x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y) = \Sigma \frac{(\alpha,m)(\alpha',n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)} x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma',x,y) = \Sigma \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)} x^m y^n,$$

wo $(\lambda,k) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)$, $(\lambda,0) = 1$, und die Summation über m und n von Null bis Unendlich zu erstrecken ist. Die vorliegende Arbeit ist einer zusammenhängenden und ausführlichen Darstellung der Untersuchungen über diese Functionen gewidmet, deren hauptsächlichsten Resultate der Verfasser in den C. R. von 1880 t. XC. p. 296-299, 731-735, 977-980, t. XCI. p. 304-366 mitgeteilt hat; es sei daher auf die Referate in diesem Jahrbuche (1880) XII. p. 296f., sowie auf die zweite Auflage von Heine's Handbuch der Kugelfunctionen Bd. II. Zusätze p. 359f. verwiesen.

T.

B. Elliptische Functionen.

C. FORMENTI. Riduzione di integrali di funzioni algebriche ad integrali di funzioni razionali. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 165-173.

Der Herr Verfasser nennt Periode einer Function $\psi(z)$ eine Function $\lambda(z)$, die der Functionalgleichung

$$\psi(\lambda) = \psi(z)$$

genügt, und beweist den Satz, dass wenn $\lambda(z)$ eine Periode der

rationalen Function $\psi(z)$ ist, und die rationale Function $P(z)$ der Bedingung

$$P(\lambda)d\lambda = P(z)dz$$

genügt, das algebraische Differential

$$\frac{P(z)dz}{\alpha[\varphi_{-1}\psi(z)]},$$

wo $\alpha(z), \varphi(z)$ rationale Functionen sind und $\varphi_{-1} = \frac{1}{\varphi}$, sich mittels der Substitution $\psi(z) = \varphi(y)$ in das rationale Differential

$$\frac{F(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)dy}{\alpha(y)}$$

transformiren lässt. Als Beispiel dient

$$\psi(z) = \frac{A(z-a)^m - B(z-b)^m}{C(z-a)^m - D(z-b)^m}.$$

Von diesem Theorem wird eine Anwendung gemacht auf die Reduction specieller elliptischer Integrale auf Integrale rationaler Functionen. M.

G. A. Stuart. Reduction of integrals of the form

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{(z^n - c^n)\sqrt{z^n - b^n}}.$$

Quart. J. XVIII. 245-260.

Die Reduction des obigen Integrals, die für $n = 3$, Quart. J. XVIII. 66, durchgeführt ist, beruht auf folgendem Theorem: Ist

$$\frac{dz}{f(z^n)} = dx,\ z = \varphi(x),\ \omega z = \varphi(y),\ \omega^n = 1,$$

dann ist

$$\frac{\omega\, dz}{f(z^n)} = dy,$$

oder

$$dy = \omega\, dx,$$

und

$$y = \omega x + C,$$

folglich:

$$\int \frac{z^{m-1}\,dx}{(z^n-c^n)f(z^n)} = \frac{1}{nc^{n-m}}\Sigma\int\frac{\omega^m dx}{z-\omega c} = \frac{1}{nc^{n-m}}\Sigma\int\frac{\omega^m\,dx}{\varphi(x)-\varphi(\omega a+C)}.$$

Wenn $f(z^n) = \sqrt{z^n \pm b^n}$ oder $= \sqrt{b^n - z^n}$, so kann $\varphi(x)$ für $n = 3, 4$ oder 6 durch elliptische Functionen ausgedrückt werden. Eingehend wird der Fall $n = 4$ behandelt. Schliesslich wird gezeigt, dass für $n = 8$ die Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^8 \pm b^8}} \text{ und } \int \frac{dz}{\sqrt{b^8 - z^8}}$$

sich auf eine Summe zweier elliptischen Integrale zurückführen lassen, dass aber $\varphi(x)$ nicht durch elliptische Functionen von x ausgedrückt werden kann. M.

S. Günther. Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques. S M. F. Bull. X. 88-97.

Als pseudoelliptische Integrale bezeichnete Malet Integrale von der Form

$$\int f[x, R(x)]\,dx,$$

wo f irgend eine algebraische Function und $R(x)$ die Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades. Diese lassen sich nicht auf die Legendre'schen Normalformen bringen, doch gelingt es bisweilen, sie in endlicher Form zu integriren. Mit solchen Integralen hat sich bereits Legendre beschäftigt (Traité des fonctions ell. Paris 1827. t. I. p. 136), später Clausen (Astr. Nachr. Nr. 442, Grunert Arch. III. 335) und Malet (Brioschi Ann. (2) VI. 252, s. F. d. M. VII. (1875) 147). Herr Günther beschäftigt sich mit dem Integrale

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+8)\sqrt{x^3-1}},$$

welches Clausen

$$= \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{3x(x-1)}{(4-x)\sqrt{x^3-1}}$$

$$+ \frac{1}{12\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}$$

gefunden hat; und indem er versucht, den Weg, auf welchem Clausen zu diesem Resultate gelangt ist, zu ermitteln, gewinnt er ein Criterium, mit dessen Hülfe man in gewissen Fällen entscheiden kann, ob ein vorgelegtes elliptisches Integral sich in endlicher Form darstellen lässt. M.

O. Rausenberger. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. I. Kronecker J. XCIII. 328-333.

Wie der Herr Verfasser bereits in seiner Abhandlung: „Theorie der allgemeinen Periodicität" (Clebsch Ann. XVII. 379, s. F. d. M. XIII. (1881) 317) hervorgehoben hat, können an Stelle der doppeltperiodischen elliptischen Functionen mit Vorteil Transcendenten mit einfacher unelliptischer Periode eingeführt werden, d. h. Functionen, die der Gleichung

$$f(px) = f(x)$$

genügen. Als Normalform der Functionen, aus denen sich die multiplicatorisch periodischen Transcendenten zusammensetzen, dient:

$$\eta(p,x) = \Sigma p^{n^2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

$$= \Pi(1-p^{2n+2})(1+p^{2n+1}x)\left(1+\frac{p^{2n+1}}{x}\right), (n = 0, 1, \dots \omega),$$

und mod. $p < 1$. An der Function

$$\varphi(x) = \frac{\eta_0(p, \alpha x)}{\eta_0(p,x)},$$

wo

$$\eta_0(p,x) = \frac{\eta(p^{\frac{1}{4}}, ix) + \eta(p^{\frac{1}{4}}, -ix)}{2} = \eta(p, -x^2)$$

und α eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist, wird gezeigt, dass sich die meisten für die elliptischen Functionen gültigen Relationen auf die multiplikatorisch periodischen übertragen lassen.

M.

C. Stolp. De elliptische integralen van der eerste soort. Leiden.

Die Dissertation behandelt die elliptischen Integrale der ersten Art. Der Verfasser kann namentlich die künstliche Weise nicht billigen, auf welche gewöhnlich die Substitution in's Werk gesetzt wird, um die biquadratische Form auf die bekannte Form $C(1-z^2)(1-k^2z^2)$ zurückzuführen. Im ersten Abschnitt betrachtet er die Transformation des Ausdruckes Ax^2+Bx+C in $A(x-a_1)(x-a_2)$ und das übereinstimmende Integral

$$\int \frac{dx}{A(x-a_1)(x-a_2)}.$$

Im zweiten Abschnitt gelangt er zu den Ausdrücken vom dritten und vierten Grad und untersucht die Folgerungen, welche alle Substitutionen von der Form $\frac{\alpha_1+\beta_1 y}{\alpha_2+\beta_2 y}$ ergeben. Bei dem Ausdruck vom dritten Grad werden sechs brauchbare Formen der Substitution erhalten, welche in einer Tafel zusammengesetzt werden. Bei dem Ausdruck vom vierten Grad giebt es acht, die in einer zweiten Tafel zusammengesetzt werden, welche als besonderen Fall die erste enthält. Darauf werden ebenso andere Substitutionen untersucht, so die von der Form $\sqrt{\frac{\gamma_1+\delta_1 z}{\gamma_2+\delta_2 z}}$, welche zur Ableitung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda\mu x^2\cos\theta+\mu^2x^4}}$ dienen kann, wie Enneper bereits gezeigt hat; weiter die Substitutionen von der Form $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}=y^2$, welche bereits Lagrange und Legendre eingeführt haben. Sodann wendet sich der Verfasser zu den Transformationen von Gauss und Landen, welche sich an das vorige sofort anschliessen, und behandelt das Additionstheorem für elliptische Integrale der ersten Art. Nun folgt die transcendente Substitution $x=\sin^2\varphi$ und $x=\tang^2\varphi$, wobei für den gewöhnlichen Sinus auch der hyperbolische genommen wird. Im letzten Abschnitt werden einige Methoden, wonach die hier behandelten elliptischen Integrale in Reihen entwickelt werden

können, besprochen und auch andere Näherungsmethoden behandelt. G.

N. Herz. Einige Beziehungen zwischen den Integralen der elliptischen Functionen. Hoppe Arch. LXVII. 343-374.

Die hier gegebenen Relationen entspringen aus der Betrachtung einer rationalen Function der drei Grössen $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$. Zunächst wird für das Integral von der Form

$$J = \int \mathrm{sn}^m x\ \mathrm{cn}^n x\ \mathrm{dn}^p x\ dx,$$

wo m, n, p ganze positive Zahlen sind, eine Reihe von Reductionsformeln gegeben und gezeigt, dass das Integral jeder ganzen rationalen Function der drei elliptischen Functionen sich wieder durch diese selbst oder Logarithmen derselben oder endlich durch elliptische Integrale zweiter Gattung des sn darstellen lässt. Im Folgenden werden dann die gebrochenen Functionen behandelt.

M.

J. Thomae. Ueber specielle elliptische Functionen. Schlömilch Z. XXVII. 181-189.

Die Formeln für die Umkehrung elliptischer Integrale erster Gattung mittelst Quotienten von Thetafunctionen werden sehr complicirt, wenn die Argumente nicht, wie gewöhnlich, um Systeme halber Periodicitätsmodeln von einander verschieden, sondern wenn Systeme anderer rationaler Teile der Perioden eintreten. In dem speciellen Falle jedoch, wo das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-k_1)^2(z-k_2)^2(z-k_3)^2}}$$

umzukehren ist, werden die betreffenden Formeln einfach und elegant. Zur Umkehrung werden hier Quotienten von Thetafunctionen benutzt, deren Argumente sich um Systeme von Drittelperioden unterscheiden. Der Herr Verfasser ist auf diese Func-

tionen bei der Untersuchung des logarithmischen Potentials einer gleichseitig-dreieckigen Platte gestossen. M.

O. Schlömilch. Notiz über gewisse elliptische Integrale. Schlömilch Z. XXVII. 62-64.

Genügen die beiden Functionen $F(x)$ und $f(x)$ den Bedingungen

$$F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right) = \text{const.}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x),$$

so erhält man die Reduction

$$\int_0^\infty F(x)\cdot f(x)\frac{dx}{x} = \text{const.}\int_0^1 f(x)\frac{dx}{x}.$$

Dieses auf die elliptischen Integrale erster und zweiter Art

$$F(x) = F\left(\varkappa, \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{\varkappa'}}\right),$$

$$F(x) = E\left(\varkappa, \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{\varkappa'}}\right)-\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2 x}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}}$$

angewendet, ergiebt die merkwürdigen Relationen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F(\varkappa,\varphi)f(\sqrt{\varkappa'}\,\text{tg}\,\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\,d\varphi = F^1(\varkappa)\int_0^1\frac{f(x)}{x}\,dx$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{E(\varkappa,\varphi)\,f(\sqrt{\varkappa'}\,.\,\text{tg}\,\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$=\int_0^1\left\{E^1(x)+\frac{\varkappa^2 x}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}}\right\}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

M.

J. Thomae. Ueber elliptische Integrale zweiter Gattung. Schlömilch Z. XVII. 179-180.

Für die elliptischen Integrale zweiter Gattung wird eine Entwickelung von folgender Form gegeben:

$$A.t(u) + Bu = \sqrt{\xi(1-\xi)(1-k\xi)}$$
$$.(a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \cdots + a_{n-1}\xi^n + \cdots),$$

wo

$$t(u) = \int_0^u \xi . du, \quad du = \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}}, \qquad \xi = \operatorname{sn} u.$$

Es wird für die a eine Recursionsformel aufgestellt. M.

HERMITE. Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce. C. R. XCV. 901-904.

Der zuerst von Jacobi gegebene Ausdruck

$$\int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}$$

schliesst einen Logarithmus ein, dessen vielfachen Werte den verschiedenen Werten entsprechen, die das Integral längs des von der Variabeln beschriebenen Weges annimmt. Für den Fall der vollständigen Functionen

$$\Pi(a) = \int_0^K \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx,$$

$$i\Pi'(a) = \int_K^{K+iK'} \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx$$

wird diese Mehrdeutigkeit hier aufgehoben, indem die Integration längs einer graden Linie geschieht, und eine genaue Bestimmung des Werthes gegeben. M.

A. CAYLEY. On a formula relating to the elliptic integral of the third kind. Lond. M. S., Proc. XIII. 175-176.

Die Differentiation des Integrals dritter Gattung in Bezug auf den Parameter wird in der eleganten Form

$$\frac{d}{d\theta}\cdot\frac{b}{a-x} - \frac{d}{du}\cdot\frac{y}{x-a} = k^2(a-x),$$

wo $n = \frac{1}{a}$, $a = \operatorname{sn}^2\theta$, $b = \operatorname{sn}\theta.\operatorname{cn}\theta.\operatorname{dn}\theta$, dargestellt.

M.

E. GOURSAT. Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce. S. M. F. Bull. X. 44-51.

Wie Herr Picard (C. R. 28 avril 1879, s. F. d. M. XI. 286) gezeigt hat, kann jede mehrdeutige Function der complexen Variabeln x, welche in der ganzen Ebene und auf der ganzen Kugel nur drei singuläre Punkte $(0, 1, \infty)$ hat, als eindeutige Function des Quotienten $\omega = \frac{iK'}{K}$ angesehen werden, wo K und K' für beliebige Werte von x durch die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (s. Fuchs, Borchardt J. LXXI. 91, s. F. d. M. II. (1870) p. 248)

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}y=0$$

definirt werden. Die so definirte Function ω der Variabeln x hat in der ganzen Ebene nur drei kritische Punkte $(0, 1, \infty)$ und besitzt folgende Eigenschaften. Der Coefficient von i in ω ist für jedes x positiv; ferner, wenn man von einem Punkte A der Ebene mit einem Anfangswerte ω_0 ausgeht und die Variable x irgend einen geschlossenen Weg beschreiben lässt, der nicht durch einen der Punkte 0 oder 1 geht, so kommt man zum Ausgangspunkte mit einem Werte $\frac{a\omega_0+b}{c\omega_0+d}$ zurück, wo a, b, c, d vier ganze, der Bedingung $ad-bc=1$ genügende Zahlen sind. Stützt man sich auf diese Eigenschaften, so ist es leicht zu zeigen, dass, wenn der von x durchlaufene Weg die Punkte 0 oder 1 überschreitet, man niemals zum Anfangswert zurückkommt. Es ergiebt sich, dass nur ein einziger Weg für die Variable x existirt, der von ω_0 zu $\frac{a\omega_0+b}{c\omega_0+d}$ führt, wenn man alle Wege als identisch ansieht, die ohne Ueberschreitung der Punkte 0 und 1 ineinander übergeführt werden können. Diese Eigenschaft wird hier von Herrn Goursat bewiesen, indem er ganz allein die Veränderungen der Integrale der obigen Differentialgleichung in der Umgebung eines der kritischen Punkte untersucht. M.

A. Cayley. Note on Landen's theorem. Lond., M. S., Proc. XIII. 47-48.

Landen hat sein Theorem, welches einen Hyperbelbogen durch zwei Ellipsenbogen darstellt, (Phil. Trans. LXV. (1775). 283-289) in folgender Form erhalten:

$$\sqrt{\frac{m^2+gx^2}{m^2-x^2}}\,dx = \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(m-n)^2-t^2}{(m+n)^2-t^2}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(m+n)^2-t^2}{(m-n)^2-t^2}}\right\}dt,$$

wo

$$t = gx\sqrt{\frac{m^2-x^2}{m^2-gx^2}} \quad \text{und} \quad g = \frac{m^2-n^2}{n^2}.$$

Hier wird diese Form mit der der gewöhnlichen Transformation

$$\frac{(1-k')dx}{\sqrt{1-x^2.1-k^2x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2.1-\lambda^2y^2}}, \quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'},$$

$$y = (1+k')x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}$$

identificirt. M.

J. Griffiths. Note on Professor Cayley's paper. Lond., M. S., Proc. XIII. 49-51.

Mit Bezug auf die vorstehende Note teilt Herr Griffiths folgende Transformation mit. Wenn

$$\sqrt{1-e^2x^2}+e\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+e)^2-\frac{4ey^2}{(1+e)^2}},$$

so ist:

$$\left\{\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}+e^2\sqrt{\frac{1-x^2}{1-e^2x^2}}+2e\right\}dx = \sqrt{\frac{(1+e)^2-\frac{4ey^2}{(1+e)^2}}{(1+e)^2-y^2}}\,dy.$$

M.

J. Griffiths. Elementary analytical proof of Grave's and MacCullagh's theorems, with an extension of the former. Lond., M. S., Proc. XXXI. 177-179.

Es wird bewiesen, dass, wenn

$$t^2 = (a \sin\vartheta - a' \sin\vartheta')^2 + (b \cos\vartheta - b' \cos\vartheta')^2,$$

worin

$$\frac{a}{a'} \sin\vartheta \sin\vartheta' + \frac{b}{b'} \cos\vartheta \cos\vartheta' = 1, \; a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$$

dann

$$dt = \sqrt{a'^2 \cos^2\vartheta + b'^2 \sin^2\vartheta} \,.\, d\vartheta - \sqrt{a'^2 \cos^2\vartheta + b'^2 \sin^2\vartheta'} \,.\, d\vartheta'$$

ist, und dass die Identität besteht:

$$(aa' \cos\vartheta \cos\vartheta' + bb' \sin\vartheta \sin\vartheta')^2$$
$$= (a'^2 \cos^2\vartheta + b'^2 \sin^2\vartheta)(a'^2 \cos^2\vartheta' + b'^2 \sin^2\vartheta').$$

Durch die geometrische Deutung der ersten Relation ergiebt sich eine Erweiterung von Grave's Satz. Schliesslich wird gezeigt, wie das hier entspringende Additionstheorem für die elliptischen Integrale zweiter Gattung in die gebräuchliche Form übergeführt werden kann. M.

P. A. MacMahon. Sur un résultat de calcul obtenu par M. Allégret. C. R. XCV. 831-832.

Bezieht sich auf eine Arbeit, die im ersten Bande des Jahrbuchs (1868) p. 136-137 besprochen worden ist. Herr Allégret hatte das algebraische Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{(A + 3Bx + 3Cx^2 + Dx^3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{dy}{(A + 3By + 3Cy^2 + Dy^3)^{\frac{2}{3}}} = 0$$

in irrationaler Form dargestellt. Herrn Mac Mahon ist es gelungen, dem Integral eine rationale Form zu geben. O.

P. A. MacMahon. Integration of an equation connected with elliptic functions. Brit. Ass. Rep. 1882.

Die hier betrachtete Gleichung

$$\frac{dx}{X^{\frac{2}{3}}} + \frac{dy}{Y^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

wo

$$X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \quad Y = A + By + Cy^2 + Dy^3,$$

wurde von Allégret (C. R. LXVI. 1144) integrirt. Es ergab sich das Resultat

$$A\left(\frac{yx^{\frac{1}{3}}-xy^{\frac{1}{3}}}{x-y}\right)^{3}+\alpha xy\left[D-\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{xy}\right)\right]^{3}=0,$$

wo α eine willkürliche Constante ist. Die vorliegende Note zeigt, wie man das Resultat in rationaler Form erhalten kann.

Csy. (M.).

A. G. Greenhill. Note on Professor Cayley's paper on the elliptic function solution of the equation $x^3+y^3-1=0$. Cambr. Proc. IV. 223-228.

Die Arbeit des Herrn Cayley erschien in Proc. of Cambr. IV. 106-109 (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 366). Herr Greenhill zeigt, dass, wenn $k=\sin 15^0$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{(1+\operatorname{cn}u)^2}=\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a}{(1+\operatorname{cn}a)^2}$$

giebt: $\operatorname{cn}u=\operatorname{cn}a$, oder $\operatorname{cn}\omega a$, oder $\operatorname{cn}\omega^2 a$, wo ω eine imaginäre dritte Einheitswurzel ist. Er erwähnt ferner, dass Herr Mac Mahon gezeigt habe, dass das Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{(A+3Bx+3Cx^2+Dx^3)^{\frac{2}{3}}}+\frac{dy}{(A+3By+3Cy^2+Dy^3)^{\frac{2}{3}}}=0$$

sei:

$$(A+B(x+y+z)+C(yz+zx+xy)+Dxyz)^3$$
$$=(A+3Bx+3Cx^2+Dx^3)(A+3By+3Cy^2+Dy^3)(A+3Bz+3Cz^2+Dz^3),$$

wo z eine willkürliche Constante ist, und giebt eine Folgerung aus diesem Satze.

Glr. (M.).

J. W. L. Glaisher. Proof of the addition equation for elliptic integrals of the second kind by means of the q-series. Mess. (2) XII. 43-48.

Es wird ein algebraischer Beweis für das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung

$$Z(u)+Z(v)-Z(u+v)=k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}(u+v)$$

gegeben, indem für sn u und $Z(u)$ die q-Reihen genommen werden, nämlich:

$$\mathrm{sn}\,u = \frac{\pi}{2kK}\left\{\frac{4q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\sin x + \frac{4q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3}\sin 3x + \frac{4q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5}\sin 5x + \dots\right\},$$

$$Z(u) = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{4q}{1-q^2}\sin 2x + \frac{4q^2}{1-q^4}\sin 4x + \frac{4q^3}{1-q^6}\sin 6x + \dots\right\},$$

wo $u = \frac{Kx}{\pi}$ ist. Glr. (M.).

Much. Erklärung. Schlömilch Z. XXVII. 192.

Anerkennung der Priorität Schröter's betreffs des im vorigen Bande d. Zeitschrift p. 333 (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 354.) ausgesprochenen Satzes. O.

O. Stolz. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Innsbruck Ber. XII. 14-16.

Durch Betrachtung der Doppelreihe

$$\sum_n \sum_{n'} \frac{2}{(n\,.\,2\omega + n'\,.\,2\omega' - u)^3} \qquad \binom{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}{n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

beweist Herr Stolz, dass die mit den Werten

$$g_2 = 60\Sigma'(n.2\omega + n'.2\omega')^{-4}$$
$$g_3 = 140\Sigma'(n\,.\,2\omega + n'\,.\,2\omega')^{-6}$$

gebildete Weierstrass'sche Function $\wp(u, g_2, g_3)$ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

befriedigt, und zeigt durch Entwickelung der Function $\wp'(u, g_2, g_3)$ in Partialbrüche nach Cauchy's Methode, wie man ungezwungen von der $\wp(u, g_2, g_3)$, worin g_2, g_3 als gegeben anzusehen sind, zur obigen Doppelreihe gelangt. M.

K. Weierstrass. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berl. Ber. 1882. 443-451.

Der Herr Verfasser entwickelt zunächst eine Reihe von Relationen zwischen den Functionen

$$\sigma(u\,|\,\omega,\omega'),\ \sigma_1(u\,|\,\omega,\omega'),\ \sigma_2(u\,|\,\omega,\omega'),\ \sigma_3(u\,|\,\omega,\omega')$$

und deren partiellen Ableitungen nach u, ω, ω'. Aus diesen folgt, dass jede partielle Ableitung der Function σ nach ω und ω' dargestellt werden kann in der Form:

$$F_0\sigma + F_1\frac{\partial\sigma}{\partial u} + F_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \cdots,$$

wo F_0, F_1, F_2, ... ganze Functionen von ω, ω', η, η', g_2, g_3, u sind; ferner, dass jede partielle Ableitung von σ_λ nach ω, ω' sich in der Form

$$F_0^{(\lambda)}\sigma + F_1^{(\lambda)}\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial u} + F_2^{(\lambda)}\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial u^2} + \cdots$$

darstellen lässt, wo $F_0^{(\lambda)}$, $F_1^{(\lambda)}$, $F_2^{(\lambda)}$, ... ganze Functionen von ω, ω', η, η', ε_λ, e_λ, u sind; drittens, dass jede partielle Ableitung von σ nach g_2, g_3 die Form

$$G_0\sigma + G_1\frac{\partial\sigma}{\partial u} + G_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \cdots$$

hat, wo jedes G einé ganze Function von g_2, g_3, u, dividirt durch eine Potenz von $g_2^3 - 27\,g_3^2$ ist; und endlich, dass jede partielle Ableitung von σ_λ nach e_λ, ε_λ ein Ausdruck von der Form

$$G_0^{(\lambda)}\sigma + G_1^{(\lambda)}\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u} + G_2^{(\lambda)}\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial u^2} + \cdots$$

ist, wo die $G^{(\lambda)}$ ganze Functionen von u, e_λ, ε_λ, dividirt durch eine Potenz von $(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)$ sind.

Die gewonnenen Differentialgleichungen werden im zweiten Abschnitte auf die Entwickelung der Functionen σ, σ_λ nach Potenzen von u angewendet. M.

G. Frobenius und L. Stickelberger. Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten. Kronecker J. XCII. 311-327.

Die elliptischen Functionen werden hier als Functionen der drei Variabeln u, ω, ω' oder u, g_2, g_3 aufgefasst, indem die Perio-

den 2ω, $2\omega'$ als unabhängige Veränderliche angesehen werden, die nur der Beschränkung unterliegen, dass sie weder unendlich gross, noch unendlich klein werden dürfen und dass ihr Verhältnis nicht durch reelle Werte hindurchgehen darf. Die Herren Verfasser bedienen sich durchweg der von Herrn Weierstrass eingeführten Bezeichnung. Es werden die partiellen Differentialgleichungen, denen eine elliptische Function, als Function dreier Variabeln betrachtet, genügt, aufgestellt, und zu dem Zweck jene Function zunächst als Function von u, ω, ω' aufgefasst, hernach aber eine Transformation der erhaltenen Differentialgleichungen durch Einführung der Variabeln g_2, g_3 für ω, ω' vorgenommen. M.

G. Frobenius. Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art. Kronecker J. XCIII 53-68.

Unter einer elliptischen Function zweiter Art versteht man, nach Hermite (C. R. LXXXV.), jede Function, welche im Endlichen überall den Charakter einer rationalen hat, und deren logarithmische Ableitung doppelt-periodisch ist. Im Vorliegenden wird die Theorie dieser Functionen auf die der Functionen erster Art zurückgeführt mit Hülfe der Function

$$q(u) = \frac{\sigma(2\mu\omega+2\mu'\omega'-u)}{\sigma(2\mu\omega+2\mu'\omega')\,.\,\sigma(u)}\,e^{(2\mu\eta+2\mu'\eta')u}.$$

Der Herr Verfasser beweist folgende allgemeinen Eigenschaften dieser Functionen: I. „Eine elliptische Function zweiter Art, die für keinen Wert unendlich gross wird, verschwindet identisch.“ II. „Eine solche Function wird für ebenso viele incongruente Werte Null wie unendlich.“ III. „Sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ die incongruenten Werte, für die eine elliptische Function zweiter Art verschwindet, und $b_1, b_2, \dots, b_n$ die Werte, für die sie unendlich wird, so ist

$$\Sigma a - \Sigma b \equiv 2\mu\omega + 2\mu'\omega'.\text{“}$$

Die folgenden Paragraphen behandeln die Addition und Multiplication, die Multiplication und Division, und die Transformation dieser Functionen. M.

TH. CRAIG. Some elliptic function formulae. Sylv., Am. J. V. 60-75.

Neue Herleitung der in Prof. Cayley's „Treatise on elliptic functions“, p. 102 stehenden Formeln

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{dk} = -\frac{k}{k'^2}\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\int_0 \mathrm{cn}^2 u\,du + \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{cn}^2 u,$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{dk} = \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\int_0 \mathrm{cn}^2 u\,du - \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}^2 u\,.\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{dk} = \frac{k^3}{k'^2}\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\int_0 \mathrm{cn}^2 u\,du - \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}^2 u\,.\,\mathrm{dn}\,u$$

für die Ableitung der drei Functionen sn, cn, dn nach dem Modul, die hier in etwas anderer Form gegeben werden. Ferner wird gezeigt, dass sich mit Hülfe zweier von Glaisher gegebenen Formeln Ausdrücke für die Integration der Producte

$$\mathrm{sn}^\alpha u\,\mathrm{cn}^\beta u\,du,\quad \mathrm{cn}^\alpha u\,.\,\mathrm{dn}^\beta u\,du,\quad \mathrm{dn}^\alpha u\,\mathrm{sn}^\beta u\,du$$

gewinnen lassen, wenn entweder α und β beide grade, oder eine grade, die andere ungrade, oder endlich beide ungrade. Ebenso leicht ergeben sich Ausdrücke für $\int_0 \mathrm{sn}^\alpha u.\mathrm{cn}^\beta u\,du^\gamma u.du.$

M.

M. M. U. WILKINSON. On some formulae arising from the differentiation of elliptic functions with regard to the modulus. Lond., M. S. Proc. XIII. 212-216.

Durch Differentiation der Identität

$$2\mathrm{cn}(\alpha-\beta)\mathrm{cn}(\beta-\gamma)\mathrm{cn}(\gamma-\alpha) = 2-\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)-\mathrm{sn}^2(\beta-\gamma)-\mathrm{sn}^2(\gamma-\alpha) + k^2\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)\mathrm{sn}^2(\beta-\gamma)\mathrm{sn}^2(\gamma-\alpha)$$

nach k erhält der Verfasser die Formel:

$$\frac{1}{\mathrm{dn}\,x_1}\cdot\frac{d.\mathrm{am}\,x_1}{dk} + \frac{1}{\mathrm{dn}\,x_2}\cdot\frac{d.\mathrm{am}\,x_2}{dk} + \frac{1}{\mathrm{dn}\,x_3}\cdot\frac{d\,\mathrm{am}\,x_3}{dk} + \frac{1}{\mathrm{dn}\,x_4}\frac{d\,\mathrm{am}\,x_4}{dk}$$
$$= -\frac{k\,\mathrm{sn}(x_1+x_2)\mathrm{sn}(x_1+x_3)\mathrm{sn}(x_1+x_4)(1-k^2\mathrm{sn}\,x_1\,\mathrm{sn}\,x_2\,\mathrm{sn}\,x_3\,\mathrm{sn}\,x_4)}{\mathrm{dn}\,x_1\,\mathrm{dn}\,x_2\,\mathrm{dn}\,x_3\,\mathrm{dn}\,x_4},$$

wenn

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 0.$$

In dem Falle, wo

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0,$$

ergeben sich folgende fünf Formeln:

$$k^2k'^2 \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}r \operatorname{sn}s + \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v \operatorname{dn}r \operatorname{dn}s = k'^2 + k^2 \operatorname{cn}u \operatorname{cn}v \operatorname{cn}r \operatorname{cn}s,$$

$$\operatorname{cn}u \operatorname{cn}v \operatorname{dn}r \operatorname{dn}s - \operatorname{cn}r \operatorname{cn}s \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v = k'^2(\operatorname{sn}u \operatorname{sn}v - \operatorname{sn}r \operatorname{sn}s),$$

$$k^2 \operatorname{sn}(u+v)(\operatorname{sn}u \operatorname{sn}v - \operatorname{sn}r \operatorname{sn}s) = Zu + Zv + Zr + Zs,$$

$$k^2 \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}r \operatorname{cn}s \operatorname{dn}s - \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v \operatorname{dn}r \operatorname{cn}s \operatorname{cn}s + \operatorname{cn}u \operatorname{cn}v \operatorname{cn}r \operatorname{sn}s \operatorname{dn}s$$
$$= k^2 \operatorname{sn}(r+s)(\operatorname{sn}u \operatorname{sn}v - \operatorname{sn}r \operatorname{sn}s),$$

$$k^2 \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}r \operatorname{dn}s \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v \operatorname{dn}r \operatorname{sn}s$$
$$= \operatorname{sn}s \operatorname{dn}s + k^2 \operatorname{cn}s \operatorname{sn}(r+s)(\operatorname{sn}u \operatorname{sn}v - \operatorname{sn}r \operatorname{sn}s),$$

wo $u+v+r+s = 0$. Die beiden ersten Formeln sind bereits von den Herren Cayley u. H. J. S. Smith (Lond. M. S. Proc. X. 43 und 97., s. F. d. M. XI. (1879) 287. 314.) gegeben worden. Endlich werden einfache Ausdrücke für die Function

$$F = \frac{1}{k} \Pi \operatorname{dn} x \,.\, \Sigma \frac{1}{\operatorname{dn} x} \cdot \frac{d \operatorname{am} x}{dk},$$

wenn $\Sigma x = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0$ ist, mitgeteilt. M.

Faa de Bruno. Sur une nouvelle série dans les fonctions elliptiques. C. R. XCV. 22-23.

Die sich durch ausserordentliche Convergenz auszeichnende Reihe lautet:

$$\sqrt{\frac{K}{8\pi}}\left(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'}\right) = 1+2(q^{16}+q^{64}+q^{144}+\cdots+q^{(4p)^2}\cdots).$$

Für die Herstellung von elliptischen Tafeln auf 20 Decimalen würde bereits die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2K}{\pi}}}(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'})$$

genügen. M.

J. W. L. GLAISHER. On a theorem in elliptic functions. Brit. Ass. Rep. 1882.

Ein neuer Beweis des von Jacobi (Fundamenta Nova, p. 125-127) bewiesenen Satzes: „Wenn

$$\frac{u^n}{n!} = \frac{\operatorname{sn}^n u}{n!} + R_n^{(n+2)} \frac{\operatorname{sn}^{n+2} u}{(n+2)!} + R_n^{(n+4)} \frac{\operatorname{sn}^{n+4} u}{(n+4)!} + \cdots,$$

so genügen die R folgenden Gleichungen:

$$(2n-2)!\, k^{2n-1} \operatorname{sn}^{2n-1} u = R_1^{(2n-1)} k \operatorname{sn} u + R_3^{(2n-1)} \frac{d^2}{du^2} k \operatorname{sn} u + \cdots$$
$$+ R_{2n-1}^{(2n-1)} \frac{d^{(2n-2)}}{du^{2n-2}} k \operatorname{sn} u,$$

$$(2n-1)!\, k^{2n} \operatorname{sn}^{2n} u = -R_0^{(2n)} + R_2^{(2n)} k^2 \operatorname{sn}^2 u + R_4^{(2n)} \frac{d^2}{du^2} k^2 \operatorname{sn}^2 u + \cdots$$
$$+ R_{2n}^{(2n)} \frac{d^{(2n-2)}}{du^{(2n-2)}} k^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

worin $R_0^{(2n)}$ von u unabhängig ist."

Csy. (M.).

J. J. WALKER. Proof of the addition theorem for elliptic integrals of the second kind, and of Fagnano's theorem. Lond., S. M. Proc. XIII. 172-174.

Bekanntlich werden die Beweise der Additionstheoreme für die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung, analog dem Lagrange'schen Beweise für die erste Gattung, mit Hülfe der Eigenschaften des sphärischen Dreiecks gegeben (s. Graefe, Borchardt J. XC. 83, F. d. M. XII. (1880) 353.). Herr Walker geht, um das Additionstheorem für die zweite Gattung herzuleiten, von der Ellipse und deren Tangenten aus und betrachtet den Ueberschuss der Summe zweier von einem Punkte aus gezogenen Tangenten über den dazwischen liegenden Bogen. Ein besonderer Fall führt dann auf einen einfachen und unabhängigen Beweis des Satzes von Fagnano. M.

E. NOVARESE. Intorno ad alcune formole di Hermite per l'addizione delle funzioni ellittiche. Torino, Atti. XVII. 607-625.

E. NOVARESE. Intorno alla multiplicazione delle funzioni ellittiche. Torino, Atti XVII. 723-739.

Für die Additionstheoreme der drei elliptischen Functionen sn, cn, dn hat Herr Hermite in einer „Note sur la théorie des fonctions elliptiques", welche der sechsten Auflage von Lacroix' Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral T. II. p. 432 beigefügt ist, folgende Form gegeben:

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2+\cdots+u_{2n-1}) = \frac{\pm L}{\operatorname{sn}u_1 \operatorname{sn}u_2 \ldots \operatorname{sn}u_{2n-1}},$$

und ähnlich für cn und dn$u$. Die Constanten L etc. sind folgendermassen bestimmt. Wenn z eine der drei Functionen sn, cn, dn darstellt, und die Function

$$\varphi(u) = F(z^2) + \frac{dz}{du}\, z F_1(z^2)$$

betrachtet wird, wo F und F_1 ganze rationale Functionen vom Grade n und $n-2$ sind, so ergeben sich die $2n-1$ auftretenden Constanten aus der Gleichung

$$\varphi(u_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

und das von z unabhängige Glied des Polynoms F giebt die Zähler L etc. Diese Formel von Hermite wird nun in der ersten Note entwickelt, indem die Ausdrücke für

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2+\cdots+u_m),\ \operatorname{cn}(u_1+u_2+\cdots+u_m) \text{ etc.},$$

wo m irgend eine ganze Zahl ist, als Quotienten zweier Determinanten von der Ordnung m mit unzweideutigem Vorzeichen dargestellt werden. Da diese Darstellungen für $u_1 = u_2 = \cdots u_m = u$ in zwei Glieder übergehen, deren erstes sn(mu) etc., aber deren zweites die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so wird in der zweiten Note diese Unbestimmtheit dadurch vermieden, dass dem Multiplicationstheorem eine andere Form gegeben wird, die es auch als besonderen Fall des Additionstheorems erscheinen lässt.

Erreicht wird diese Umformung mit Hülfe eines Theorems des Herrn Siacci, nämlich: „Für

$$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x$$

reducirt sich der Quotient

$$\frac{\Sigma \pm \varphi_0(x_0)\,\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_{n-1}(x_{n-1})}{\Sigma \pm \psi_0(x_0)\,\psi_1(x_1)\ldots\psi_{n-1}(x_{n-1})}$$

auf

$$\frac{\Sigma \pm \varphi_0(x)\varphi_1'(x)\ldots\varphi_{n-1}^{(n-1)}(x)}{\Sigma \pm \psi_0(x)\psi_1'(x)\ldots\psi_{n-1}^{(n-1)}(x)}.$$

M.

J. W. L. Glaisher. On certain formulae in elliptic functions. Quart. J. XIX. 22-38.

Die ähnliche Gestalt der Formeln

$$\operatorname{tg}(A-B) = \frac{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\,.\,\operatorname{tg}B}$$

und

$$\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\,.\,\operatorname{sn}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\,.\,\operatorname{sn}^2\beta}$$

führt darauf, $\operatorname{tg}(A-B)$, $\operatorname{tg}(A-C)$, $\operatorname{tg}(B-C)$ etc. zu ersetzen durch:

$$ik\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta),\ ik\operatorname{sn}(\alpha-\gamma)\operatorname{sn}(\alpha+\gamma),\ ik\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\beta+\gamma),\ \text{etc.}$$

Auf diesem Wege gelangt Herr Glaisher zu einer Reihe von Formeln für die elliptischen Functionen, welche der von Jacobi (Crelle XV. und Werke I. 335-341) gegebenen

$$\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(y-z)+\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(z-x)+\operatorname{sn}(w-z)\operatorname{sn}(x-y)$$
$$+k^2\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(w-z)\operatorname{sn}(y-z)\operatorname{sn}(z-x)\operatorname{sn}(x-y) = 0$$

analog sind. Am Schluss wird gezeigt, dass man jede Relation, welche nur sin am enthält, in eine trigonometrische verwandeln kann, indem man entweder $k=0$ oder $k=1$ setzt. Vergl. Messenger X. 26 und Proc. of Cambr. Phil. Soc. III. 308, (siehe F. d. M. XII. (1880) p. 429.).

M.

J. W. L. Glaisher. On a method of deriving formulae in elliptic fonctions. Cambr. Proc. IV. 186-188.

Die Methode besteht in Folgendem: Wird $\operatorname{sn} u$, wenn der Modul gleich 1 ist, mit $\operatorname{sn}_1 u$ bezeichnet, so ist

$$\operatorname{sn}_1(u-v) = \frac{\operatorname{sn}_1 u - \operatorname{sn}_1 v}{1-\operatorname{sn}_1 u\,.\,\operatorname{sn}_1 v},$$

und, wenn der Modul $= k$ ist,

$$k\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta) = \frac{k\operatorname{sn}^2\alpha - k\operatorname{sn}^2\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta}.$$

Setzen wir also

$$\operatorname{sn}_1 u = k\operatorname{sn}^2\alpha,\quad \operatorname{sn}_1 v = k\operatorname{sn}^2\beta,$$

so verwandeln wir $\operatorname{sn}_1(u-v)$ in $k\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$. Wenn wir dann irgend welche Formeln haben, die die sn der Differenzen der Argumente enthalten, und wir setzen $k=1$, so können wir den sn jeder Differenz durch das k-fache Product der sn der Summen und Differenzen der Argumente ersetzen, z. B.

$$\operatorname{sn}_1(u-v) \text{ durch } k\operatorname{sn}(u-v)\operatorname{sn}(u+v),$$
$$\operatorname{sn}_1(u-w) \quad \text{„} \quad k\operatorname{sn}(u-w)\operatorname{sn}(u+w) \text{ etc.},$$

und wir erhalten eine neue Formel, die für den Modul k richtig ist. Glr. (M.).

M. M. U. Wilkinson. Some elliptic function formulae. Lond., M. S. Proc. XIII. 106-109.

Es wird eine Reihe von Formeln entwickelt, die aus dem Additionstheorem fliessen: zuerst solche, die der Formel

$$\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}(\alpha-\beta)+\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma\operatorname{sn}(\beta-\gamma)+\operatorname{sn}\gamma\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)$$
$$= -\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)$$

analog sind, z. B.

$$\operatorname{cn}\alpha\frac{\operatorname{sn}(\beta-\gamma)}{\operatorname{cn}(\beta-\gamma)}+\operatorname{cn}\beta\frac{\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)}{\operatorname{cn}(\gamma-\alpha)}+\operatorname{cn}\gamma\frac{\operatorname{sn}(\alpha-\beta)}{\operatorname{cn}(\alpha-\beta)}$$
$$= k^2\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma\frac{\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)}{\operatorname{dn}(\beta-\gamma)\operatorname{dn}(\gamma-\alpha)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)},$$

alsdann die Darstellungen von

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta+\gamma),\ \operatorname{cn}(\alpha+\beta+\gamma),\ \operatorname{dn}(\alpha+\beta+\gamma).$$

M.

W. W. Johnson. Systems of formulae for the sn, cn, and dn of $u+v+w$. Lond., M. S. Proc. XIII. 97-102.

In den hier gegebenen Formelsystemen für $\mathrm{sn}(u+v+w)$, $\mathrm{cn}(u+v+w)$ und $\mathrm{dn}(u+v+w)$ sind die früher von Herrn Glaisher (Messenger (2) XI.; s. F. d. M. XIII. (1881) 356) gegebenen, in denen der gemeinsame Nenner eine rationale Function von $\mathrm{sn}^2 u$, $\mathrm{sn}^2 v$ und $\mathrm{sn}^2 w$ ist, sowie die Caley'schen mit irrationalem Nenner, die aber für $w=0$ in die bekannten Formeln für die Summe zweier Argumente übergehen, enthalten. M.

J. W. L. Glaisher. Sur quelques équations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques. Ass. fr. 1880.

Bezeichnet man sn, cn, dn mit s, c, d und beziehen sich die Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf die sechs Argumente A, $B-C$, B, $C-A$, C, $A-B$, so ergiebt sich die den beiden Gudermann'schen (Crelle J. XVIII) analoge Formel

$$s_1 s_2 d_3 d_4 d_5 d_6 + s_3 s_4 d_1 d_2 d_5 d_6 + s_5 s_6 d_1 d_2 d_3 d_4 - k^2 k'^2 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 = 0,$$

und durch Combination mit den ersteren eine allgemeinere Identität, aus der wieder zahlreiche andere sich ableiten lassen.

M.

M. M. U. Wilkinson. On the addition equations for the elliptic and Θ-functions of the sum of n arguments. Lond., M. S. Proc. XIII. 110-125.

Relationen zwischen Determinanten, gebildet aus elliptischen Functionen einerseits und Thetaproducten andererseits.

H. St.

W. W. Johnson. On the spherical triangle proof of the addition equation in elliptic functions. Quart. J. XVIII. 365-370.

Wenn man nach Legendre's Vorgang die Seiten eines sphärischen Dreiecks als Amplituden elliptischer Integrale auffasst und

den Quotienten aus dem Sinus eines Winkels und dem Sinus der Gegenseite gleich dem Modul k setzt, ergeben sich zwölf Gleichungen zwischen den Stücken des sphärischen Dreiecks, aus deren jeder eine besondere Form des Additionstheorems entspringt. Diese Formen werden schematisch zusammengestellt.

M.

O. Rausenberger. Notiz zur Theorie der Modulfunctionen. Klein Ann. XX. 45-46.

Es wird gezeigt, dass zwischen den Reihen, die Herr Hurwitz („Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen", Clebsch Ann. 528., s. F. d. M. XIII. (1881) 364) der Constructionen der Modulfunctionen zu Grunde legt, und den ähnlichen Reihen, auf die Herr Poincaré (Sur les fonctions uniformes etc., Clebsch Ann. XIX., s. diesen Bd. p. 344) die Bildung von Transcendenten, welche die Modulfunctionen als speciellen Fall in sich schliessen, basirt, eine sehr einfache Beziehung besteht.

M.

W. W. Johnson. On the derivation of elliptic function formulae by transformation to the reciprocal and complementary modulus. Mess. (2) XI. 138-141.

Transformationen der Functionen sn$u$, cn$u$, dn$u$ mit dem Modul k in solche mit dem Modul k', $\frac{1}{k'}$, $\frac{ik}{k'}$, $\frac{ik'}{k}$, $\frac{1}{k}$.
Der Verfasser bedient sich der Bezeichnungen des Herrn Glaisher, nämlich sc$u$, ns$u$ etc. für $\frac{\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}$, $\frac{1}{\text{sn}\,u}$ etc., und geht noch weiter in der analogen Bedeutung von s_ν, c_ν, d_ν etc. Wenn z. B. s_1, c_1, d_1, n_1 und s_2, c_2, d_2, n_2 sich auf die Argumente u und v resp. beziehen, und S, C, D, N auf $u+v$, so lassen sich die Additionstheoreme so schreiben:

$$S = \frac{1}{n_1^2 n_2^2}\,(s_1\, n_1\, c_2 d_2 + s_2\, n_2\, c_1\, d_1),$$

$$C = \frac{1}{n_1^2 n_2^2}\,(c_1 \cdot c_2\, n_1\, n_2 - s_1\, s_2\, d_1\, d_2),$$

$$D = \frac{1}{n_1^2 n_2^2}\,(d_1\, d_2\, n_1\, n_2 - k^2\, s_1\, s_2\, c_1 c_2),$$

$$N = \frac{1}{n_1^2 n_2^2}\,(n_1^2\, n_2^2 - k^2\, s_1^2\, s_2^2).$$

Es werden nun die Aenderungen in den Buchstaben s, c, d, n angegeben für die oben erwähnten fünf Transformationen.

Glr. (M.).

Pocrovsky. Beziehungen zwischen den Moduln und ihren Complementären bei der Transformation 5ten Grades der elliptischen Functionen. Mosk. S. X. Lief. I. (Russisch).

Durch Anwendung der allgemeinen Formeln von Jacobi für Transformationen ungraden Grades werden hier die beiden folgenden Gleichungen gefunden:

$$\sqrt[4]{K\Lambda}(\sqrt{K} - \sqrt{\Lambda}) = \sqrt[4]{K'\Lambda'}\,(\sqrt{\Lambda'} - \sqrt{K'}),$$

$$\sqrt[4]{K\Lambda_1}(\sqrt{\Lambda_1} - \sqrt{K}) = \sqrt[4]{K'\Lambda'_1}(\sqrt{K'} - \sqrt{\Lambda'_1}).$$

Ty.

E. H. Glaisher. Formulae for sin $8n$, cn $8u$, dn $8u$ in terms of sn u. Edinb. Proc. XXXII. 480-485.

Die entsprechenden Formeln für $7u$ waren 1861 von Baehr in Grunert Arch. XXXVI. gegeben worden. Hier sind sie auf $8u$ erweitert. Die Berechnungen geschehen mit Hülfe der Functionen P, Q, R, S, welche die drei Zähler und die Nenner in den Ausdrücken sn $4u$, cn $4u$ und dn $4u$ sind.

Cly. (O.).

G. S. Ely. The algebraic solution of the modular equation for the septic transformation. Lond., M. S. Proc., XIII. 153-156.

Ausgehend von der Cayley'schen Form

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3}\right)^2$$

für die Transformation siebenten Grades gelangt Herr Ely auf rein analytischem Wege zu der Modulargleichung

$$(1-u^8)(1-v^8) = (1-uv)^8$$

für jene Transformation. M.

R. von Lilienthal. Ueber zwei Schaaren sphärischer Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen sind. Kronecker J. XCIII. 237-256

Die Coordinaten der hier betrachteten beiden Schaaren von Raumcurven haben die Form:

$$\begin{aligned}
x &= i\cos\alpha\,\{\psi(u-a_1)-\psi(u-a_2)+\psi(u-a_3)-\psi(u-a_4)\},\\
y &= i\sin\alpha\,\{\psi(u-a_1)-\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)+\psi(u-a_4)\},\\
z &= \psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)-\psi(u-a_4),
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
&\wp^{(2\nu-1)}(u-a_\alpha)+\lambda\wp^{(2\nu-3)}(u-a_\alpha)+\lambda_1\wp^{(2\nu-5)}(u-a_\alpha)+\cdots\\
&\quad+\lambda_{\nu-2}\wp'(u-a_\alpha)-\lambda_{\nu-1}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_\alpha) = \psi(u-a_\alpha),
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
x &= \cos\alpha\,\{\psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)+\psi(u-a_3)+\psi(u-a_4)\},\\
y &= \sin\alpha\,\{\psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)-\psi(u-a_4)\},\\
z &= i\,\{\psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)+\psi(u-a_4)\},
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
&\wp^{(2\nu)}(u-a_\alpha)+\lambda\wp^{(2\nu-2)}(u-a_\alpha)+\cdots+\lambda_{\nu-2}\wp''(u-a_\alpha)+\lambda_{\nu-1}\wp(u-a_\alpha)\\
&\quad= \psi(u-a_\alpha)
\end{aligned}$$

gesetzt ist, und

$$a_1 = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}, \quad a_2 = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}, \quad a_3 = -\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2},$$

$$a_4 = -\frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}.$$

Die hier vorkommenden Constanten lassen sich bis auf eine, die nebst dem Modul beliebig bleibt, so bestimmen, dass die betreffenden Curven auf einer Kugel liegen. Das Integral, welches die Bogenlänge der Curve darstellt, ist ein elliptisches Integral erster Art, vermehrt um die Differerenz zweier elliptischer Integrale dritter Art. [illegible] der zweiten Schaar der sphärischen Curven lässt sich [illegible] willkürliche Constante so bestimmen, dass das Bogenintegral [illegible] elliptisches Integral erster Gattung wird. Durch Integration [illegible] Functionen x, y, z erhält man zwei Schaaren [illegible] deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Gattung [illegible]. Die Integralcurven der zweiten Schaar liegen auf [illegible] Cylindern. Die Integralcurven derjenigen Curven [illegible] Schaar, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral [illegible] sind Asymptotenlinien von Minimalflächen, auf [illegible] Schaar algebraischer Curven liegt. M.

[illegible] Porism of the in- and circum-scribed [illegible] Mess. (2) XII. 100-105.

[illegible] besagt, dass, wenn ein Polygon zwei Kreisen [illegible] beschrieben werden kann, eine unendliche Zahl von [illegible] ebenso um- und eingeschrieben werden können. Es [illegible] Hülfe elliptischer Functionen die Beziehung zwischen [illegible] Radien der beiden Kreise, und a, ihrer Centrale, her[illegible] wenn das ein- und umschriebene Polygon ein Dreieck, [illegible] Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, Achteck und Neuneck ist.

Glr. (M.).

E. Fergola. Di alcune equazioni relative alla teoria delle funzioni ellittiche, e teoremi di geometria che vi si connettono. Nap., Rend. XXI. 132-133.

Die hier angeführten Sätze betreffen Polygone von m Seiten, welche einem Kreise eingeschrieben und einem anderen Kreise umschrieben sind. Z. B.: „Ist ein Polygon von m Seiten einem Kreise eingeschrieben und einem zweiten Kreise umschrieben, so bleibt der Schwerpunkt aller Berührungspunkte stets auf der Centrale beider Kreise, wie man auch das Polygon innerhalb des einen und um den andern verschieben mag." Dieser und ähnliche Sätze lassen sich mit Hülfe der elliptischen Functionen beweisen. Die dazu erforderlichen Formeln betreffen die Summen:

$$\sum_{m=1,\ldots} \sin[\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)+\mathrm{am}(u+mt)],$$

$$\sum_{m=1,\ldots} \cos[\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)+\mathrm{am}(u+mt)],$$

$$\sum \cos[\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)-\mathrm{am}(u+\overline{m+1}t)],$$

$$\sum \cos[\mathrm{am}(u+mt)-\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)],$$

$$\sum \mathrm{cn}(u+\overline{m-1}t)\,.\,\mathrm{cn}(u+mt),$$

$$\sum \mathrm{sn}(u+\overline{m-1}t)\,.\,\mathrm{sn}\,(u+mt).$$

M.

D. PADELETTI. Alcuni corollari di un teorema del Prof. Fergola. Nap., Rend. XXI. 155-157.

Der oben angeführte Satz des Herrn Fergola wird dahin erweitert, dass die Polygone Ellipsen mit parallelen und proportionalen Axen eingeschrieben und umschrieben sind. Dieser Satz, sowie eine Reihe ähnlicher, ergiebt sich, indem man andere Functionen aufsucht, deren Wert bei der Aenderung der Polygone constant bleibt. M.

N. TRUDI. Notizie retrospettive intorno ai corollari dedotti dal socio Padeletti da alcuni recenti teoremi del socio Fergola. Nap, Rend. XXI. 170-172.

Herr Trudi weist auf den Zusammenhang hin, den die eben angeführten Sätze von Fergola und Padeletti mit seinen schon vor Jahren aus der Theorie der reciproken Polaren gewonnenen

Resultaten und von Steiner 1844 im Giornale Arcadico veröffentlichten Sätzen haben. M.

A. Cayley. On the geometrical interpretation of certain formulae in elliptic functions. J. Hopkins Circ. 1882. 238.

Die Formeln

$$\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{1}{2}k\right) = k'\,\frac{\mathrm{dn}\,u-(1-k')\,\mathrm{sn}\,u.\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u+(1-k')\,\mathrm{sn}\,u.\mathrm{cn}\,u}$$

$$= k'\,\frac{1-k^2\mathrm{sn}^2u-(1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\mathrm{sn}^2u+(1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u},$$

$$\mathrm{sn}^2\left(u+\frac{1}{2}ik'\right) = \frac{1}{k}\,\frac{(1+k)\,\mathrm{sn}\,u+i\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{(1+k)\,\mathrm{sn}\,u-i\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$$

$$= \frac{(1+k)\,\mathrm{sn}^2u+i\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{(1+k)\,\mathrm{sn}^2u-i\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u},$$

$$\mathrm{cn}^2\left(u+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}ik'\right) = \frac{-ik'\,\mathrm{cn}\,u-(k+ik')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{cn}\,u+(k+ik')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$$

$$= \frac{-ik'}{k}\,\frac{1-\mathrm{sn}^2u-(k+ik')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-\mathrm{sn}^2u+(k+ik')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$$

werden auf die Theorie der Curve dritten Grades

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)$$

angewendet, wo

$$x = \mathrm{sn}^2u,\quad y = \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.$$

M.

Ch. Hermite. Applications de la théorie des fonctions elliptiques. C. R. XCIV. 186-192, 372-377, 477-482, 592-600, 753-760.

Fortsetzungen der Abhandlungen in den Bänden LXXXV bis XCIII der C. R., über welche in den früheren Jahrgängen dieser Zeitschrift (IX.-XIII.) berichtet worden ist. Es werden die Anwendungen auf die Mechanik zu Ende geführt, und alsdann wird die Gleichung

$$D_x^2y = [n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2x+h]y,$$

deren Lösung bisher nur für $n=1$ und $n=2$ erhalten war, in ihrer ganzen Allgemeinheit betrachtet. M.

C. Hyperelliptische und Abel'sche Functionen.

M. UNGAR. Die Reduction Abel'scher Integrale auf Normalintegrale. Wien. Ber. LXXXVI. 893-908.

Das Problem der Reduction hyperelliptischer und Abel'scher Integrale auf Normalintegrale ist zuerst von Abel aufgestellt (Oeuvres I. XXVIII.) und für die binomischen Integrale durchgeführt (Oeuvres II. XVII.). In der vorliegenden Abhandlung wird eine Reductionsformel aufgestellt, welche für alle Abel'schen Integrale giltig ist, aus der man die Möglichkeit, ein Abel'sches Integral auf algebraische Functionen zu reduciren, beurteilen kann. Die allgemeinste Relation aber zwischen einem solchen Integral und algebraisch-logarithmischen Functionen wird auf die bekannten Gleichungen des Abel'schen Theorems zurückgeführt.

M.

E. PICARD. Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. C. R. XCIV. 1704-1707.

In einer früheren Note (C. R. XCIII. 1126; s. F. d M. XIII. (1881) 379) hatte Herr Picard gezeigt, wie sich das hyperelliptische Integral, das dem Polynom fünften Grades

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)$$

entspricht, auf elliptische Integrale zurückführen lässt. Im Vorliegenden wird die algebraische Substitution, welche die Transformation des genannten Integrals bewirkt, eingehender erörtert.

M.

J. HANEL. Reduction hyperelliptischer Functionen auf elliptische. Breslau. Köhler.

J. C. MALET. On certain definite integrals. Dublin. Trans. XXVIII. 1882.

Die hier behandelten Integrale ähneln einer gewissen Klasse

von hyperelliptischen Integralen, die vermöge gewisser Beziehungen zwischen den Moduln reducirbar sind. Eine Reihe solcher Integrale, die aber logarithmische Ausdrücke enthalten, wird durch gewöhnliche Transformationen zurückgeführt auf elliptische und hyperellische Integrale mit drei Moduln. Csy. (M.).

G. A. Pick. Ueber die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen. Wien. Ber. LXXXV. 643-662.

Die Zurückführung hyperelliptischer Integrale auf Logarithmen algebraischer Functionen ist allgemein von Herrn Königsberger (Vorlesungen über die Theorie der hyperellipt. Integrale, p. 120 sq. 132 sq.) gelöst worden, indem zunächst die angenommene Gleichung mit Hülfe der Zerlegung des gegebenen Integrals in Normalintegrale, in solche einfacheren zerfällt wird, die nur je ein logarithmisches Glied haben, und indem dann die Bedingungen für die Existenz solcher Gleichungen sowohl in transcendenter als in algebraischer Form gewonnen werden. Im Vorliegenden versucht der Herr Verfasser das in Rede stehende Problem in rein algebraischer Weise zu lösen. Als notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Reductionsgleichung

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{D}} = \int \frac{\varrho_0 d\xi}{\sqrt{D}} + \frac{1}{k} \log \left\{ \frac{\gamma_1 + \gamma\sqrt{D}}{\gamma_1 - \gamma\sqrt{D}} \right\},$$

wo D ein ganzes Polynom in ξ vom Grade $2p+1$, dessen Linearfactoren sämmtlich verschieden sind, und γ_1, γ ganze Polynome in ξ ohne gemeinsamen Teiler, ist die Existenz von vier ganzen Polynomen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erforderlich, die den Bedingungen

$$a\alpha^2 - c\gamma^2 = m = [(\xi-\xi_1)^{k_1}(\xi-\xi_2)^{k_2}\dots(\xi-\xi_r)^{k_r}]^k,$$
$$a\alpha\beta - c\gamma\delta = n,$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (ac = D),$$

genügen. Für die weiteren Untersuchungen wird eine Methode benutzt, die der zahlentheoretischen Behandlungsweise der quadratischen Formen von negativer Determinante ganz analog ist.

M.

A. Cayley. Reduction of $\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$ to elliptic integrals. Mess. (2) XI. 142-143.

Der Herr Verfasser zeigt, dass, wenn

$$x = \frac{-1+\theta \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1+\theta \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u},$$

dann

$$\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} \theta u,$$

wo $k^2 = \omega$, $\theta^2 = -1+\omega$, und ω eine imaginäre dritte Einheitswurzel ist. Glr. (M.).

P. Appell. Sur un cas de réduction des fonctions Θ de deux variables à des fonctions Θ d'une variable. C. R. XCIV. 421-424.

P. Appell. Sur des cas de réductions des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables. S. M. F. Bull. X. 59-67.

Es sei

$$\Theta(x,y) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} e^{mx+ny+m^2\alpha+2mn\gamma+n^2\beta},$$

erstreckt über alle ganzzahligen m und n, und die normalen Perioden der entsprechenden Abel'schen Functionen seien:

$$\text{für } x \quad 2\pi i,\ 0,\ 2\alpha,\ 2\gamma,$$
$$\text{für } y \quad 0,\ 2\pi i,\ 2\gamma,\ 2\beta.$$

Besteht dann zwischen den letzten Perioden eine Gleichung von der Form

$$2k\gamma = 2k'\beta + 2k''\pi i,$$

wo k, k', k'' ganze Zahlen sind, so lässt sich $\Theta(x,y)$ durch Functionen Θ einer Variabeln ausdrücken. Diese in der ersten Note gegebene Reduction lässt sich nun, wie in der zweiten Abhandlung gezeigt wird, verallgemeinern. Es wird nämlich die Function

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p, a_{ij}) = \sum_{m_i=-\infty}^{m_i=+\infty} e^{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_px_p+\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p)},$$

wo die quadratische Form

$$\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p) = \sum_{i,j=1}^{i,j=p} a_{ij}\, m_i\, m_j, \; (a_{ij} = a_{ji})$$

auf Functionen Θ von $(p-1)$ Variabeln und Functionen Θ von einer Variabeln reducirt, wenn die Perioden für x_p durch $(p-1)$ Gleichungen derart verbunden sind, dass sie sich auf $(p-2)$ zurückführen lassen. Eine analoge Reduction des obigen Θ findet statt, wenn die p Gruppen simultaner Perioden der $(p-1)$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ sich auf $(p-1)$ getrennte Gruppen zurückführen lassen. M.

E. Picard. Sur les équations différentielles abéliennes dans le cas de la réduction du nombre des périodes. C. R. XCV. 898-901.

Es sei $f(x,y) = 0$ eine algebraische Gleichung der Gattung p. Wir nehmen an, dass unter den p Integralen erster Gattung

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F_q(x,y)\,dx}{f'_y(x,y)} \qquad (q = 1, 2 \ldots q)$$

nur $2q$ verschiedene Perioden haben, und dass alle anderen Periodensysteme sich linear mit ganzzahligen Coefficienten durch jene ausdrücken lassen, und betrachten das System

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{F_q\,dx}{f'_y} + \int_{x_0}^{x_2} \frac{F_q\,dx}{f'_y} + \cdots + \int_{x_0}^{x_q} \frac{F_q\,dx}{f'_y} = u_q + h_q$$
$$(q = 1, 2, \ldots, q),$$

wo die h Constanten sind. Für das Abel'sche System, wo $q = p$ ist, ist jede symmetrische Function der x_q eindeutige Function der u_q. Nun wird gezeigt, dass, wenn auch $q < p$, die x noch Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, deren Coefficienten eindeutige Functionen der u mit $2q$ Periodensystemen sind. Diese periodischen Functionen lassen sich durch Thetafunctionen von q unabhängigen Variabeln ausdrücken. Für den besonderen Fall

$q = 2$ wird der Beweis durchgeführt, für die höheren Fälle nur angedeutet. M.

A. R. Forsyth. A memoir on the theta-functions, particularly those of two variables. Phil. Trans. CLXXIII.

Die Abhandlung zerfällt in fünf Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird die sogenannte Rosenhain'sche Theorie der Thetafunctionen zweier Argumente entwickelt. Es wird nämlich nach Analogie der Methode von Prof. H. J. S. Smith für die einfachen Thetafunctionen (L. M. S. I.) ein allgemeines Theorem für das Product von vier doppelten Functionen mit verschiedenen Charakteristiken und Variabeln hergeleitet. Definirt wird:

$$\Phi\left\{\begin{pmatrix}\lambda, \varrho\\ \mu, \nu\end{pmatrix} x, y\right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^{m\lambda+n\varrho}\, p^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2}\, q^{\frac{1}{4}(2n+\nu)^2}\, r^{\frac{1}{4}(2m+\mu)(2n+\nu)}\, e^{(2m+\mu)\frac{i\pi x}{2K}+(2n+\lambda)\frac{i\pi y}{2\varLambda}}.$$

Das erhaltene Product wird gleich der Summe von 16 ähnlichen Producten; und die allgemeine Gleichung umfasst, wie gezeigt wird, 4096 besondere Fälle. Zwischen den Functionen werden quadratische Gleichungen aufgestellt; die 15 Quotienten aller, mit Ausnahme einer, werden als Functionen dieser einen, in der bekannten Weise, in Gliedern zweier neuer Variabeln x_1, x_2 ausgedrückt, wo x_1, x_2 die oberen Grenzen der von der Irrationalität $\sqrt{z(1-z)(1-k_1^2 z)(1-k_2^2 z)(1-k_3^2 z)}$ abhängenden Integrale sind. Die Formeln enthalten ausser k_1, k_2 und k_3 die vier Constanten A, B, A', B'.

Im zweiten Abschnitt werden die obigen Functionen in trigonometrische Reihen nach steigenden Potenzen von x und y entwickelt. Zu dem Zweck wird das Theorem

$$\Phi\left\{\begin{pmatrix}\lambda, \varrho\\ \mu, \nu\end{pmatrix} x, y\right\} = e^{\frac{-2K\varLambda \log r}{\pi}\cdot\frac{d^2}{dx.dy}}\, \theta_{\mu,\lambda}(x)\, \theta_{\nu,\varrho}(y)$$

bewiesen, wo $\theta_{\mu,\lambda}(x)$, $\theta_{\nu,\varrho}(y)$ einfache Thetafunctionen sind. Hieraus werden die Ausdrücke für die vier Perioden erhalten, sowie ein

Beweis für das Product-Theorem des ersten Abschnittes. Ferner wird gezeigt, dass die Function Φ zweien Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - 2x\left(k'^2 - \frac{E}{K}\right)\frac{d\Phi}{dx} + 2kk'^2\frac{d\Phi}{dk} = 0$$

genügt, wo k, k', E die gewöhnliche Bedeutung in Bezug auf $\theta_{\mu,\lambda}(x)$ haben, und einer Differentialgleichung von der Form

$$r\frac{d\Phi}{dr} + \frac{2K\Delta}{\pi^2}\cdot\frac{d^2\Phi}{dx\,dy} = 0.$$

Im dritten Abschnitte werden die Ausdrücke für die Producte $\Phi(x+\xi, y+\eta)\,.\,\Phi'(x-\xi, y-\eta)$ gebildet, wo die Φ und Φ' dieselben oder verschiedene Thetafunctionen sind. Es giebt im Ganzen 256 solcher Gleichungen, die zu je 16 in 16 Rubriken hingeschrieben sind. Der vierte Abschnitt enthält eine Ausdehnung der oben bewiesenen Eigenschaften auf r-fache Thetafunctionen. Insbesondere werden die r und $\frac{r(r-1)}{2}$ Differentialgleichungen erhalten, die den obigen 2 und der einen entsprechen. Beziehungen zu früheren Arbeiten sind in der Einleitung auf Seite 785 und 786 erwähnt. Cly. (M.).

A. R. Forsyth. On Abel's theorems and Abelian functions. Edinb. Proc. XXXIV. 288-291.

Auszug aus einer Arbeit, die demnächst in den Transactions veröffentlicht werden wird. Cly. (O.)

A. Cayley. Note on Abel's theorems. Cambr. Proc. IV. 119-122.

Betrachtet man das Abel'sche Theorem in so weit, als es sich auf die erste Gattung der Integrale bezieht, und sieht man es als ein Differential-, nicht Integral-Theorem an, so kann es folgendermassen ausgedrückt werden. Es sei $f(x, y, 1) = 0$ eine bestimmte Curve von der Ordnung m; sie enthalte eine Beziehung

$$f'(x)dx + f'(y)dy = 0$$

zwischen den Differentialen dx, dy der Coordinaten eines Curvenpunktes, und wir können deshalb schreiben

$$d\omega = \frac{dx}{f'(y)} = -\frac{dx}{f'(x)},$$

und anstatt dx und dy das $d\omega$ benutzen, um die Verrückung eines Punktes auf der Curve auszudrücken. Wir nehmen der grösseren Einfachheit halber eine Curve ohne Spitzen und Doppelpunkte, also vom Geschlecht $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ und betrachten ihre mn Durchschnittspunkte mit einer veränderlichen Curve $\varphi(x, y, 1) = 0$ von der Ordnung n. Bezeichnet dann $(x, y, 1)^{m-3}$ eine beliebige ganze rationale Function von x, y von der Ordnung $m-3$, so besagt das Abel'sche Theorem, dass zwischen den Verrückungen der mn Durchschnittspunkte die Gleichung

$$\Sigma(x, y, 1)^{m-3} d\omega = 0$$

besteht, wo sich die Summe auf alle Werte von $(x, y, 1)^{m-3}$ erstreckt, die zu den resp. mn Durchschnittspunkten gehören.

Glr. (M.).

R. C. Rowe. Memoir on Abel's theorem. Phil. Trans. CLXXIII. 713-750.

Ein Auszug aus dieser Abhandlung ist erwähnt in F. d. M. XII. (1880) p. 322. Sie ist im Wesentlichen eine Reproduction von Abel's grosser Abhandlung: „Sur une propriété générale d'une classe fort étendue de fonctions transcendantes", 1826, Mém. Sav. Étrang. 1841, Werke, 2[te] Ausg. 145-211. Der erste Abschnitt (Art. 1-10) enthält eine Untersuchung des Hauptsatzes in der Abel'schen Abhandlung. Durch Anwendung eines Satzes von Boole wird das Theorem etwas einfacher geschrieben in der Form

$$\Sigma \int f(x, y)\, dx = \Theta\left[\frac{1}{f_2(x) F_0(x)}\right] F_0(x) . \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\lambda'(x, y)} \log \theta(y) + C,$$

die der Gleichung (37) bei Abel entspricht. Es folgen einige Beispiele für das Theorem. Im zweiten Abschnitte wird gezeigt, dass sich aus den Resultaten des ersten Abschnittes ergiebt, dass die Summe einer beliebigen Zahl von Integralen der

betrachteten Form sich durch eine bestimmte Zahl solcher Integrale ausdrücken lässt, und so wird die Frage nach der kleinsten Anzahl solcher Integrale erörtert. Der Ausdruck für diese gesuchte Zahl y wird (p. 741) in folgender eleganten Form gegeben:

$$y = \sum_{s>r} n_r m_r n_s \mu_s + \frac{1}{2}\Sigma n^2 m\mu - \frac{1}{2}\Sigma nm - \frac{1}{2}\Sigma n - \frac{1}{2} n + 1 - A - B,$$

wo die letzten Glieder $-A-B$, welche als Correction hinzugefügt sind, im Allgemeinen Null sind. Die Untersuchung ist etwas vereinfacht durch die Nomenclatur der „major terms“ und „sets“, durch die Einführung des Buchstabens τ, und durch verschiedene kleinere Aenderungen in der Bezeichnung. Der dritte Abschnitt enthält zwei getrennte Teile: Zuerst eine Verallgemeinerung des Theorems im ersten Abschnitt; es wird gezeigt, dass ein gleicher Ausdruck erhalten werden kann für eine Summe einer beliebigen Zahl von Integralen, deren jedes mit einer rationalen, positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Zahl multiplicirt ist; und zweitens eine Untersuchung der notwendigen Bedingungen, damit der algebraische Ausdruck für die Summe der Integrale in dem Theorem des ersten Abschnittes, nämlich das Glied auf der rechten Seite, sich auf eine constante reducire. Der von Abel gegebene Beweis wird hier wesentlich verkürzt und vereinfacht. Ein Anhang enthält ein algebraisches Lemma und ein (hoffentlich vollständiges) Verzeichnis der Fehler in der Originalabhandlung. Cly. (M.)

A. Cayley. Addition to Mr. Rowe's Memoir. Phil. Trans. CLXXIII. 751-758.

Es ist ein Hauptresultat in Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, dass Abel's y das Geschlecht der Curve ist, die durch die Gleichung $X(x,y) = 0$ dargestellt wird, welche die irrationale Function y, von der die Integrale abhängen, bestimmt. Daher muss sich a posteriori beweisen lassen, dass der Ausdruck für y in der That gleich dem Geschlecht der Curve $X(x,y) = 0$ ist. Im Vorliegenden wird dieses bewiesen mit Hülfe der Formeln, die der

Herr Verfasser in der Abhandlung: „On the higher singularities, of a plane curve“, Quart. J. VII. (1866) gegeben hat.

Cly. (M.).

A. Cayley. A memoir on the Abelian and Theta-functions. Sylv., Am. J. V. 137-180.

Ein Teil der Vorlesungen, die Herr Cayley im Jahre 1882 an der Universität zu Baltimore gehalten hat. Das hier Mitgeteilte bezieht sich auf das Abel'sche Theorem und dessen Beweis und schliesst sich eng an die Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan an. H. St.

P. Appell. Sur les fonctions abéliennes. C. R. XCIV. 1702-1704.

Das Theorem von Liouville über doppelt-periodische Functionen, dass die Summe der Werte der Variablen, für welche eine doppelt-periodische Function in einem Elementarparallelogramm null und unendlich wird, bis auf Vielfache der Perioden dieselbe ist, wird auf die zu den Abel'schen Integralen gehörigen $2p$-fach periodischen Functionen ausgedehnt. Wir bemerken, dass sich das Resultat ohne Schwierigkeit aus Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen ergiebt (Riemann's Ges. Werke p. 133. § 26). H. St.

A. R. Forsyth. On a theorem of Jacobi's. Quart. J. XVIII. 313-327.

Es wird der von Jacobi herrührende, von Clebsch und Jordan in ihrer Theorie der Abel'schen Functionen zum Beweis des Abel'schen Theorems verallgemeinerte Satz nach Abel's Methode bewiesen. H. St.

R. Rawson. Solution of a question (6640). Ed. Times XXXVI 91-92.

Sind $\varphi_1(x)$, $\theta(x, y)$ und $\varphi_2(x)$ rationale Functionen in x, und ist die Function

$$u = \{\varphi_1(x)\,\theta(x, y) + 1\}^2 - \varphi_2(x) = (x - y_1)(x - y_2)\ldots(x - y_n),$$

so ist

$$\int \frac{\psi(y_1)\,dy_1}{\varphi_1(y_1)\cdot[\varphi_2(y_1)]^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \int \frac{\psi(y_n)\,dy_n}{\varphi_1(y_n)\cdot[\varphi_2(y_n)]^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{x}\Bigg| \frac{\varepsilon\psi(x)}{\varphi_1(x)[\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \log \frac{\varphi_1 x\,\theta(x, y) + 1 - [\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi_1 x\theta(x, y) + 1 + [\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}},$$

wo $\varepsilon = \mp 1$ und das Zeichen $\frac{1}{x}\Big| f(x)$ die Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $f(x)$ bedeuten möge. $\psi(x)$ kann rational oder irrational sein; wenn $\psi_1(x)$ rational ist, und $\varphi_1(x) = x - a$, so hat man das Abel'sche Theorem. Beim Beweise wird angenommen, dass $u = 0$ keine gleichen Wurzeln habe.

M.

R. Rawson. Solution of a question (6659). Ed. Times XXXVI. 31-33.

Es sei

$$F(x, y) = (x - y_1)(x - y_2)\ldots(x - y_n),$$
$$\psi(x, z) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m,$$

und $f(x)$ eine rationale Function von x, deren Dimension kleiner als n, dann ist der Coefficient von $\frac{1}{x^{m-1}}$ in dem Integral

$$f(x)\int \frac{\psi(x, y)}{F(x, y)}\,dy$$

gleich

$$\int \left\{ \frac{f(y_1)\,\psi(y_1, y)\,y_1^m}{\frac{dF(y_1, y)}{dy_1}} + \cdots + \frac{f(y_n)\,\psi(y_n, y)\,y_n^m}{\frac{dF(y_n, y)}{dy_n}} \right\} dy + C.$$

Hiervon wird eine Anwendung gemacht auf den Beweis des Abel'schen Theorems für die Summe von n ultraelliptischen Integralen.

M.

N. Herz. Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale. Hoppe Arch. LXVIII. 196-216.

Nach denselben Methoden, mit deren Hülfe Herr Königsberger in der 5[ten] Vorlesung seines Buches: „Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale“ Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der allgemeinsten hyperelliptischen Integrale, welche in gegebenen Punkten wie gegebene Functionen unendlich werden sollen, aufgestellt hat, werden hier analoge Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der allgemeinen Abel'schen Integrale gewonnen. Da aber die Fläche im Unendlichkeitspunkte aus mehreren Blättern besteht, von denen einige getrennt, andere in Verzweigungspunkten zusammenhängend sein können, so muss man hier die Annahme machen, dass im Unendlichkeitspunkte die Function auf einigen Blättern, auf denen sie eindeutig ist, und ebenso in einigen von den in der Unendlichkeit liegenden Verzweigungspunkten unendlich werden soll.

M.

O. Schlömilch. Ueber Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale. Schlömilch Z. XXVII, 317-320.

Aus dem Doppelintegral

$$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\cos^2\vartheta+(1-k^2x^2)\sin^2\vartheta}$$

wird für das hyperelliptische Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu(1-k^2x^2)^{1-\mu}} \qquad (0<\mu<1)$$

folgende Entwickelung gewonnen:

$$=\Sigma\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(n-\mu)_n\left[l\left(\frac{2}{k'}\right)-s_{2n}+t_n\right]k'^n,$$

die für $\mu=\frac{1}{2}$, $t_n=l_2-s_{2n}$ mit Legendre's Darstellung des

elliptischen Integrals F′ übereinstimmt. Folgerungen für kleine k' machen den Schluss. M.

M. Krause. Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Klein Ann. XIX. 489-496

Fortsetzung der Abhandlung in demselben Journal, S. 423 bis 428; siehe F. d. M. XIII. (1881) p. 374. Es wird zunächst ein Problem gelöst, welches die naturgemässe Verallgemeinerung des von Herrn Dedekind in seiner bekannten Arbeit über die elliptischen Modulfunctionen (Crelle J. LXXXIII. 255, s. F. d. M. IX. (1877) 353) gelösten Fundamentalproblems ist, nämlich: „Es sollen die notwendigen Bedingungen dafür aufgestellt werden, dass:

$$\varkappa^2 = K^2,\ \lambda^2 = \Lambda^2,\ \mu^2 = M^2$$

ist, wo

$$\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2 . \vartheta_3^2},\quad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2},\quad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_2^2}$$

für die Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, und K, Λ, M die entsprechenden für $\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}$. Hierauf geht der Herr Verfasser zu seinen ursprünglichen Untersuchungen zurück und zeigt, dass alle Potenzsummen $\Sigma_i \varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon^\alpha$ eindeutige Functionen der Grössen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ sind. Daraus folgt dann der Satz: „Die Grössen $\varphi(\tau_{13}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon$ sind Wurzeln algebraischer Gleichungen vom Grade $1+n+n^2+n^3$, deren Coefficienten sich rational aus den Grössen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ zusammensetzen lassen.“ Nachdem so die Existenz von Modulargleichungen erwiesen ist, ergeben sich leicht ihre Haupteigenschaften. M.

M. Krause. Ueber Multiplicationsgleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Klein Ann. XX. 54-58.

Es wird hier für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung in dem Falle, wo der Grad der Transformation eine

ungrade Primzahl ist, die Existenz von Gleichungen nachgewiesen, welche den Multiplicationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen ganz analog sind. M.

M. Krause. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation fünften Grades. Klein Ann. XX. 226-230.

Es wird ein anderes neues Repräsentantensystem als in der früheren Arbeit des Herrn Verfassers (Klein Ann. XVI. 83; s. F.d.M. XII. (1880) 375) eingeführt, das sich näher an die Repräsentantensysteme der elliptischen Functionen anschliesst und den Vorzug bietet, dass die Argumente und die Moduln der transformirten Thetafunctionen sich einfacher durch die entsprechenden Grössen der ursprünglichen Thetafunctionen ausdrücken lassen. Alsdann wird dieses angewendet, um eine Reihe von Modulargleichungen für die Transformation fünften Grades aufzustellen. M.

K. Weierstrass. Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen von mehreren Veränderlichen. Berl. Ber. 1882. 505-509.

K. Weierstrass. Note sur la théorie des fonctions de Jacobi à plusieurs variables. Darb. Bull. (2) VI. 136-141.

Der Herr Verfasser leitet eine der Gleichung

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3) \\ +\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1) \\ +\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_2) = 0 \end{cases}$$

ganz analoge Relation $S = 0$ für σ-Functionen mehrerer Argumente $\sigma(u, u', \dots, u^{(\varrho-1)})$ her, die auf folgende Weise definirt werden. In der ungraden ϑ-Function von ϱ Argumenten

$$\vartheta_1(v, v', \dots, v^{(\varrho-1)})$$

werden für $v, v', \dots, v^{(\varrho-1)}$ von einander unabhängige homogene lineare Functionen der Veränderlichen $u, u', \dots, u^{(\varrho-1)}$ substituirt und dann wird

$$\sigma(u,u',\ldots,u^{(\varrho-1)}) = Ce^{\psi(u,u',\ldots,u^{(\varrho-1)})}\,.\,\vartheta_1(v,v',\ldots,v^{(\varrho-1)})$$

gesetzt, wo ψ eine ganze und homogene Function zweiten Grades von $u, u', \ldots, u^{(\varrho-1)}$, und C eine willkürliche Constante bezeichnet. Am Schlusse bemerkt der Herr Verfasser, dass, ebenso wie durch die Gleichung (1) eine ihr formell genügende Function $\sigma(u)$ mit den bekannten Eigenschaften gewonnen werden kann, man auch wohl in ähnlicher Weise die Existenz einer transcendenten ganzen Function von ϱ Variabeln beweisen könne, die der allgemeinen Relation $S = 0$ genügt.

Herr J. Molk hat von dieser Mitteilung in Darboux' Bull. eine Uebersetzung geliefert. M.

Elliott. Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ. Ann. d. l'Éc. N. (2) XI. 79-119, 425-436.

Die Arbeit enthält die Ausführung und Erweiterung der bereits besprochenen Untersuchungen über das von Clebsch und Gordan zuerst behandelte „erweiterte" Umkehrproblem (F. d. M. XII. (1880) 364 u. 369.). H. St.

K. A. Posse. Ueber die ϑ-Function von zwei Veränderlichen und über das Problem von Jacobi. Diss. Petersburg. (Russisch).

Von den drei Wegen, die zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems führen, nämlich: den Jacobi-Göpel-Rosenhain'schen, den Weierstrass'schen und den Riemann'schen, wählt der Verfasser dieser Dissertation den ersten und den letzten aus und combinirt sie, da die elementaren Hilfsmittel der Rosenhain'schen Methode ihm nicht hinreichend zu sein scheinen, um die Ausdrücke der Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{13} der ϑ-Function durch die bestimmten Integrale streng zu beweisen. Demgemäss zerfällt seine Arbeit in zwei Teile nebst einem Anhange, in welchem die Ausdrücke der Zähler und Nenner der Näherungsbrüche, die sich bei der Entwickelung einer Quadratwurzel aus einem Polynom

fünften Grades in einen Kettenbruch ergeben, durch die ϑ-Function zweier Veränderlichen gegeben werden. Der erste Teil ist der ϑ-Function gewidmet: nachdem dieselbe durch eine Reihe definirt ist, werden aus dieser Definition die Functionalgleichungen hergeleitet, und dieselben für das Auffinden der algebraischen Relationen zwischen ϑ-Quadraten und ϑ-Producten und auch ihrer partiellen Derivirten zu Grunde gelegt, was nach der Methode von Hermite erreicht wird. Da bei der Coefficientenbestimmung hier die von Rosenhain ohne Beweis gegebenen Formeln, die die Werte der Functionaldeterminanten der ϑ-Function für Nullwerte der Variabeln geben, gebraucht werden, so werden dieselben hier auf dem von Weber angedeuteten Wege durch Transformation zweiten Grades der ϑ bewiesen. Keine geringe Rolle spielen bei allen diesen Entwickelungen die Eigenschaften der Charakteristiken der ϑ (die Bezeichnungsart der ϑ ist die von Riemann); weshalb dieselben in einem bosonderen Paragraphen zusammengestellt werden. Zuletzt werden zwei neue Veränderliche eingeführt, in denen

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}^2(v_1 v_2)}{\vartheta^2(v_1 v_2)} = \frac{(\alpha_0-x_1)(\alpha_0-x_2)}{\sqrt{\alpha_{01}\,\alpha_{02}\,\alpha_{03}\,\alpha_{04}}},$$

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}^2(v_1 v_2)}{\vartheta^2(v_1 v_2)} = \frac{(\alpha_1-x_1)(\alpha_2-x_2)}{\sqrt{\alpha_{01}\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}}}$$

u. s. w. gesetzt werden, und es wird bewiesen, dass die rechten Seiten dieser Gleichungen in die algebraischen zwischen den Quotienten von ϑ-Quadraten stattfindenden Gleichungen, für diese Quotienten eingesetzt, denselben Genüge thun; dann wird mit Hülfe der Ausdrücke der Derivirten von ϑ-Quotienten durch solche bewiesen, dass zwischen beiden Systemen der Veränderlichen eine ultraelliptische Beziehung besteht.

Da aber, wie schon erwähnt, es schwer ist, auf diesem Wege die Abhängigkeit der ϑ-Moduln von den Periodicitätsmoduln der ultraelliptischen Integrale (wegen der doppelten Zeichen der Quadratwurzel) genau zu bestimmen, so kehrt in diesem Moment

der Verfasser seinen Weg um, um im zweiten Teile seiner Dissertation Riemann zu folgen, mit Berücksichtigung der Arbeit von Prym, wobei jedoch die Verwandlung der betreffenden Riemann'schen Fläche in eine einfach zusammenhängende etwas anders als dort durchgeführt ist, um die Resultate mit den von Weierstrass gefundenen vergleichbar zu machen.

Da nun auf diesem Wege die Haupteigenschaften der von zwei ultraelliptischen Integralen erster Gattung abhängenden ϑ-Function gefunden worden sind, und die algebraischen Relationen zwischen den ϑ-Quotienten festgestellt sind, werden die Constanten durch die Wurzeln des unter der Quadratwurzel stehenden Polynoms eindeutig bestimmt. Durch Vergleichung der so gewonnenen Resultate mit den im ersten Teile gefundenen, werden zuletzt die Ausdrücke der Periodicitätsmoduln der ultraelliptischen Integrale durch die Werte der ϑ und ihrer Derivirten für die Nullwerte der Argumente erhalten, die der bekannten Formel in der Theorie der elliptischen Functionen analog sind.

Ty.

J. Thomae. Ueber Integrale zweiter Gattung. Kronecker J. XCIII. 69-80.

Wie Riemann gezeigt hat, lässt sich die Function

$$\frac{d\log(v_1, v_2, \ldots, v_p)}{d\xi}, \quad v_\nu = u_\nu(\sigma,\xi) - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_\nu(s_\mu, z_\mu),$$

durch Integrale zweiter Gattung darstellen in der Form:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} t(\sigma,\xi;\ s_\mu, z_\mu) + C.$$

Wenn die Anfangswerte der Integrale t gegeben sind, so bleibt noch C zu bestimmen, das von $s_1, z_1, s_2, z_2, \ldots, s_p, z_p$ unabhängig, jedoch eine Function von σ,ξ und den Klassenmoduln ist. Bezeichnet man mit

$$s_{1,\xi},\ z_{1,\xi};\ s_{2,\xi},\ z_{2,\xi};\ \ldots\ s_{p,\xi},\ z_{p,\xi}$$

diejenigen p Wertepaare, wofür

$$[u_1(\sigma,\xi), u_2(\sigma,\xi), \ldots, u_p(\sigma,\xi)] \equiv [\Sigma u_1(s_{\mu,\xi}), \ldots, \Sigma u_p(s_{\mu,\xi}, z_{\mu,\xi})]$$

ist, so ergiebt sich für C sofort der Wert

$$C = -\sum_{\mu=1}^{\mu=p} t(\sigma, \xi, s_{\mu,\xi}, z_{\mu,\xi}),$$

und es ist C durch eine Summe von Integralen zweiter Gattung dargestellt. In dem Vorliegenden wird nun diese Summe durch speciellere Integrale und durch algebraische Functionen dargestellt. Nachdem der allgemeine Fall behandelt worden ist, wird der Fall zweiblättriger Flächen unabhängig vom allgemeinen und vollständig ausgeführt. Die Schwierigkeiten des allgemeinen Falles lassen sich für $p = 3$ überwinden, wie der Verfasser später zeigen wird. M.

F. Prym. Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig. Teubner.

A. Krazer. Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. Leipzig. Teubner.

F. Prym. Kurze Ableitung der Riemann'schen Thetaformel. Kronecker J. XCIII. 124-131.

F. Prym. Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. Acta math. III. 1-15.

F. Prym. Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Acta math. III. 18-40.

A. Krazer und F. Prym. Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel. Acta math. III. 41-77.

A. Krazer. Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Hab. Schrift. 1883.

Die vorstehenden Abhandlungen sind, obwohl verschiedenen Jahrgängen angehörend, als Ganzes aufzufassen und zu besprechen. Den Mittelpunkt derselben bildet eine für die Theorie der Thetafunctionen fundamentale Formel, welche Herrn Prym

1865 in Pisa von Riemann zur Bearbeitung mitgeteilt worden war. Diese „Riemann'sche Thetaformel“ ergiebt sich allerdings für eine Variable ohne Schwierigkeit aus der von Jacobi in seiner „Theorie der elliptischen Functionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet.“ (Ges. Werke. I. p. 506) zu Grunde gelegten Formeln, und lässt sich ebenso für p Variable aus einer von Herrn Frobenius gegebenen Formel (Borchardt J. LXXXIX. p. 201 Gl. (5), siehe F. d. M. XII. (1880) 385) ableiten. Was ihren Namen rechtfertigt, ist die Bedeutung, welche die Gleichung gewinnt durch die überraschend einfache und übersichtliche Form, die Riemann ihr gegeben hat, eine Form, die sich in gleichem Masse zur Verallgemeinerung wie zur Specialisirung eignet. Die Untersuchungen des Herrn Prym und Krazer beziehen sich erstens auf die Herleitung der Riemann'schen Thetaformel, zweitens auf die Verallgemeinerung derselben, drittens auf die durch Specialisirung aus ihr folgenden Thetarelationen.

Die Herleitung der Riemann'schen Thetaformel ist enthalten in No. I. p. 1-21, No. III. u. IV.

Bezeichnet man die Thetafunction mit p Variabeln $u_1, u_2 \dots u_p$ durch

$$(1) \qquad \vartheta(u) = \Sigma \dots \Sigma e^{\Sigma a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\Sigma m_\mu u_\mu}$$

und die entsprechende Thetafunction mit der zweiteiligen Characteristik

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \dots & \varepsilon'_p \end{bmatrix} = \varepsilon,$$

wo bei allen ε und ε' der Nenner 2 unterdrückt ist, und die ε und ε' in allen möglichen Combinationen die Werte 0 und 1 annehmen können, mit $\vartheta_\varepsilon(u)$, versteht man ferner unter

$$u_\mu^{(1)},\ u_\mu^{(2)},\ u_\mu^{(3)},\ u_\mu^{(4)} \qquad (\mu = 1, 2, \dots p)$$

vier Systeme von je p unabhängigen Variabeln und verbindet dieselben mit vier entsprechenden Systemen $v_\mu^{(1)}$, $v_\mu^{(2)}$, $v_\mu^{(3)}$, $v_\mu^{(4)}$ durch folgendes zuerst von Jacobi (l. c.), dann von Rosenhain benutzte gleichzeitig orthogonale und involutorische System

$$u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + u_\mu^{(3)} + u_\mu^{(4)} = 2v_\mu^{(1)},$$
$$u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(3)} - u_\mu^{(4)} = 2v_\mu^{(2)},$$
$$u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(2)} + u_\mu^{(3)} - u_\mu^{(4)} = 2v_\mu^{(3)},$$
$$u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(3)} + u_\mu^{(4)} = 2v_\mu^{(4)},$$

dessen Auflösung von gleichem Bau ist, so hat die Riemann'sche Thetaformel die Gestalt

$$(\mathrm{R}) \quad \begin{cases} \vartheta(2u^{(1)}).\vartheta(2u^{(2)}).\vartheta(2u^{(3)}).\vartheta(2u^{(4)}), \\ = \dfrac{1}{2^p} \cdot \sum\limits_{\varepsilon} \vartheta_\varepsilon(2v^{(1)}).\vartheta_\varepsilon(2v^{(2)}).\vartheta_\varepsilon(2v^{(3)}).\vartheta_\varepsilon(2u^{(4)}), \end{cases}$$

wo die Summation der rechten Seite über die sämmtlichen 2^{2p} zweiteiligen Thetacharakteristiken ε auszudehnen ist. Für diese Formel giebt Herr Prym drei Beweise. Der erste derselben (No. I. p. 1 ff.) hat ein historisches Interesse, insofern er noch Riemann vorgelegt wurde und dessen Zustimmung fand, gleichzeitig aber auch ein functionentheoretisches Interesse, insofern er beruht auf einem von Riemann in seinen Vorlesungen 1861/62 mitgeteilten Princip der Zerlegung einer periodischen Function $f(x)$ mit der Periode $2\pi i$, enthalten in der Identität

$$f(x) = \frac{f(x) + f(x+\pi i)}{2} + \frac{f(x) - f(x+\pi i)}{2}.$$

Die successive Anwendung dieses Princips auf die linke Seite von (R) führt zu einer Gleichung der Form (R), mit dem Unterschied, dass jedes Glied der rechten Seite noch mit einem besonderen Factor C_ε multiplicirt erscheint. Die nähere Untersuchung der 2^{2p} Constanten C_ε zeigt dann, dass dieselben sämmtlich den gleichen Wert A haben, der $= \frac{1}{2^p}$ gefunden wird. Einen zweiten kürzeren Beweis der Gleichung (R) enthält No. III. Derselbe geht aus von der auf der rechten Seite in (R) stehenden Summe. Betrachtet man dieselbe als Function der p Variabeln $u_1^{(1)} \ldots u_p^{(1)}$ und setzt dieselbe $= \Phi(2u^{(1)})$, so ergeben sich für diese Function zwei Functionalgleichungen, welche zeigen, dass $\Phi(2u^{(1)})$ bis auf einen von den $u_\mu^{(1)}$ unabhängigen Factor identisch mit der Function $\vartheta(2u^{(1)})$ ist. Da das Entsprechende

für die Systeme $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$ gilt, so ergiebt sich die rechte Seite in (R) als identisch mit dem Product der vier Thetafunctionen der linken Seite bis auf einen Factor C, der $= 1$ ermittelt wird.

Die zwei ersten Beweise der Formel (R) beruhen auf functionentheoretischen Betrachtungen und der dadurch bedingten Anwendung von unbestimmten Coefficienten; sie bringen das innere Wesen der Formel und den Zusammenhang ihrer beiden Seiten nicht zum Ausdruck. Von besonderem Interesse ist daher der dritte ganz elementare Beweis (No. IV). Derselbe verbindet das bereits von Jacobi (l. c.) bei den Thetafunctionen mit einer Variabeln angewandte Princip der gleichzeitigen Transformation der Variabeln und der Summationsbuchstaben durch Gleichungen der Form (3) mit dem Princip der Einschiebung eines Factors, der ähnlich dem Dirichlet'schen discontinuirlichen Factor bei bestimmten Integralen die durch die Transformation eingetretene Beschränkung der Summation wieder aufhebt. Bildet man nämlich das Product F der vier Thetafunctionen auf der linken Seite in (R) mit Hülfe der Summen (1), wobei die Summationsbuchstaben m_μ der vier Thetafunctionen durch obere Indices (1), (2), (3), (4) zu unterscheiden sind, und führt alsdann statt der Systeme von je p Variabeln $u^{(1)}_\mu$, $u^{(2)}_\mu$, $u^{(3)}_\mu$, $u^{(4)}_\mu$ die Systeme der $v^{(1)}_\mu$, $v^{(2)}_\mu$, $v^{(3)}_\mu$, $v^{(4)}_\mu$ aus den Gleichungen (3) ein, und gleichzeitig statt der Summationsbuchstaben $m^{(1)}_\mu$, $m^{(2)}_\mu$, $m^{(3)}_\mu$, $m^{(4)}_\mu$ neue Summationsbuchstaben $n^{(1)}_\mu$, $n^{(2)}_\mu$, $n^{(2)}_\mu$, $n^{(4)}_\mu$ ein, die mit den ersteren durch dieselben linearen Relationen (3) verbunden sind, wie die Variabeln v mit den u, so erhält man eine neue Summe F', gebildet mit den Grössen v und n, die äusserlich genau mit der für u und m gebildeten Summe F übereinstimmt. Während aber bei der ursprünglichen Summe an Stelle der vier Grössen $m^{(1)}_\mu$, $m^{(2)}_\mu$, $m^{(3)}_\mu$, $m^{(4)}_\mu$ jede aus sämmtlichen positiven und negativen ganzen Zahlen gebildete Variation zur vierten Klasse mit Wiederholung zu setzen war, ist, wie die Relationen zwischen den m und n zeigen, in der neuen Summe an Stelle der vier Grössen $n^{(1)}_\mu$, $n^{(2)}_\mu$, $n^{(3)}_\mu$, $n^{(4)}_\mu$ sowohl jede aus ganzen wie jede aus halben

Zahlen gebildete Variation zur vierten Klasse mit Wiederholung zu setzen, für welche $s_\mu = n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine grade Zahl ist. Die letzte Beschränkung der Summationsbuchstaben lässt sich aufheben, wenn man hinter den äusseren Summenzeichen einen Factor einschaltet, der stets von selber verschwindet, sobald s_μ eine ungrade Zahl ist. Man erhält so an Stelle von F' eine neue Summe F'', die sich identisch erweist mit der rechten Seite in (R).

Die zweite Reihe der Untersuchungen bezieht sich auf die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel und bildet den Inhalt von No. I. p. 25-48, No. V. und No. VI. Die Formel (R) gilt für Producte von je vier Thetafunctionen und für zweiteilige Charakteristiken, die verallgemeinerte Formel gilt für Producte von je n Thetafunctionen und für r-teilige Charakteristiken. An Stelle des orthogonalen, involutorischen Systems (3) tritt das allgemeine, orthogonale, nicht notwendig involutorische System

$$(4)\qquad \begin{cases} c_{11}\, x^{(1)} + c_{12}\, x^{(2)} + \cdots + c_{1n} x^{(n)} = r \,.\, y^{(1)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n1}\, x^{(1)} + c_{n2}\, x^{(2)} + \cdots + c_{nn} x^{(n)} = r \,.\, y^{(n)}, \end{cases}$$

worin die $c_{\mu\mu'}$ n^2 ganze Zahlen bedeuten, die den Bedingungen genügen

$$c_{1\mu}\, c_{1\mu'} + c_{2\mu}\, c_{2\mu'} + \cdots + c_{n\mu}\, c_{n\mu'} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2 & \text{wenn } \mu' = \mu, \end{cases}$$

während die Bedingung $c_{\mu\mu'} = c_{\mu'\mu}$ nicht notwendig ist.

Operirt man nun genau wie oben, indem man zwei Systeme von Variabeln $u_\mu^{(1)}, \ldots, u_\mu^{(n)}$ und $v_\mu^{(1)}, \ldots, v_\mu^{(n)} (\mu = 1, \ldots, p)$ und zweierlei Summationsbuchstaben $m_\mu^{(1)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ und $n_\mu^{(1)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ je durch die Gleichungen (4) verbindet, so gelangt man zu einer sehr allgemeinen Formel (Gl. Θ No. V. p. 35 oder Gl. (9) No. I. p. 44), welche die Riemann'sche Formel (R) als speciellen Fall enthält, aber noch nicht die einfache Structur derselben zeigt. Diese Structur wird durch den Charakter der Gleichungen (3) bedingt. Um diesen Charakter auf die Gleichungen (4) zu übertragen und zu der wahren Verallgemeinerung der Formel (R) zu gelangen, muss man das System (4) der Bedingung unterwerfen,

dass die n auf der linken Seite stehenden Formen einander congruent seien nach dem Modul r, wenn man allgemein zwei Formen

$$a_1 x^{(1)} + \cdots + a_n x^{(n)} \text{ und } b_1 x^{(1)} + \cdots + b_n x^{(n)}$$

mit ganzzahligen Coefficienten a und b einander congruent nennt nach dem Modul r, sobald

$$a_1 \equiv b_1 \;\; a_2 \equiv b_2 \ldots a_n \equiv b_n \pmod{r}.$$

Diese Bedingung für (4) involvirt, dass $2r$ durch n teilbar sei; sie giebt für (4) ein ganz bestimmtes System, das verschieden ist, je nachdem n grade oder ungrade, und das für $n = 4$ in das Jacobi'sche System (3) übergeht.

Ist $n = 2\nu$, also grade, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit $r = \nu$ setzen und das System (4) geht über in (siehe No. VI. p. 66.)

$$(O_2) \quad \begin{cases} (1-r)x^{(1)} + x^{(2)} + \cdots + x^{(r)} = r \cdot y^{(1)} \\ x^{(1)} + (1-r)x^{(2)} + \cdots + x^{(r)} = r \cdot y^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(1)} + x^{(2)} + \cdots + (1-r)x^{(r)} = r \cdot y^{(r)}, \end{cases}$$

und die zugehörige Thetaformel lautet (l. c. p. 72.):

$$(\Theta_2) \quad \nu^p \cdot \vartheta(ru^{(1)}) \cdots \vartheta(ru^{(2r)}) = \sum_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(rv^{(1)}) \cdots \vartheta_\varepsilon(rv^{(2r)}) \cdot e^{\frac{-2}{r} \sum_\mu \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \cdot \pi i},$$

wo ε die aus den Elementen

$$\frac{\varepsilon_1}{r} \; \frac{\varepsilon_2}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon'_1}{r} \; \frac{\varepsilon'_2}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r}$$

gebildete r-teilige Charakteristik bezeichnet, und die Summation über sämmtliche r^{2p} Charakteristiken auszudehnen ist, die man erhält, wenn man die Zahlen ε und ε' alle Werte $0, 1, \ldots, r-1$ durchlaufen lässt.

Aehnlich sind die Formeln für ein ungrades n (Gl. (O_1) und (Θ_1) l. c.). Die dritte Reihe von Untersuchungen (No. I. p. 49-111) bezieht sich auf die Herstellung verschiedenartiger Thetarelationen aus der Formel (R) und die vorbereitenden Sätze über zweiteilige Charakteristiken. Es werden die Riemann'schen Sätze über die Zerlegung einer Charakteristik in zwei andere bewiesen, und ein „Fundamentalsystem" von $2p+1$, resp. $2p+2$

Charakteristiken $a_1, a_2, \ldots, a_{2p+1}, 0$ besprochen, aus dem sich die sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken nach einem einfachen Schema zusammensetzen lassen.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\vartheta_\varepsilon(2u) \,.\, \vartheta_{\varepsilon+\varrho}(2v) \,.\, \vartheta_{\varepsilon+\sigma}(2w) \,.\, \vartheta_{\varepsilon-\varrho-\sigma}(2t) = x_\varepsilon,$$
$$\vartheta_\eta(2u') \,.\, \vartheta_{\eta+\varrho}(2v') \,.\, \vartheta_{\eta+\sigma}(2w') \,.\, \vartheta_{\eta-\varrho-\sigma}(2t') = x'_\eta,$$
$$c_{\varepsilon\eta} = c_{\eta\varepsilon} = (-1)^{\varepsilon|\eta},$$

wo

$$\varepsilon|\eta = \sum_\varkappa (\varepsilon_\varkappa \eta'_\varkappa - \varepsilon'_\varkappa \eta_\varkappa),$$

so giebt die Riemann'sche Thetaformel (R) Relationen der Form (No. I. p. 84)

$$(S) \qquad 2^p \,.\, k'_\eta = \sum_\varepsilon c_{\eta\varepsilon} \,.\, x_\varepsilon,$$

wo die Summen der rechten Seite über sämmtliche 2^{2p} Charakteristiken ε auszudehnen ist. Die 2^{2p} in (S) enthaltenen Gleichungen stellen ein System dar, welches orthogonal und involutorisch ist und die Grundtypen der verschiedenartigen Thetarelationen liefert. Das System (S) nimmt eine ungemein übersichtliche Gestalt an, wenn man die Charakteristiken ε und η in gewisser Weise, die Herr Prym die natürliche nennt, anordnet. Aus (S) ergeben sich durch Addition Gleichungen der Form (l. c. p. 88)

$$(S') \qquad 2^{p-m} \,.\, \sum_a c_{\zeta a} \,.\, x'_{\eta a} = c_{\eta\zeta} \,.\, \sum_b c_{\eta b} \,.\, x_{\zeta b},$$

wo η und ζ beliebige Charakteristiken, und wo die Summe der linken Seite über sämmtliche $r = 2^m$ Charakteristiken eines zur Zahl m gehörigen, vollständigen Systemes a, die der rechten Seite über sämmtliche $s = 2^{p-m}$ Charakteristiken eines durch ζ und das System a bestimmten, zur Zahl $2p-m$ gehörigen, vollständigen Systems b auszudehnen ist. Das System der Gleichungen (S') ist äquivalent mit dem System der Gleichungen (S) und enthält das letztere als speciellen Fall $(m = 0)$. Das System der $r \,.\, s$ Gleichungen (S') zerfällt in s Gruppen von je r Gleichungen, welche die Grössen x' und x in bestimmter Weise trennen, nämlich so, dass in einer solchen Gruppe die linke Seite jeder Gleichung immer dieselben r Grössen x' enthält, während irgend zwei rechte Seiten dieser Gleichungen niemals jene Grösse

gemein haben, aber die rechten Seiten zusammengenommen die sämmtlichen 2^{2p} Grössen x jede einmal enthalten. Zur wirklichen Herstellung der Systeme (S') wäre eine Untersuchung über die Beziehungen der Charakteristiken unter einander erforderlich.

Die Systeme (S) und (S') werden nun weiter untersucht, erstens unter der Bedingung, dass die den ungraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x' sämmtlich den Wert Null haben, in welchem Falle die Gleichungen zu den Additionstheoremen und den Thetarelationen führen, welche die Herren Frobenius (Borch. J. Bd. 89, s. F. d. M. XII. (1880) p. 385.) und Nöther (Clebsch Ann. Bd. XVI., s. F. d. M. XII. (1880) p. 389) aufgestellt haben, zweitens unter der Bedingung, dass auch die den graden Charakteristiken entsprechenden x' mit Ausnahme von $(2p+1)p$ derselben von gewisser Beschaffenheit verschwinden, in welchem Falle die Gleichungen zu dem Additionstheorem führen, das Herr Weierstrass (Crelle J. Bd. 64. p. 27.) für die den hyperelliptischen Integralen entsprechenden, speciellen Thetafunctionen zuerst aufgestellt hat.

An die bisher besprochenen allgemeinen Untersuchungen schliessen sich zwei Arbeiten von Herrn Krazer an (No. II u. VII), welche die Systeme (S) und (S') für zwei specielle Fälle eingehender untersuchen, nämlich die Fälle $p = 2$, $r = 2$ und $p = 1$, $r = 3$. Der erste Fall hat es also mit dem zuerst von Göpel und Rosenhain behandelten Problem zu thun. Auf Grund einer Reihe von Sätzen über die Zerlegung der zweiteiligen Charakteristiken ergeben sich aus dem Systeme (S) Gleichungen, von denen jede vier Grössen x und vier Grössen x' enthält, was Anlass zur Unterscheidung von Vierersystemen erster und zweiter Art von Charakteristiken giebt. Die Bedingung, dass die den sechs ungraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x' Null seien, liefert eine Zerspaltung der den zehn übrigen Grössen x' entsprechenden Gleichungen und führt zu den den Rosenhain'schen Sechsersystemen entsprechenden Relationen zwischen sechs Grössen x. Das durch Specialisirung der Variablen gewonnene System von Thetarelationen ist alsdann noch auf die geringste

Zahl von unabhängigen Gleichungen zu reduciren. Dies Problem wird in doppelter Weise gelöst, indem das eine Mal in Verallgemeinerung des Rosenhain'schen Verfahrens, vier Functionen, deren Charakteristiken ein beliebiges Vierersystem zweiter Art bilden, das andere Mal, in Verallgemeinerung des Göpel'schen Verfahrens vier Functionen, deren Charakteristiken ein Vierersystem erster Art bilden, als Ausgangspunkt dienen. Hierbei ergiebt sich ein bis dahin nicht bemerkter Parallelismus zwischen den Untersuchungen von Göpel und Rosenhain. Den Schluss bildet das Additionstheorem der Thetafunctionen für $p = 2$.

Die zweite Abhandlung (No. VII) steht im Zusammenhang mit den Untersuchungen der Herren Klein und Bianchi (Clebsch Ann. XVII. 234, siehe F. d. M. XII. (1880) 352) über die Normalform dritter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung (nach Herrn Klein's Bezeichnung). Alle dreiteiligen Charakteristiken lassen sich durch neue Normalcharakteristiken ausdrücken, und es ist die Aufgabe, die zwischen den zugehörigen neun fundamentalen Thetafunctionen bestehenden Relationen aufzustellen und in ihrer Abhängigkeit von einander zu untersuchen. Alle diese Relationen sind enthalten in der obigen Formel (Θ_2), gebildet für $p = 1$, $r = 3$. Aus ihr ergeben sich, wenn man die links und rechts auftretenden Producte von je sechs Thetafunctionen resp. mit x' und x bezeichnet, die den Gleichungen (S) und (S') entsprechenden Systeme von je neun Gleichungen. Jede der Gleichungen (S') enthält drei der Grössen x und drei der Grössen x', wobei die den drei x und die den drei x' zugehörigen Normalcharakteristiken je ein „Dreiersystem“ bilden, d. h. ein System von drei Charakteristiken, deren Summe der Charakteristik (0) congruent ist. Durch Specialisirung der Variabeln erhält man zweierlei Thetarelationen, die linear in den Producten von je drei zu einem Dreiersystem gehörigen $\vartheta_\varepsilon(v)$, die letzteren vom zweiten Grad in den Producten von je drei solcher $\vartheta_\varepsilon(0)$. Die Relationen der zweiten Art lassen sich auf drei noch von einander abhängige Gleichungen zurückführen, mit deren Hilfe sich die Quotienten der Producte von je drei zu einem Dreiersystem gehörigen Functionen $\vartheta_\varepsilon(0)$ rational aus-

drücken durch eine und dieselbe Grösse z. Nunmehr lassen sich die Relationen der ersten Art auf achtzehn noch von einander abhängige Gleichungen zurückführen in doppelter Weise, einmal, indem man drei Thetaproducte zu Grunde legt, die alle neun Normalcharakteristiken enthalten, das andere Mal, in dem man von drei Thetacuben ausgeht, deren Charakteristiken ein Dreiersystem bilden. Im ersten Falle sind die drei Thetaproducte, im letzten die drei Thetacuben verbunden durch eine homogene Gleichung dritten Grades von der Form

$$\Phi_1^3+\Phi_2^3+\Phi_3^3-K\,.\,\Phi_1\Phi_2\Phi_3 = 0.$$

(Die Normalcurve des Integrals dritter Stufe bei Herrn Bianchi l. c. p. 240.) Mit Hülfe dieser Gleichung kann man die Quotienten der Producte von je drei zu einem Dreiersystem gehörigen Functionen $\vartheta_\varepsilon(v)$ algebraisch ausdrücken durch ein und dieselbe Grösse Z. H. St.

A. Buchheim. On the extension of certain theories relating to plane cubics to curves of any deficiency. Lond., M. S. Proc. XIII. 180-185.

Bei ebenen Curven dritten Grades fliessen aus der Darstellung der Coordinaten eines Punktes durch elliptische Functionen eines Parameters ohne Weiteres auf Punktgruppen bezügliche Theorien. In der vorliegenden Abhandlung werden diese Theorien und zwar besonders die Theorie der Steiner'schen Polygone und die Sylvester'sche Theorie der derived points auf ebene und räumliche Curven beliebigen Geschlechts ausgedehnt, was mit Hülfe der Abel'schen Functionen gelingt. Auf Clebsch's Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, sowie auf Brill und Nöther's Theorie der adjungirten Curven wird besonders Bezug genommen. Scht.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

K. Heun. Kugelfunctionen. Göttingen. Vandenhoeck.

M. NICOLAS. Étude des fonctions de Fourier (première et deuxième espèce). Ann. de. l'Éc. Norm. Suppl. (2) XI. 3-90.

Referat im nächsten Bande.

E. CATALAN. Sur les fonctions X_x de Legendre. Second mémoire. Belg. Mém. XLIV. 1-102.

Fortsetzung der Arbeit, die im vorigen Bande p. 394 besprochen ist. Sie enthält mehr als 200 Formeln. Eine Inhaltsangabe ist daher unmöglich. Besonders hervorzuheben sind:

$$\int_0^\pi \frac{A+B\sqrt{-1}\cos x}{(B-A\sqrt{-1}\cos x)^2}\,dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_0^\pi d\omega \cos\left[\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega}\right] = 2\pi.$$

Sind a und b Wurzeln von $\frac{dX_n}{dx} = 0$, so hat man:

$$\int_a^b X_x\,dx = 0.$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d(X_n+X_{n+1})}{\sqrt{1-2zX+z^2}} = 2\,\frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx^2+z^2}+1-zx} = \sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx}\,\frac{z^{n-1}}{n(n+1)},$$

$$\log\frac{z-x+\sqrt{1-2zx+z^2}}{1-x} = \sum_1^\infty X_n\,\frac{z^{n+1}}{n+1},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \log\frac{z^2-x+\sqrt{1-2z^2x+z^4}}{1-x}$$
$$= 2\sqrt{2}\log\{(1+z)^{1+z}(1-z)^{1-z}\}.$$

$$X_n = \Sigma(-1)^{\frac{n+q}{2}}\,\frac{1.3.5\ldots(n-q-1).1.3.5\ldots(n+q-1)}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots(n-q)}$$

$$2^n X_n = \Sigma\,\frac{1.2.3\ldots n}{(1.2.3\ldots\lambda)^2.1.2.3\ldots(n-2\lambda)}\,(x^2-1)^\lambda(2x)^{n-2\lambda}$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\log(1+x)\,dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1-z^2}[\log 2-(1-z)\log(1+z)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \Sigma X_n x^n,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-z^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty z^{2n} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 (X_{2n+1}-X_{2n-1}).$$

Nach einer brieflichen Mitteilung von E. Heine an den Verfasser sind manche der Resultate nicht nur neu, sondern auch von Wichtigkeit für die Theorie der Kugelfunctionen.

Mn.

B. Hansted. Généralisation de la fonction X_n de Legendre. Teixeira J. IV. 53-61.

Herr Hansted untersucht die Functionen P_n und Q_n, welche die particulären Integrale der Gleichung

$$(x-a)(x-b)y'' + [2x-(a+b)]y' - n(n+1)y = 0$$

sind. Er zeigt, dass P_n, wie die Legendre'sche Function X_n, der Coefficient von t^n in der Entwickelung nach den Potenzen von t der Quadratwurzel eines Polynoms zweiten Grades in t ist. Er weist ferner nach, dass zwischen P_{n+1}, P_n und P_{n-1} eine Relation existirt, welche der zwischen X_{n+1}, X_n und X_{n-1} analog ist. Den Schluss der Arbeit bildet der Nachweis einer analogen Relation für Q.

Tx. (O.)

G. Leonhardt. Integraleigenschaften der adjungirten Kugelfunctionen. Klein Ann. XIX. 578-587.

Der Verfasser knüpft an die im vorigen Jahre (cf. F. d. M. XIII. (1881) p. 399ff.) besprochene Arbeit des Herrn C. Neumann über Kugelfunctionen an und erweitert einige Resultate derselben. Aus den von C. Neumann aufgestellten Entwickelungen der einfachen Kugelfunctionen in Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten, ergeben sich analoge nach zugeordneten Kugelfunctionen fortschreitende Reihen für die adjungirten Kugelfunctionen. Mit Hülfe derselben wird der Werth des Doppelintegrals

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} L_q(\cos\gamma)\, K_{\varrho j}(\mu) \cos(j\varphi)\, d\mu\, d\varphi$$

ermittelt, wo

$$\cos\gamma = \mu\cdot\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\mu_1^2}\,\cos(\varphi-\varphi_1)$$

ist, während die Bedeutung von L_q $K_{\varrho j}$ dieselbe ist, wie bei Neumann. Daraus folgt durch Anwendung des Additionstheorems der Kugelfunctionen der Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} L_{qj}(\mu)\, K_{\varrho j}(\mu)\, d\mu,$$

welches Integral Herr C. Neumann nur für $j = 0$ ermittelt hatte. Die analogen Integrale, in denen das Product zweier adjungirter L oder zweier adjungirter K unter den Integralzeichen steht, haben keine Bedeutung.

Ausserdem wird (analog der allgemeinen Kugelfunction, der sogenannten Laplace'schen Function) der Begriff der „allgemeinen Kugelfunction" eingeführt:

$$\mathfrak{Y}_q(\mu, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{qj}(\mu)\,[\alpha_j \cos(j\varphi) + \beta_j \sin(j\varphi)],$$

wo α_j, β_j willkürliche, nur von j abhängige Constanten sind. Für diese Function gilt die Formel

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} L_q(\cos\gamma)\, \mathfrak{Y}_\varrho(\mu, \varphi)\, d\mu\, d\varphi$$

$$= \frac{4}{q^2-\varrho^2}\,[\mathfrak{Y}_\varrho(\mu_1, \varphi_1)\cos(q\pi i) - \mathfrak{Y}_q(\mu_1, \varphi_1)\cos(\varrho\pi i)].$$

Die Einführung der Function $\mathfrak{Y}_q(\mu, \varphi)$ gestattet eine Kürzung der Aufgabe, die elektrische Verteilung auf einem Conoide (Fläche, die durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne entsteht,) zu bestimmen. Die von Herrn C. Neumann gegebene Entwickelung der Dichtigkeit dieser Verteilung ist nämlich, wie am Schluss der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, nichts Anderes als eine Entwickelung nach allgemeinen Kugelfunctionen.

Wn.

M. Gegenbauer. Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwickelung von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten. Wien. Ber. LXXXI. 491-502.

Ableitung des folgenden, mit Recht als sehr allgemein bezeichneten Additionstheorems der Bessel'schen Functionen erster Art:

$$(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi})$$
$$= 2^{\nu}\Pi(\nu-1)\sum_{\varrho=6}^{\varrho=\infty}(\varrho+\nu)(\alpha\beta)^{-\nu} J^{\varrho+\nu}(\alpha) J^{(\varrho+\nu)}(\beta) C_{\varrho}^{\nu}(\cos\varphi).$$

Wegen der Bezeichnung vergl. die Abhandlung des Verfassers über die Functionen C im gleichen Bande der Wiener Sitzungsberichte. Gr.



Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

G. CANTOR. Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. Klein Ann. XX. 113-122.

Die früheren Untersuchungen des Verfassers (siehe F. d. M. XII. (1880) 404) werden hier auf das ebene n-dimensionale Gebiet ausgedehnt. Gegenstand der Betrachtung ist vorzugsweise die Abzählbarkeit der Punktmengen. Die gewonnenen Resultate werden zur Ableitung interessanter Sätze im Gebiet der anschaulichen Mannigfaltigkeiten benutzt. So wird z. B. gezeigt, dass, wenn man aus dem drei-dimensionalen Raume die durch Coordinaten von algebraischem Wert bestimmten Punktmengen weglässt, der Rest des Gebietes noch stetigen Zusammenhang hat, woraus weiter folgt, dass auch in einem unstetig gedachten Raume noch stetige Bewegung möglich ist. Dies gilt für alle Räume, deren Dimensionenzahl $\geqq 2$ ist. Schg.

E. BERTINI. Sui sistemi lineari. Lomb. Rend. (2) XV. 24-29.

Ein lineares System

$$U = L_1 u^1 + L_2 u^2 + \cdots + L_{s+1} u^{s+1} = 0,$$

wo die u^i homogene Functionen gleichen Grades von $n+1$ Variabeln x sind, während zwischen den x keine lineare Relation besteht, stellt eine Gruppe von Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen im Raume von $n+1$ vor, deren Basis von den Punkten gebildet wird, für welche die u^i sämmtlich verschwinden. Dann gilt der Satz: „Eine willkürliche Mannigfaltigkeit dieser Art kann nur dann r-fache ausserhalb der Basis gelegene Punkte enthalten, wenn die u^i einen gemeinsamen r-fach zählenden Factor enthalten.“ Und ebenso kann dieselbe nur dann zerfallen, wenn entweder die u^i einen gemeinsamen Factor haben oder homogene Functionen von zwei andern homogenen Functionen gleichen Grades sind. V.

V. Schlegel. Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions. S. M. F. Bull. X. 172-207.

Die Arbeit bildet die Fortsetzung einiger in des Verfassers „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde“ (erst 1883 erschienen) enthaltenen Untersuchungen (siehe das Referat über Stringham's ähnliche Arbeit, F. d. M. XII. (1880) 405). Es werden darin zuerst die Sätze von den Mittellinien und dem Schwerpunkte des Dreiecks und Tetraeders auf das vierdimensionale Fünfzell (Pentaedroid) und die n-dimensionalen Gebilde derselben Reihe ausgedehnt. Einen weiteren Ausgangspunkt bildet das vollständige Viereck. Ihm entspricht im dreidimensionalen Gebiete das „vollständige Hexaeder“, im vierdimensionalen das „vollständige Achtzell“ (Oktaedroid). Auf diese und die entsprechenden Gebilde im n-dimensionalen Gebiet werden Begriffe und Sätze des vollständigen Vierecks ausgedehnt. Der Umstand, dass sich als Anfangsglied dieser Reihe im Gebiet der Geraden die Figur der harmonischen Punkte herausstellt, giebt Anlass, auch die Eckencomplexe höher dimensionirter Gebilde unter den Begriff harmonischer Punktgruppen zu bringen, und entsprechende Formeln und Sätze über dieselben aufzustellen. Eine dritte Reihe von Sätzen und Begriffen, betreffend die Gebilde:

Vierseit, Oktaeder, Sechzehnzell (Hexadekaedroid) geht aus der zweiten durch das Gesetz der Reciprocität hervor. Aus den Sätzen über *n*-dimensionale Gebilde gewinnt man rückwärts durch Projection der betreffenden Figuren neue Sätze der ebenen und dreidimensionalen Geometrie. Die Untersuchung bewegt sich in den einfachsten Methoden der Ausdehnungslehre.

Schg.

R. Hoppe. Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen. Hoppe Arch. LXVIII. 110-112.

Ergänzung der in Bd. LXVII. 420-422 enthaltenen Resultate (s. diesen Band Abschn. VI. Cap. 3. p. 212) durch Berechnung des inneren Winkels im regelmässigen Fünfzell (Pentatop). Nebenbei ergiebt sich das auch von Stringham gefundene Resultat, dass die regulären Gebilde höherer Dimensionen keine Fünfecke mehr als Flächen enthalten können. Schg.

R. Hoppe. Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie. Hoppe Arch. LXVIII. 378-389.

Zwei Ebenen im vierdimensionalen Raume haben im Allgemeinen nur einen Punkt gemeinsam, bilden also nicht direct einen Winkel mit einander. Der Verfasser zeigt aber auf analytischem Wege, dass es zwei Winkel giebt, durch welche die gegenseitige Stellung dieser Ebenen ausgedrückt werden kann. Der erste (Raumwinkel) ist der kleinste Winkel, den zwei diese Ebenen enthaltende euklidische Räume durch Drehung um die Ebenen mit einander bilden können, der zweite (Flächenwinkel) ist der Winkel, den die Ebenen bilden, wenn die beiden Räume aus ihrer vorher beschriebenen Stellung durch Drehung um ihre Schnittebene zur Deckung gebracht werden. Beide Winkel werden berechnet und in ihren Beziehungen zu einander untersucht.

Schg.

R. Hoppe. Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen. Hoppe Arch. LXVIII. 151-166.

Es sind dies die Analoga zu den regulären Körpern im Raume, die aufgesucht werden sollen. Ein solcher n-dimensionaler regulärer Körper ist durch $(n-1)$ Zahlen $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ charakterisirt. Für $n = 3$ ist k_1 die Kanten- (Ecken-)Anzahl einer Seitenfläche, k_2 die einer „Eckfigur" des Körpers, d. i. der Figur, die eine zum Radius einer Ecke senkrechte Ebene aus der Ecke ausschneidet. Ein solcher Körper wird mit (k_1, k_2) bezeichnet. Analog erhält man für $n = 4$ als „Seite" ein Polyeder (k_1, k_2), als „Eckfigur" ein Polyeder (k_2, k_3). Dies ist der Körper (k_1, k_2, k_3) etc. Aus der Definition des Regulären wird ein eigentümlicher Algorithmus abgeleitet, der mit Hülfe des erweiterten Euler'schen Satzes die Bedingungen für die überhaupt möglichen regulären Körper aufzustellen erlaubt. So muss z. B. für $n = 3$ die Grösse

$$N = \frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{2}}$$

positiv und eine ganze Zahl sein, was durch die Combinationen (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5,3) erfüllt wird. Für $n = 4$ erhält man vier, für $n = 5$ drei reguläre Körper. Aus dem letzteren Umstande wird gefolgert, dass für höhere n in der Reihe der k die Zahl 4 nur am Anfang oder am Ende stehen kann, und daraus, dass nur drei Typen möglich sind:

(3, 3, 3, ... 3, 3, 3),
(4, 3, 3, ... 3, 3, 3),
(3, 3, 3, ... 3, 3, 4).

Sie entsprechen dem Tetraeder, Würfel, Oktaeder im Raume. Weiter wird nachgewiesen, dass diese drei Typen auch wirklich immer existiren. Am Schluss werden noch metrische Relationen für den Mittelpunkt, die Radien, den Inhalt und die Umgrenzung dieser Körper entwickelt. (Vgl. die hierhergehörigen Arbeiten von Schlegel, Stringham u. A.). My.

K. Rudel. Vom Körper höherer Dimension. Pr. Kaiserslautern.

Im ersten Teile dieser Arbeit werden die beiden mit dem Dreieck (Tetraeder) und Viereck (Hexaeder) beginnenden Reihen n-dimensionaler Gebilde aufgestellt, der zweite enthält Untersuchungen über den Euler'schen Polyedersatz, im dritten sucht der Verfasser die Frage nach den regulären Gebilden des vierdimensionalen Raumes zu beantworten, und gelangt dabei bis zur Aufstellung der elf ursprünglich sich darbietenden Möglichkeiten und der Ausscheidung von fünf derselben. Den Schluss bildet die Bemerkung, dass von den sechs wirklich vorhandenen Gebilden die beiden einfachsten die Specialfälle der im ersten Abschnitt behandelten Gebilde sind. Ein Anhang beweist die Sätze 1) dass symmetrische Körper mittelst Durchgangs durch den vierdimensionalen Raum zur Deckung gebracht werden können, 2) dass zwei sich kreuzende Ebenen im vierdimensionalen Raume jederzeit einen Punkt gemeinsam haben. Schg.

E. Study. Ueber Distanzrelationen. Schlömilch Z. XXVII. 140-160.

Es wird eine Anzahl von Sätzen über Pyramiden und Kreispotenzen, die sich vereinzelt bei Baltzer, Darboux, Frobenius, d'Ovidio finden (siehe F. d. M. IV. (1872) 383, VI. (1874) 381, VIII. (1876) 531), aus der gemeinsamen Quelle einiger elementarer Sätze abgeleitet, meist unter Anwendung der Determinantenmethode. Die Arbeit ist ausserdem den Vorarbeiten insofern durch Allgemeinheit überlegen, als alle Sätze sogleich für n-dimensionale Gebilde bewiesen werden. Im Anfang ist eine grössere Anzahl von neuen geometrischen Sätzen und Formeln mitgeteilt, die aus derselben Quelle fliessen. Schg.

O. Stolz. Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Innsbr. Ber. XII. 74-89.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass das „Axiom des Archimedes“: „Eine Grösse kann so oft vervielfältigt werden, dass sie jede andere ihr gleichartige übertrifft“, nicht bewiesen werden kann, wenn man nur voraussetzt, dass zwei Grössen des Systems vergleichbar sind, nach den Regeln der ganzen Zahlen addirt und subtrahirt werden können, und dass jede Grösse in gleiche und mit ihr gleichartige Teile zerlegt werden kann. Ein Beispiel eines den letzteren Bedingungen genügenden Grössensystems, für welches gleichwohl obiges Axiom nicht gilt, liefern die von du Bois-Reymond aufgestellten Unendlich der reellen Functionen. (Clebsch Ann. XI. 147, siehe F. d. M. IX. (1877) 302). Herr Stolz zeigt nun, dass das Axiom als Folgerung erscheint, wenn man dem Grössensystem noch die Eigenschaft der Stetigkeit (im Sinne von R. Dedekind) beilegt. Was den Grössenbegriff selbst anlangt, so hat, seit derselbe durch H. Grassmann auf die Vergleichbarkeit zweier Objecte basirt worden ist, die Frage nach den Methoden der Vergleichung ein erhöhtes Interesse gewonnen. Herr Stolz giebt eine kritische Uebersicht der Wege, welche die griechischen Geometer eingeschlagen haben, um geometrische Gebilde zu vergleichen, und zeigt u. a., dass der oben erwähnte Grössenbegriff auch die „Verhältnisse“ umfasse, welche von der alten Geometrie in einen für die Darstellung nachteiligen Gegensatz zu den „Grössen“ gebracht wurden. Schg.

P. Cassani. I nuovi fondamenti della geometria. Batt. G. XX. 143-166.

Mit Berücksichtigung der Arbeit von Tilly (siehe F. d. M. XI. (1879) 354) giebt der Verfasser eine vereinfachte und leichter verständliche Darstellung seiner in zwei früheren Arbeiten (Saggio di Geometria rigorosa, 1871 und Nuove proposte, siehe F. d. M. IX. (1877) 387) niedergelegten Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Schg.

W. E. Story. On the non-Euclidian trigonometry. Sylv. Am. J. IV. 332-336; V. 180-211.

W. E. Story. Note on the non-Euclidian trigonometry. J. Hopkins Circ. 1882. 211.

Cayley hatte bei seiner Ableitung der Grundformel der nicht-euklidischen Trigonometrie (Clebsch Ann. V. 630-634, s. F. d. M. IV. (1872) 241) als Fundamental-Kegelschnitt den Kreis, und für die Massconstanten besondere Werte angenommen. Der Verfasser dehnt diese Untersuchung in der ersten der oben genannten Abhandlungen auf beliebig angenommene Fundamentalgrössen aus und zeigt am Schluss die Uebereinstimmung seiner specialisirten Formel mit der von Cayley gefundenen, die übrigens auch für andere Fundamental-Kegelschnitte als den Kreis gilt. Ausserdem ergiebt sich eine einfache Ableitung für die Formeln der nicht-euklidischen ebenen aus denen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie.

In der zweiten Abhandlung bestimmt der Verfasser die grössten und kleinsten Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen der nicht-euklidischen Geometrie, erörtert die speciellen Fälle der parallelen und senkrechten Richtung, und giebt Formeln über den Inhalt des Parallelogramms und Parallelepipedons. Es stellt sich dabei heraus, dass der Abstand zweier Gebilde bis auf einen constanten Factor unabhängig ist von dem Wege der Messung. Bei der schliesslichen Anwendung der gewonnenen Resultate auf die Geometrie der Kugel wird in ähnlicher Weise wie am Schluss der ersten Abhandlung der Zusammenhang zwischen den Formeln der nicht-euklidischen sphärischen und denen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie dargelegt.

Schg.

H. Cox. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space. Cambr. Trans. XIII. 69-143; Cambr. Proc. IV. 194-196.

Die vorliegende Arbeit will, im Anschluss an Grassmann, einen rein algebraischen Calcül aufstellen, dessen Gesetze mit

den im wirklichen Raume geltenden übereinstimmen. Ein derartiger Calcül unterscheidet sich von der gewöhnlichen Algebra dadurch, dass mehr als eine unabhängige Einheit vorhanden ist. Es seien A und B unabhängige Einheiten derart, dass zwischen ihnen keine Relation von der Form $A = xB$ stattfinden kann, wo x eine gewöhnliche (reelle oder imaginäre) algebraische Grösse ist. Dann werden A und B Punkte genannt, und jeder Ausdruck von der Form $pA+qB$, wo p, q positive, negative oder imaginäre Zahlen sind, wird ebenfalls ein Punkt oder ein Vielfaches eines Punktes genannt. Die Grössen $pA+qB$, $2(pA+qB)$, $3(pA+qB)$ etc. werden nicht als verschiedene Punkte, sondern als verschiedene Vielfache desselben Punktes betrachtet. Der Punkt $pA+qB$ variirt mit dem Verhältnis $p:q$, und alle Punkte, die in jenem Ausdrucke enthalten sind, bilden eine einfach unendliche Reihe, die gerade Linie. Sind A, B, C verschiedene Grössen, die durch keine lineare Relation verbunden sind, so bilden alle Punkte, die in dem Ausdruck $pA+qB+rC$ enthalten sind, eine doppelt unendliche Reihe, die eine Ebene genannt wird. Diese Definition lässt sich in derselben Art auf mehr Dimensionen ausdehnen. Es lässt sich nun zeigen, dass aus diesen Definitionen alle descriptiven oder projectiven Eigenschaften von Curven, dieselben als Orte von Punkten angesehen, die gewissen Gleichungen genügen, direct folgen.

Den Begriff der Entfernung kann man auf drei verschiedene Arten einführen. Es seien, P, Q, R einfache, nicht vielfache Punkte, so dass $pP+qQ = rR$, und es sei $\alpha =$ Entfernung PR, $\beta =$ Entfernung RQ, $\gamma =$ Entfernung PQ, so dass $\alpha+\beta = \gamma$. Dann muss eins der folgenden Systeme von Relationen bestehen:

$$\text{(I)} \qquad r^2 = p^2+q^2+2pq\cosh\frac{\gamma}{k}, \qquad p\sinh\frac{\alpha}{k} = q\sinh\frac{\beta}{k};$$

$$\text{(II)} \qquad r = p+q, \qquad p\alpha = q\beta;$$

$$\text{(III)} \qquad r^2 = p^2+q^2+2pq\cos\frac{\gamma}{k}, \qquad p\sin\frac{\alpha}{k} = q\sin\frac{\beta}{k}.$$

[cosh und sinh bezeichnen darin den hyperbolischen, cos und sin den gewöhnlichen Cosinus und Sinus].

Den Relationen (I), (II), (III) entsprechen drei verschiedene Arten von Geometrie, nämlich (I) die nicht-euklidische Geometrie von Lobatchewsky und Bolyai, (II) die gewöhnliche Geometrie, (III) die sphärische Geometrie.

Die verschiedenen Arten der Multiplication von Punkten findet man, wenn man das distributive Princip zu Hülfe nimmt. Es ergiebt sich, dass die allgemeinsten Bedingungen folgende sind:

$$P^2 = Q^2 = \beta$$

ist constant, und ausserdem ist

$$P.Q + Q.P = 2\beta \cosh\theta \text{ in (I)},$$
$$P.Q + Q.P = 2\beta \qquad \text{in (II)},$$
$$P.Q + Q.P = 2\beta \cos\theta \text{ in (III)}.$$

Durch Einführung weiterer specieller Annahmen kann man verschiedene Arten der Multiplication erhalten. Diese sind 1) Grassmann's äussere Multiplication, die (für zwei Punkte) identisch ist mit der äusseren Multiplication der Quaternionen. 2) Grassmann's innere Multiplication, die (für zwei Punkte) identisch ist mit der skalaren Multiplication der Quaternionen. 3) Die associative Quaternionen-Multiplication, die folgende Gesetze befolgt:

$$Q.P^{-1} = \cosh\theta + i\sinh\theta, \quad i^2 = 1 \text{ in (I)},$$
$$Q.P^{-1} = 1 + i\theta, \quad i^2 = 0 \text{ in (II)},$$
$$Q.P^{-1} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad i^2 = -1 \text{ in (III)},$$

wo i in jedem Falle eine specifische Constante ist, die der Verbindungslinie der Punkte P und Q eigenthümlich ist.

Weiter wird die Addition und Multiplication dreier Grössen i betrachtet. Es wird gezeigt, dass, wenn i_1 und i_2 zwei specifische Constante sind, die zwei unter dem Winkel θ gegen einander geneigten Linien angehören, und wenn

$$ri = pi_1 + qi_2,$$

dass dann

$$r^2 = p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta,$$

ferner

$$i_2 i_1^{-1} = \cos\theta + Q.\sin\theta$$

ist, wo

$$Q^2 = -1:$$

Q kann als der Punkt angesehen werden, in dem sich die Linien schneiden.

Aus diesen Formeln ergeben sich, mit Hinzunahme des associativen Princips, für den Fall I die folgenden Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks:

$$\cosh a = \cosh b . \cosh c - \sinh b . \sinh c . \cos A,$$

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C},$$

und andere ähnliche. Auf dem angedeuteten Wege kann man alle Eigenschaften der verschiedenen Arten des Raumes durch rein algebraische Methoden erhalten. Die hauptsächlichsten Unterschiede zwischen den drei möglichen Fällen werden dabei stets scharf hervorgehoben.

Geht man zur Geometrie von drei Dimensionen über, so sind sieben verschiedene imaginäre Grössen nöthig. Dieselben sind im Falle (I) identisch mit den Symbolen, die in Hamilton's Biquaternionen auftreten. Sind I, J, K die gewöhnlichen Quaternionensymbole, so stellt der Ausdruck

$$XI + YJ + ZK + \sqrt{-1}(LI + MJ + NK)$$

eine Linie oder eine Kraft im Raume dar, falls

$$XL + YM + ZN = 0.$$

Ist die letztere Gleichung nicht erfüllt, so stellt der obige Ausdruck ein System von Kräften vor.

Weiter werden einige Anwendungen auf die Theorie der Schraubenbewegungen gemacht. Die Gleichung des Cylindroids wird:

$$(p_\alpha - p_\beta)(\omega^2 - z^2)\, xy = (1 + p_\alpha p_\beta)(x^2 + y^2)\, \omega z.$$

Dasselbe ist also eine Fläche vierter Ordnung, wie dies von Lindemann gezeigt ist. Für Punkte nahe dem Anfangspunkte wird die Gleichung

$$(p_\alpha - p_\beta) xy = z(x^2 + y^2);$$

dieselbe fällt mit der Gleichung des Cylindroids im gewöhnlichen Raume, wie sie zuerst von Ball aufgestellt ist, zusammen. Ferner wird gezeigt, dass die Eigenschaften der beliebig im Raume vertheilten Kräfte abgeleitet werden können aus den Eigenschaften von Kräften, die in demselben Punkte angreifen, falls man nur

für die Componenten X, Y, Z die imaginären Grössen $X+L\omega$, $Y+M\omega$, $Z+N\omega$ setzt, wo $\omega^2=-1$ in (I), $\omega^2=0$ in (II), $\omega^2=1$ in (III) ist.

Zum Schluss wird gezeigt, wie man das System imaginärer Grössen für Räume von höheren Dimensionen erhalten kann aus den commutativen Producten niederer Systeme.

Glr. (Wn.).

V. Schlegel. Geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Pr. Waren.

Die Arbeit liefert Ergänzungen zu des Verfassers „System der Raumlehre", indem verschiedene Sätze aus der Geometrie der Geraden und des Kreises auf einfache Weise darin abgeleitet werden, z. B. das Stuart'sche Theorem, Satz des Pappus, Sätze vom Pascal'schen und Brianchon'schen Sechseck, vom Kreise der mittleren quadratischen Entfernungen, Feuerbach'schen, Höhenpunkt- und Schwerpunktkreis etc. Ein Anhang enthält u. a. den Nachweis, dass ein neuerdings von Lipschitz aufgestellter algebraischer Calcül mit gewissen Operationen der Ausdehnungslehre identisch ist (s. F. d. M. XII. (1880) 303); ferner neues Material aus dem Briefwechsel zwischen St. Venant, Cauchy und Grassmann, betreffend die zwischen den beiden letzteren s. Z. schwebende Prioritätsangelegenheit, endlich ein Verzeichnis von Arbeiten anderer Autoren auf dem Gebiete der Ausdehnungslehre.

Schg.

Böklen. Ueber die Rechnung mit Vectoren. Corr. Bl. 1882.

Vergleichende Zusammenstellung der von Argand, Hamilton, Scheffler und Möbius aufgestellten Grundbegriffe und Operationen der Streckenrechnung, nebst einem Excurs über das Hankel'sche Permanenzprincip und dessen Beurtheilung durch neuere Autoren. Auch die einschlägigen Arbeiten von Grassmann, Bellavitis, Leibniz und Gauss sind in der Einleitung berücksichtigt. Schg.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

A. CAYLEY. On the geometrical forms called trees. J. Hopkins Circ. 1882. 202-203.

Von den von C. Jordan in der Theorie der Verschlingungen eingeführten „Zahlcentra, resp. Doppelzahlcentra" einer Verschlingung (knot, tree) werden einige neue Eigenschaften mitgeteilt. Herr Sylvester vergleicht in einem Zusatz die in dieser Richtung von Jordan, Cayley und ihm gefundenen Resultate und macht auf ihre Bedeutung in der organischen Chemie aufmerksam. My.

O. SIMONY. Ueber jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen. Wien. Ber. LXXXIV. 1881. 257-258.

O. SIMONY. Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. Clebsch Ann. XIX. 1881. 110-120.

O. SIMONY. Ueber eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. Wien. Ber. LXXXV. 1882. 907-928.

Die beiden erstgenannten Arbeiten sind inhaltlich identisch und beziehen sich auf die Herstellung und die Eigenschaften von Gebilden, die entstehen, wenn man etwa zwei rechteckige Papierstreifen kreuzförmig über einander legt, (die sich deckenden Teile verklebt), die vier bandförmigen Fortsätze zu je zweien nach vorheriger Drehung je des einen von beiden um ein Multiplum von 180 Grad vereinigt, und endlich die so entstehende Fläche durch einen, den Mittellinien der beiden ursprünglichen Streifen folgenden, in sich zurücklaufenden Schnitt umformt. Da die vier bandförmigen Fortsätze auf zwei wesentlich verschiedene

Arten in obiger Weise zu je zweien vereinigt werden können, so entstehen so „Flächen erster und zweiter Klasse". Die ersteren zerfallen nach ihrem Flächeninhalte in vier Gruppen, deren Schemata für alle möglichen Multipla-Paare von 180 Grad aufgestellt werden. Complicirter sind die Flächen zweiter Klasse. Um sie leichter zu erfassen, werden die Begriffe einer „Doppelverbindung" zweier Flächen, sowie die „Verknüpfung", „Verschlingung", „Doppelknoten" einer Fläche aufgestellt und durch Figuren erläutert. (Diese Begriffe können auf den allgemeinen Fall von $2n$ bandförmigen Fortsätzen ausgedehnt werden). Mittelst ihrer gelingt es dann wieder, die allgemeine Schematisirung der immer in Untergruppen zu je vier zerfallenden Flächen zweiter Klasse zu erledigen, und die Resultate in Worte zu fassen.

Die dritte Arbeit schildert dagegen die Gebilde, die aus einem unverdrehten, biegsamen Ringe (in praxi am besten von vulkanisirtem Kautschuk mit sehr dünner Wandung), am einfachsten von kreisförmigem Querschnitt, erhalten werden, wenn man den (massiv gedachten) Ring mittelst eines ihn bis zur Mittellinie durchsetzenden, in sich selbst zurücklaufenden Schnittes umformt. Diese Gebilde hängen ab sowohl von dem Multiplum von 360 Grad, um welches sich die Axe des schneidenden Instrumentes dreht, als von der Anzahl der Umläufe des letzteren. Als weitere charakteristische Merkmale treten noch auf, einmal das Multiplum von 360 Grad, welches die Verdrehung des resultirenden Gebildes angiebt, sodann die Verschlingung desselben. Um die letztere anschaulich zu machen, wird der Begriff einer aus r einfachen Knoten a_1^{ter}, $a_2^{\text{ter}}, \ldots, a_r^{\text{ter}}$ Art durch geeignete Zusammensetzung entstehenden (positiven resp. negativen) „Knotenverbindung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung" mit den „Windungszahlen" $a_1, a_2, \ldots, a_r$ gebildet. Die Anschauung wird durch zahlreiche Figuren unterstützt. Dadurch wird es wieder möglich, die obigen Gebilde zu schematisiren, was für eine grosse Reihe von Werten der Drehungs- und Umlaufszahlen geschieht. Aus diesen numerischen Schematen wird auf dem Wege der Induction eine Anzahl von allgemeinen Sätzen gefolgert, die sich mit Hülfe eines einfachen Algorithmus, der die Zusammensetzung der verschiedenen Knoten als eine Art

Multiplication auffasst, verhältnismässig einfach aussprechen lassen.

Bis jetzt darf man wohl schon behaupten, dass diese Untersuchungen des Herrn Verfassers, die noch weiter fortgesetzt werden sollen, eine wertvolle Ergänzung und Fortbildung der Tait'schen Knotentheorie (cfr. F. d. M. IX. (1877) 392) bilden. Hoffentlich gelingt es dem Herrn Verfasser auch, seiner individuell-experimentellen Ableitung dieser complicirten Knotengebilde, und namentlich seinen allgemeinen Folgerungen eine allgemeine theoretische Begründung zu substituiren. My.

O. Simony. Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen" und verwandter merkwürdiger Probleme. Dritte Aufl. Wien. Gerold. 1881.

Enthält der Hauptsache nach die in einer früheren Abhandlung (cfr. F. d. M. XII. (1880) 410) dargelegten Entwickelungen in populärer Form. Das dort angegebene Verfahren, Knoten resp. knotige Verbindungen herzustellen, indem man ein mehrfach verdrehtes, geschlossenes, streifenförmiges Band längs der Mittellinie durchschneidet, findet hier noch in doppelter Weise eine Erweiterung. Einmal werden solche Bänder auch längs Linien durchschnitten, die der Mittellinie (in einem gewissen Abstande) parallel sind. Dies findet z. B. seine Anwendung bei der Aufgabe, einen ringförmig geschlossenen Streifen so herzustellen, dass ein einziger Längsschnitt zwei ringförmig geschlossene Streifen erzeugt, von welchen der eine ebenso breit, aber doppelt so lang ist. Man theile nämlich den zuvor offenen Streifen durch zwei Parallelen zur Mittellinie in drei gleiche Teile, und verdrehe das eine Ende vor seiner Vereinigung mit dem andern um 180 Grad. Das allgemeine Resultat lässt sich im Wesentlichen dahin angeben, dass, so lange der Abstand der Parallelen von der Mittellinie nicht ganz verschwindet, der bez. Längsschnitt immer zwei Streifen liefert. War die Gesammttorsion des gegebe-

nen Streifens eine ungrade, d. h. von der Grösse $(2k+1).180$ Grad, so stehen beide daraus hervorgehende Streifen in einer Verbindung $(k+1)^{ter}$ Art, und der längere ist auf dem kürzeren mit einem Knoten k^{ter} Art aufgeknüpft. War dagegen die ursprüngliche Gesammttorsion eine gerade, d. h. von der Grösse $2k.180$ Grad, so sind die beiden neuen Streifen von gleicher Länge, und stehen in einer Verbindung k^{ter} Art mit einander. Andererseits werden diese Processe auf körperliche, unverdrehte Ringe, am einfachsten von kreisförmigem Querschnitte, übertragen, indem man durch den Ring einen in seiner Mittellinie fortlaufenden Schnitt führt und dabei das schneidende Instrument um die Mittellinie in einem oder mehreren Umläufen um ein ganzes Vielfaches von 180 Grad dreht. Auch so entstehen Knoten und Verbindungen. Anhangsweise und in Noten berührt der Herr Verfasser auch die Frage nach der Auflösung resp. Bildung von Knoten (ohne Zuhülfenahme von Schnitten) mit Hülfe eines vierdimensionalen Raumes, und citirt hierher gehörige und verwandte Arbeiten. Der Standpunkt des Verfassers selbst ist dabei ein reservirter. Die Tatsache, dass binnen Jahresfrist diese dritte Auflage nötig wurde, beweist das Interesse des Publikums für die Titelfrage; ob der Herr Verfasser mit seiner Lösung den Erwartungen dieses Publikums entsprochen hat, sei dahingestellt.

My.

E. Hess. Ueber Polyeder-Kaleidoscope. Marb. Ber. 1882. 9-12.

Es sind dies dreiflächige Ecken, deren auf der Innenseite spiegelnde Flächen den direct-symmetrischen Mittelebenen der regulären Polyeder entsprechen. Irgend ein Punkt im Innern der Ecke erzeugt durch Spiegelung die Ecken eines gleicheckigen (speciell regulären) Polyeders. Schneidet man den Radiusvector dieses Punktes senkrecht mit einer Ebene, so stellen die Spiegelbilder des so ausgeschnittenen Dreiecks die Oberfläche eines gleichflächigen Polyeders dar. Umgekehrt bringe man ein passend ausgeschnittenes Dreieck mechanisch in passender Lage in eine

solche (von Herrn Krüss in Hamburg wirklich hergestellte) Ecke hinein, und versehe das Dreieck noch mit einer Oeffnung, so kann man bequem in das Innere der durch die Spiegelung erzeugten Polyeder hineinsehen. Die drei vorgelegten Modelle haben zu Seitenflächen drei benachbarte, direct-symmetrische Mittelebenen eines regulären Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders. Das letztere Modell erzeugt z. B. auch die Kepler-Poinsot'schen Sternpolyeder. My.

J. Pitsch. Ueber halbreguläre Sternpolyeder. Zeitschr. f. d. Realschulw. VII. 162-163.

In seiner bekannten, inhaltsreichen Abhandlung über halbreguläre Polyeder (VI. Jahrgang, 2. Heft obiger Zeitschrift) hatte der Verfasser die Ansicht ausgesprochen, es müsse auch ein derartiges Sternpolyeder mit fünfseitigen Ecken geben. Nunmehr ist er in der Lage, das Netz dieses Körpers und das des zugehörigen Umhüllungspolyeders wirklich zu construiren. Indess ist seiner Angabe zufolge auch mit diesen beiden neuen Individuen die Reihe der halbregulären Sternpolyeder noch nicht abgeschlossen: in der Tat konnte Hess mit Hülfe der in seiner „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung“ aufgestellten und das Problem allgemein lösenden Formeln dem Pitsch'schen Verzeichnisse noch einige weitere Ergänzungen hinzufügen.

Gr.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

H. Köstler. Vorschule der Geometrie. Halle a.S. L. Nebert.

Dieses kleine nur 24 Seiten starke Buch enthält die in der elementaren Geometrie gebräuchlichen Definitionen und Con-

structionen, erstere unter dem Titel: Formenlehre, letztere unter dem Titel: Constructionslehre. Am Schlusse befinden sich Repetitions- und Uebungsaufgaben. Mz.

C. F. Hertter. Zeichnende Geometrie. Für die planimetrische Repetition mit besonderer Berücksichtigung des geometrischen Zeichnens.

Erste Abteilung: Drei- und Viereck. Kreislehre mit Ausschluss der Proportionen. Geradlinige Ornamente.

Zweite Abteilung: Proportionalität, Aehnlichkeit, Kreissecanten, Stetige Theilung, Gleichheit, Tactionsproblem, Gothische Ornamente. Stuttgart. Metzler'sche Buchhandlung.

Der Inhalt ist durch den Titel genügend bezeichnet. Der Verfasser äussert das Bestreben, die Geometrie dem Schüler mundgerechter zu machen, indem er das Zeichnen innig mit dem geometrischen Unterricht verbindet und ferner die gezeichneten Figuren farbig belebt zur Darstellung bringen lässt. Das für die Hand des Schülers bestimmte Heft enthält keine Figuren, demselben sind jedoch Orientirungstafeln für den Lehrer beigegeben. Der Schüler soll die Zeichnung selbst nach dem Texte entstehen lassen, nicht mechanisch abzeichnen. Das Material ist sorgsam und geschickt zusammengetragen. Das Buch dürfte jedem Lehrer, der mit der zu Anfang ausgesprochenen Ansicht des Verfassers übereinstimmt, willkommen sein. Rg.

N. Fialkowski. Zeichnende Geometrie (Constructions-Lehre) mit entsprechenden Beispielen der Anwendung auf das Projections-, dann Bau-, Maschinen-, Situations- und auf das figurelle Zeichnen. Mit 1800 Figuren auf 138 Tafeln. Dritte verbesserte und erweiterte Auflage. Wien, Leipzig. J. Klinkhart.

In den ersten Capiteln werden alle diejenigen Constructionen der Planimetrie gelehrt, welche für die verschiedenen Zweige der Technik Bedeutung haben. Andererseits wird das eigentliche Projectionszeichnen nicht behandelt, sofern man nicht die Darstellung der regulären Körper in einer Ansicht, abgeleitet aus Kreispolygonen, hierher rechnen will. Das technische Material ist reichhaltig. Gelehrt wird u. A. die Construction der gebräuchlichsten Bogen in der Architektur, Malerei und Bildnerei; geometrische Profilconstructionen für Gurt- und Pfeilergesimse, Säulenordnungen, Situations-Zeichnen, die Construction der für den Maschinenbauer wichtigen Rollcurven, Eilinien etc. Die Brauchbarkeit des Buches beweisen die wiederholten Auflagen. Mathematische Constructionen, die übrigens ohne Beweis gegeben werden, muss man mit Vorsicht zur Anwendung bringen. So wird auf pag. 39 in 421 bei der ersten Construction eines regulären Siebenecks nicht gesagt, dass eine Näherungsmethode vorliegt; andere evidente Constructionen sind dagegen zuweilen mit dem Zusatz „mathematisch richtig" versehen. Die Einhüllende aller Kreise von constantem Halbmesser, deren Mittelpunkte auf einer Ellipse liegen, hält der Verfasser pag. 138 irrtümlich für eine Ellipse. Rg.

W. Holl. Lehrbuch der Geometrie. Stuttgart. W. Kohlhammer.

Das Buch ist für Mittelschulen, einklassige Realschulen, Fortbildungsschulen und niedere landwirtschaftliche Lehranstalten bestimmt, und enthält die Lehre von den geometrischen Raumgrössen in Verbindung mit Zeichnen und Rechnen. In einem besondern Hefte befinden sich die Auflösungen zu den Aufgaben des Lehrbuchs, und zwar sowohl jedesmal das Facit als auch die verlangte Construction angegeben. Der Herr Verfasser hat wesentlich praktische Gesichtspunkte im Auge; in jedem Paragraphen findet man zuerst Belehrung, wobei Beweise in möglichster Kürze angedeutet sind, hierauf Zeichnen und dann Rechnen in Bezug auf den jedesmal vorliegenden Gegenstand. Man

darf wol annehmen, dass dies Buch an der passenden Stelle sehr gute Dienste thut; und es ist jedenfalls ein Vorzug, dass in ihm auf einem kleinen Raum ein verhältnismässig grosses Material bewältigt ist. Mz.

M. Dangschat. Geometrie für Mittelschulen. Danzig. F. Axt.

Dieses für Mittelschulen und ähnliche Unterrichtsanstalten bestimmte Buch behandelt in gedrängter Kürze die elementare Planimetrie und Stereometrie. Ein Vorzug des Buches sind die vielen (182 an der Zahl) das Verständnis erleichternden Figuren. Die Darstellung ist knapp, aber deutlich. In einem Anhange sind die Formeln für die Berechnung ebener und Raumfiguren zusammengestellt. Mz.

J. H. Nissen. Lehrbuch der Elementarmathematik. Schleswig. J. Bergas.

Dieses für den Unterricht in Schullehrer-Seminarien und Realschulen, sowie für den Selbstunterricht bestimmte Buch hat vier Teile: I. Teil: Arithmetik und Algebra, 1882; II. Teil: Planimetrie, 1877; III. Teil: Ebene Trigonometrie, 1882; IV. Teil: Stereometrie und sphärische Trigonometrie, 1880. Vom I., III. und IV. Teil ist die zweite Auflage erschienen. Der umfangreichste erste Teil behandelt die elementare Arithmetik, die Logarithmen, Progressionen, Rentenrechnung; ferner die Algebra bis bis zu den cubischen Gleichungen einschliesslich. In einem kurzen Anhange ist Einiges von den pythagoräischen Zahlen gesagt. Die im zweiten Teil gegebene Planimetrie geht bis zur Kreisberechnung einschliesslich. Im dritten Teil werden zuerst die trigonometrischen Functionen besprochen, wobei auch die unendliche Reihe für $\cos x$ hergeleitet wird, dann die Anwendung der Trigonometrie auf das rechtwinklige, nachher auf das schiefwinklige Dreieck. Zuletzt sind die wichtigsten Formeln zusammengestellt, und das Kreisviereck behandelt. Der vierte Teil enthält die Stereometrie bis zur Berechnung von Kugel und Kegel ein-

schliesslich, das sphärische Dreieck rein geometrisch und trigonometrisch behandelt. Im Anhange sind Aufgaben aus der mathematischen Geographie, zu deren Auflösung Kenntnis der sphärischen Trigonometrie gehört. Das ganze Werk ist mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen. Die Darstellung ist durchweg klar und der Druck deutlich. Mz.

K. Struve. Elemente der Mathematik. Berlin. P. Parey.

Das vorliegende Buch besteht aus vier Teilen: Erster Teil: Geometrie; zweiter Teil: Allgemeine Zahlenlehre; dritter Teil: Ebene Trigonometrie; und vierter Teil: Rechnen mit bestimmten Zahlen. Sie sind aus den Jahren resp. 1878, 1879, 1879 und 1882. Im ersten Teil ist die Geometrie bis zur Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren und bis zur Kreisberechnung einschliesslich geführt, am Schlusse befindet sich ein Anhang unter dem Titel: Die geometrische Aufgabe. Der zweite Teil enthält die Buchstabenrechnung, Potenzen und Wurzeln, Gleichungen ersten Grades mit einer und mit zwei Unbekannten, quadratische Gleichungen, Logarithmen und die Hauptaufgaben der Zinseszinsrechnung. Der dritte Teil enthält die Definitionen der trigonometrischen Functionen, die Erklärung der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, die Behandlung des rechtwinkligen Dreiecks, die Formeln für die trigonometrischen Functionen der Summen und Differenzen von Winkeln, das schiefwinklige Dreieck und einige Aufgaben. Beim zweiten und dritten Teil sind die wichtigsten Formeln in Uebersicht zum Zwecke des Einprägens vorangestellt. Der vierte ganz für sich bestehende Teil behandelt das Rechnen, und ist nach der Angabe des Herrn Verfassers für solche Schulen bestimmt, die einen die Elementarmathematik umfassenden Lehrgang nicht besitzen. Es finden sich darin die notwendigsten Lehren aus der Elementarmathematik, und ihre Verwendung beim praktischen Rechnen. Die Darstellung ist fasslich, die Ausstattung gut. Mz.

R. HEGER. Leitfaden für den geometrischen Unterricht. Breslau. Ed. Trewendt.

Von diesem zum Gebrauch an höheren Unterrichtsanstalten bestimmten Buche enthält der erste Teil die Planimetrie, der zweite die Trigonometrie. Zahlreiche Figuren dienen zur Erleichterung des Verständnisses. Im ersten Teil ist die Planimetrie bis zur Kreisberechnung einschliesslich behandelt; der Lehrgang in diesem Buche enthält nicht allein das Notwendige, sondern ein gewisses Eingehen in die Sache, eine weitere Ausführung des Gebotenen gereicht dem Buche zur Empfehlung. So ist z. B. beim Kreise die Lehre von den Aehnlichkeitspunkten, von der Potenzlinie, von den Kreisbüscheln, der Kreisverwandtschaft und Pol und Polare gegeben. Der zweite Teil enthält I. Ebene Geometrie, II. Goniometrie, III. Sphärische Trigonometrie. Der Inhalt dieses Teils ist im Wesentlichen derselbe, wie in andern ähnlichen Büchern, doch sei hervorgehoben, dass die Goniometrie mit grösserer Ausführlichkeit dargestellt ist; es sind sogar die allgemeinen Relationen angegeben, welche Sinus und Cosinus vielfacher Winkel durch die Sinus und Cosinus der einfachen ausdrücken. Mz.

H. SCHUMANN. Lehrbuch der Planimetrie für Gymnasien und Realschulen. Dritte Aufl., bearbeitet von R. Gantzer. Berlin. Weidmann.

Dieses wegen seiner Gründlichkeit sehr zu empfehlende Buch enthält den Lehrgang der Planimetrie von den Elementen an bis zur Berechnung und geometrischen Betrachtung des Kreises einschliesslich. Es ist nicht allein Alles gegeben, was auf Gymnasien und Realschulen hierin nur gefordert werden kann, sondern noch Mannigfaches, was zur weiteren Ausführung des Gebotenen dient. Wir erwähnen verschiedene Sätze von Polygonen, den Pascal'schen Satz u. a. Ferner sind die Elemente der neueren Geometrie aufgenommen, also die Conformität, die harmonische Teilung an geradlinigen Figuren und die harmonischen Punkte am Kreise. Dann kommt die Potenzialität und Aehnlichkeit der Kreise und das Berührungsproblem des Apollonius von Pergä;

ferner Aufgaben aus der rechnenden Geometrie, so unter andern die Bestimmung der Entfernung der Centra der einem Dreieck ein- und umgeschriebenen Kreise, Berechnungen am Kreisviereck, an regulären Vielecken etc. Dann Auflösung von Aufgaben auf rein geometrischem, später auf algebraischem Wege; Anwendung der unbestimmten Gleichungen auf Geometrie. Neben vielfachem Uebungsmaterial, das im Buch selbst enthalten ist, wird dabei fortgesetzt auf die geeigneten Paragraphen in der Sammlung von Gandtner und Junghans verwiesen. Auch die äussere Ausstattung des Buches ist anerkennenswert.

Mz.

J. Rüefli. Lehrbuch der ebenen Geometrie. Bern. J. Dalp. 1880.

Dieses Buch ist zum Gebrauche an Secundarschulen (Realschulen) und Gymnasien bearbeitet. Es enthält in ausführlicher Darstellung die Planimetrie bis zur Kreisberechnung einschliesslich. Dass ein Teil der Flächenberechnungen der Lehre von der Aehnlickkeit vorangeht, ist auch nach Ansicht des Referenten zweckmässig, und zwar wesentlich aus didaktischen Gründen. Die Proportionalität wird mit aller nur wünschenswerten Gründlichkeit behandelt, insofern hierbei auf Commensurabilität und Incommensurabilität Bedacht genommen ist. Der Kreisberechnung geht eine sehr eingehende Behandlung der ein- und umgeschriebenen regulären Polygone voran. Zahlreiche Beispiele und Constructionsaufgaben sind von Abschnitt zu Abschnitt eingereiht. Die Figuren sind deutlich und instructiv, die Darstellung durchweg klar, so dass das Buch entschieden empfohlen werden kann.

Mz.

J. Henrici, P. Treutlein. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Zweiter Teil. Leipzig. Teubner.

Der Inhalt dieses vorliegenden zweiten Teils ist als Pensum der Secunda, nebst weiteren Ausführungen für Prima, bezeichnet;

es wird darin die perspectivische Abbildung in der Ebene und die Berechnung der planimetrischen Grössen behandelt. Demgemäss zerfällt das Buch in zwei Abteilungen: in der ersten wird die perspectivische Aehnlichkeit und nachher die perspectivische Collineation vorgetragen; in der zweiten werden metrische Beziehungen zwischen Strecken, Flächen und Bogen, Winkelfunctionen (sin, cos, etc.) zu bestimmten Teilen des rechten Winkels gegeben, woran sich die Berechnung regelmässiger Polygone und des Kreises knüpft; dann folgt Goniometrie, ebene Trigonometrie und Behandlung von Aufgaben der praktischen Geometrie. Am Schluss ist eine grosse Zahl von Uebungsaufgaben, die sich auf den gesammten Inhalt des Buches beziehen, gegeben. Auf einer beigefügten Karte ist die Triangulirung des Grossherzogtums Baden als Exemplification zur praktischen Geometrie dargeboten. Grosse Gründlichkeit und Ausführlichkeit zeichnen das Buch in allen seinen Teilen aus; dabei ist nicht allein Alles, was sonst auf dieser Unterrichtsstufe behandelt wird, gegeben, sondern auch die neuere Geometrie. Die modernen Anschauungen geometrischer Gebilde sind derartig herangezogen, dass die ganze Anlage des Buches sich wesentlich von der ähnlicher Bücher unterscheidet. Besondere Sorgfalt ist unter Anderm auch der Darstellung der trigonometrischen Functionen nachzurühmen: es wird hierbei bis zu ihrer Entwickelung in unendliche Reihen vorgegangen. Der Druck und die äussere Ausstattung des Buches endlich lässt nichts zu wünschen übrig.

Mz.

J. Casey. The first six books of the elements of Euclid. Dublin.

Ueber den Zweck der vorliegenden Euklid-Ausgabe spricht sich die Vorrede folgendermassen aus: „Während das Buch das unvergleichliche Original völlig ungeändert wiedergiebt, soll es zugleich die modernen Auffassungen und Entwickelungen, soweit sie sich auf die Elemente der Geometrie beziehen, vorführen.“

Den im Text besprochenen Sätzen ist überall das Wesentliche der Euklid'schen Beweisführung beigefügt; meist ist auch

der Weg angegeben, auf dem man zur Lösung von Aufgaben gelangt. Weiterhin sind zahlreiche andere Beweise der Sätze mitgeteilt. Den Definitionen sind ausführliche Anmerkungen beigegeben, endlich ist die Theorie der Proportionen (Buch V.) in algebraischer Form gegeben.

Der Inhalt ist sodann durch eine grosse Zahl neuer Sätze und Aufgaben erweitert. Die einfachsten von diesen schliessen sich unmittelbar an diejenigen Euklidischen Sätze an, aus denen sie folgen, während die schwierigeren am Schlusse der einzelnen Bücher zusammengestellt sind. Von einzelnen Aufgaben ist die Lösung angegeben, wie von der bekannten über den Neunpunktekreis etc.

Die Noten am Ende des Buchs enthalten die moderne Theorie der Parallelen, Legendre's und Hamilton's Beweise des Satzes, dass die Summe der Dreieckswinkel gleich zwei Rechten ist, einen elementaren Beweis für die Construction des regulären Siebenzehnecks, mechanische Methoden zur Trisection des Winkels etc.

Man erkennt daraus, dass das vorliegende Werk mehr enthält, als irgend eine der früheren Euklid-Ausgaben, und dass es namentlich in Bezug auf Einzelnheiten jene Ausgaben an Vollständigkeit übertrifft. Csy. (Wn.).

J. O. Gandtner, K. F. Junghans. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Berlin Weidmann.

Von dieser weit verbreiteten und ziemlich allgemein bekannten Sammlung liegt eine neue Bearbeitung vor, die nach dem Wunsche des Herrn Gandtner Herr Junghans allein übernommen hat. Vom ersten Teil, in welchem Proportionen nicht angewandt werden, ist 1879 die vierte Auflage, und vom zweiten Teil ist 1882 die dritte Auflage herausgegeben. Die Anlage dieser beiden Teile ist dieselbe. Zuerst kommt ein Verzeichnis der als bekannt angenommenen Sätze und Aufgaben aus der Elementargeometrie, und hierauf folgen in systematischer Ordnung Lehrsätze und Aufgaben. Das hier gebotene Material ist ein überaus reiches;

die Grundlehren der neueren Geometrie (anharmonisches Verhältnis, Involution u. s. f.) finden im zweiten Teile eingehende Berücksichtigung. Nur Einiges möge hiervon erwähnt werden. Die Stewart'sche Gleichung, die Sätze von Monge, Menelaus, Ceva, Pascal, Brianchon, die Castillon'sche Aufgabe und das Berührungsproblem des Apollonius. Aber auch sehr vieles Andere, zum Teil gar nicht Bekannte, ist in der Sammlung enthalten. Die Berechnungsaufgaben bieten eine nicht minder grosse Fülle von Uebungsstoff; und vor Allem wegen dieser Vielseitigkeit verdient das auch äusserlich vortrefflich ausgestattete Buch angelegentliche Empfehlung. Mz.

H. Lieber, F. von Lühmann. Geometrische Constructionsaufgaben. Sechste Aufl. Berlin. L. Simion.

Es ist dies ein sehr nützliches Buch zur Einübung und Befestigung der Kenntnisse in der Planimetrie. Im ersten Abschnitte werden Dreiecks- und Vierecks-Constructions-Aufgaben gegeben, also z. B. Aufgaben, wo die Summe oder die Differenz zweier Seiten gegeben ist etc.; und zwar kommen hier sowohl wie in den beiden folgenden Abschnitten zuerst Aufgaben, die ohne, später solche, die mit Proportionen zu lösen sind. Im zweiten Abschnitte folgen vermischte Aufgaben, z. B. zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Linie nach gegebenen Bedingungen zu ziehen, u. s. w. Im dritten Abschnitte werden Kreisaufgaben gegeben, darunter das Apollonische Berührungsproblem, und sogar die Malfatti'sche Aufgabe. Der vierte Abschnitt enthält Verwandlungs- und Teilungs-Aufgaben, der fünfte solche Aufgaben, die durch algebraische Analysis zu lösen sind. Am Schlusse folgen Aufgaben, bei welchen die Coordinatenmethode angewandt wird, dann Aufgaben zur Einübung der stetigen Teilung, welche von Herrn H. Emsmann herrühren, und endlich mannigfache geometrische Oerter. Anzuerkennen ist die Ordnung und Uebersichtlichkeit, welche das ganze Buch beherrscht.

Mz.

G. Tarry. Propriétés générales de trois figures semblables. Mathesis II. 73-77.

Mn.

J. Albers. Die Seitenproportionalen eines Dreiecks und die Proportionaldreiecke desselben. Hoppe Arch LXVIII. 53-72.

In dieser Arbeit, welche durchweg elementare Geometrie behandelt, werden folgende Definitionen gegeben: Wenn man in irgend einem Dreieck ABC den Winkel $ACD = ABC$ macht, also einen Dreieckswinkel in einem Endpunkte an die gegenüberliegende Seite legt, wobei Punkt D sich auf AB befindet, so heisst CD Seitenproportionale des Dreiecks. Ebenso kann man auch Winkel $BCE = BAC$ machen (E liegt wieder auf AB) und hat eine zweite Seitenproportionale CE. Ferner wird das Dreieck CDE, welches gleichschenklig sein muss, Proportionaldreieck von ABC genannt. Auf diese Gegenstände bezieht sich nun die vorliegende Arbeit. Mz.

E. Hain. Ueber das gleichseitige Dreieck. Hoppe Arch. LXIX. 44-54.

Der Herr Verfasser betrachtet zuerst ein beliebiges Dreieck ABC, welches als Axendreieck genommen wird, und in Bezug auf dasselbe die trimetrischen Coordinaten eines Punktes. Wenn dann für dieses Dreieck gewisse Sätze und Formeln gefunden sind, so werden durch Specialisirung Sätze für ein gleichseitiges Dreieck erhalten. So unter Anderm: „Die Verbindungsgeraden der Spiegelbilder des Umkreiscentrums eines Dreiecks bezüglich dessen Seiten mit den Gegenecken schneiden sich im Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises.“ Und dann weiter: „Fällt man von einem beliebigen Punkte in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks auf die Seiten desselben Lote, und verlängert man dieselben über den Fusspunkt um sich selbst, so treffen sich die Verbindungsgeraden der Endpunkte dieser Verlängerungen mit

den Gegenecken in einem Punkte." In dieser Weise folgen noch andere Sätze. Mz.

A. Picart. Solution d'un problème de géométrie.
Nouv. Ann. (3) I. 33-39.

In einem gleichschenkligen Dreieck OAB sei der Basiswinkel bei A gleich dem n-fachen des Winkels an der Spitze O, man soll das Verhältnis der Basis AB zur Seite OA finden. Diese Aufgabe behandelt der Herr Verfasser, indem er den Winkel bei A in n gleiche Teile teilt; ferner Seite AB mit x, die Teilungslinien der Reihe nach mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet (wo also x_n mit OA zusammenfällt) und die Relationen aufstellt:

$$xx_2 - x_1^2 = \frac{xx_1^2x_2}{R^2}, \quad x_1x_3 - x_2^2 = \frac{x_1x_2^2x_3}{R^2}, \text{ etc.}$$

$$x_{n-2}x_n - x_{n-1}^2 = \frac{x_{n-2}x_{n-1}^2x_n}{R^2},$$

in welchen zu beachten, dass $x_n = R$, $x_1 = x$.

Aus diesen $n-1$ Relationen geht durch Elimination von $x_1, \dots, x_{n-1}$ die gesuchte Gleichung für $\frac{x}{R}$ hervor.

Die letzte der angegebenen Relationen wird zu diesem Zweck als Differenzengleichung behandelt und integrirt. Es kommt dann:

$$\frac{1}{x_n} = Ca^n - C'a^{-n},$$

wo C, C', a drei Constante sind, die in der Beziehung stehen:

$$CC'(a^2 + a^{-2} - 2) - \frac{1}{R^2} = 0.$$

Schliesslich wird gezeigt, dass $a + \frac{1}{a}$ aus den beiden Gleichungen eliminirt werden muss:

$$a + \frac{1}{a} = 2 - \frac{x^2}{R^2},$$

$$a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}} - \left(a^{n-2} + \frac{1}{a^{n-2}}\right) + \left(a^{n-3} + \frac{1}{a^{n-3}}\right) - \cdots + (-1)^{n-1} = \frac{x}{R}.$$

wo also der Ausdruck von $a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}$ etc. durch $a+\frac{1}{a}$ vorher ermittelt sein muss. Am Schlusse der Arbeit wird noch erörtert, warum die Analysis zur Bestimmung des Wertes von $\frac{x^2}{R^2}$ auf eine Gleichung vom Grade $2n-2$ führt.

Mz.

E. HAIN. Zur Construction reciproker Punkte des Dreiecks. Hoppe Arch. LXVIII. 442-444.

Der Herr Verfasser betrachtet ein Axendreieck ABC und in der Ebene desselben einen Punkt P, dessen Entfernungen von den Seiten des Dreiecks BC, CA, AB resp. proportional zu p_a, p_b, p_c seien; dann heissen diese Grössen die trimetrischen Coordinaten von P in Bezug auf ABC. Wenn nun ein anderer Punkt Q die Coordinaten $\frac{1}{p_a}$, $\frac{1}{p_b}$, $\frac{1}{p_c}$ hat, so wird er der reciproke Punkt des Punktes P genannt. Wenn ferner in diesem Coordinatensystem

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0,$$
$$a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ sind, so heissen diese Geraden reciprok, falls $a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2$. Es werden nun die bekannten Constructionen erwähnt, durch welche zu einem gegebenen Punkte P der reciproke Q, und zu einer gegebenen Geraden $\mathfrak{G}_1$ die reciproke $\mathfrak{G}_2$ gefunden werden. Darauf wird eine neue Construction von Q und $\mathfrak{G}_2$ angegeben, welche ausser der Construction des Punktes J (Centrum des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises) nur das Ziehen von geraden Linien verlangt.

Mz.

H. SCHUBERT. Elementarer Beweis des Feuerbach'schen Satzes. Pr. Hamburg. Hoffmann Z. XIII. 19-21.

Der vorliegende Beweis des interessanten Feuerbach'schen Satzes, dass der durch die Mitten der Seiten eines Dreiecks

gehende Kreis F jeden die drei Seiten des Dreiecks tangirenden Kreis K berührt, bedient sich ganz elementarer Betrachtungen, so dass derselbe auf dem Gymnasium schon in Secunda vorgetragen werden kann. Der Gedanke, welcher dem Beweise zu Grunde liegt, ist der, die Existenz eines Punktes nachzuweisen, welcher gleichzeitig auf dem Kreise F, auf dem Kreise K und auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte dieser beiden Kreise liegt. Die Darstellung des Beweises ist klar und durchsichtig. Hz.

H. M. Taylor. On a six-point circle connected with a triangle. Mess. (2) XI. 177-179.

Es seien AD, BE, CF die Höhen des Dreiecks ABC; ferner seien Fc, Da, Eb, sowie $E\beta$, $F\gamma$, $D\alpha$ Lote, die resp. auf die Seiten BC, CA, AB gefällt sind. Dann liegen die Punkte a, γ, b, α, c, β auf einem Kreise. Dies ist der Sechspunktekreis des Herrn H. M. Taylor.

Ferner steht jedes der einander gleichen Dreiecke abc, $\alpha\beta\gamma$ zu dem Dreieck ABC in dem Verhältnis

$$\sqrt{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} : 1.$$

Ist endlich φ der Winkel über der Sehne $a\alpha$, dessen Scheitel einer der Punkte a, b, c, γ ist, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C.$$

Glr. (Wn.).

R. C. Rowe. Note on Mr. H. M. Taylor's six-point circle. Mess (2) XII. 36.

Anderer Beweis, dass die im vorhergehenden Referat definirten sechs Punkte a, γ, b, α, c, β auf einem Kreise liegen.

Glr. (Wn.).

G. Heppel, L. A. Kittudge, W. J. C. Miller. Solutions of a question (6667). Ed. Times XXXVI. 73-74.

Lösung der Aufgabe, ein Quadrat zu construiren, wenn die Abstände dreier Ecken desselben von einem festen Punkte ge-

geben sind. Der Inhalt des Quadrats wird, wenn a, b, c jene Abstände, und Δ der Inhalt des aus den Seiten a, $b\sqrt{2}$, c construirten Dreiecks ist,

$$\frac{1}{2}(a^2+c^2)\pm 2\Delta.$$

Die Aufgabe lässt sich auf ein Rechteck ausdehnen. Ist $m:n$ das Verhältnis der Seiten des Rechtecks, $b' = \frac{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}}{n} b$, $c' = \frac{m}{n} c$, Δ der Inhalt des Dreiecks mit den Seiten a, b', c', so ist der Flächeninhalt des Rechtecks

$$\frac{1}{m^2+n^2}\{mn(a^2+c^2)\pm 4n^2\Delta\}.$$

Wn.

W. E. Heal. Solution of a problem. Analyst IX. 92.

Sind $2a$, $2b$, $2c$, $2d$ die Seiten eines Vierseits, h und k die Abstände der Mittelpunkte zweier Gegenseiten, so ist

$$h^2-k^2 = 2(a^2-b^2+c^2-d^2)$$

Jn. (Wn.)

D. Edwardes, C. Morgan, G. F. Walker. Solutions of a question (6403). Ed. Times XXXVI. 89.

Ist $ABCD$ ein einem Kreise einbeschriebenes Viereck und sind H, K, L, M die Höhenschnittpunkte der von den Seiten und Diagonalen des Vierecks gebildeten Dreiecke, so ist 1) das Viereck $HKLM$ congruent $ABCD$; 2) sind die Punkte A, B, C, D die Höhenschnittpunkte der von den Seiten und Diagonalen von $HKLM$ gebildeten Dreiecke; 3) die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte schneiden sich in einem Punkte und werden dort halbirt; 4) dieser Punkt ist zugleich der Mittelpunkt der Centrale der um beide Vierecke beschriebenen Kreise.

Wn.

A. Sachse. Ueber eine Eigenschaft des vollständigen Vierecks. Hoppe Arch. LXVIII. 425-427.

Einige bekannte Sätze vom vollständigen Viereck werden verallgemeinert, indem für die unendlich entfernte Gerade der Ebene eine beliebige Gerade substituirt wird. Die Beweise werden durch metrische Relationen geführt. Mz.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Dreieck und Viereck von D. Edwardes, G. Eastwood, J. O'Regan, G. Heppel, W. A. Whitworth, K. Gale, E. Buck, J. Young, Ch. Ladd, T. R. Terry, E. Rutter, G. M. Reeves, S. Constable, M. Baker, S. N. Willis, W. H. Blythe, W. B. Grove, R. Knowles finden sich Ed. Times XXXVI. 34, 40, 101, 106, 108, 115; XXXVII. 35, 50, 83-84, 113, 124. Wn.

E. Catalan. Question (65.) Mathesis II. 85-88, 245-248.

Ist R der Radius des umschriebenen, r der Radius des einbeschriebenen Kreises eines regulären Polygons, ϱ der Radius des Kreises, welcher mit dem Polygon gleichen Umfang hat, so ist

$$\frac{1}{3}(r+2R) > \varrho > \sqrt[3]{rR^2}.$$

Mn. (Wn.).

F. Edler. Vervollständigung der Steiner'schen elementar-geometrischen Beweise für den Satz, dass der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt, als jede andere ebene Figur gleich grossen Umfanges. Gött. N. 1882. 73-80.

Der Steiner'sche Beweis beruht auf der Voraussetzung, dass es eine Figur grössten Inhalts giebt. Die Vervollständigung hat der Verfasser bereits in Hoffmann Z. X. 245 (siehe F. d. M. XI.

(1879) 374) gegeben. Das Gegenwärtige ist eine Vereinfachung davon. Ein beliebiges Vieleck von n Seiten wird durch höchstens n-malige Parallelverschiebung und Halbirung successive in ein solches von kleinerem Umfang und grösserem Inhalt verändert, das $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$ Symmetrieaxen hat und schliesslich regelmässig wird. Das regelmässige lässt sich dann mit dem Kreise vergleichen, und es folgt, dass es für jedes Vieleck einen Kreis von kleinerem Umfang und grösserem Inhalt giebt. Vom Vieleck wird nach einer Steiner'schen Methode auf ein beliebig begrenztes Flächenstück übergegangen.

H.

E. Rouché. Sur la méthode des isopérimètres. Nouv. Ann. (3) I. 325-330.

Es handelt sich hier um reguläre Polygone von constantem Umfang $= 2$, deren Seitenzahl sich immer verdoppelt. Mit ϱ wird der Radius des dem Polygon umschriebenen, mit α der Radius des dem Polygon eingeschriebenen Kreises bezeichnet, wenn das Polygon n Seiten hat; mit ϱ_k, α_k die analogen Grössen bei einem Polygon von $n.2^k$ Seiten. Nun hat Herr D. André bewiesen, dass die Brüche

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha}, \quad \frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_m-\alpha_{m-1}}{\alpha_{m-1}-\alpha_{m-2}}$$

sämmtlich kleiner als $\frac{1}{4}$ sind, und dass dasselbe von den Brüchen

$$\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho-\varrho_1}, \quad \frac{\varrho_2-\varrho_3}{\varrho_1-\varrho_2}, \dots, \frac{\varrho_{m-1}-\varrho_m}{\varrho_{m-1}-\varrho_{m-2}}$$

gilt. Hiervon ausgehend, gelangt der Herr Verfasser zu der Ungleichheit:

$$\varrho_1-\frac{1}{3}(\varrho-\varrho_1)<\frac{1}{\pi}<\alpha_1+\frac{1}{3}(\alpha_1-\alpha).$$

Es wird nun weiter gezeigt, wie sich dies zur approximativen Bestimmung von π verwerten lässt, und darauf aufmerksam gemacht, dass diese vervollkommnete Methode die Rech-

nung um mehr als die Hälfte gegen die sonstige Methode abkürzt. Mz.

A. Schiappa Monteiro. Sobre a divisão em partes eguaes da distancia entre dois pontos e da circumferencia empregando o compasso ordinatio. Teixeira J. IV. 39-52.

Mascheroni hat bekanntlich zuerst eine Anzahl geometrischer Constructionen nur mit Hülfe des Zirkels auszuführen gelehrt. In dem vorliegenden Aufsatz behandelt Herr Monteiro dieselben Aufgaben, speciell die Teilung einer Geraden in eine beliebige Anzahl von Teilen, die Teilung des Kreisumfangs in fünf, acht, zehn, zwölf etc. Teile allein mittelst des Zirkels. Die benutzten Methoden sind von denen von Mascheroni verschieden.

Tx. (Wn.).

M. Baker. Alhazen's problem. Its bibliography and an extension of the problem. Sylv. J. IV. 327-332.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. B. p. 24.

Morel. Solution of a question (5592). Ed. Times XXXVI. 49.

Lösung der Aufgabe, einen Kreis zu construiren, von dem ein Punkt des Umfanges gegeben ist, sowie zwei andere Punkte in den Abständen $\frac{1}{m}r$ und $\frac{1}{n}r$ vom Mittelpunkte.

Wn.

W. B. Grove, D. Eastwood, J. Young, M. Baker, D. Edwardes, Matz. Solutions of a question (6572). Ed. Times XXXVI. 62-63, 110-111.

Zieht man von den Endpunkten A und B des Durchmessers eines Halbkreises die Tangenten AP, BP an einen zweiten Kreis, der den ersten, sowie dessen Durchmesser AB berührt, so ist

$AP \pm BP = AB \pm PQ$, wenn PQ das von P auf AB gefällte Lot ist. Von den beiden Zeichen gilt das obere oder untere, je nachdem der zweite Kreis den ersten von innen oder von aussen berührt.

Wn.

S. Constable, B. Easton, Wolstenholme. Solutions of a question (6720). Ed. Times XXXVI. 103-104.

AB und AC seien zwei feste Tangenten eines Kreises (oder auch eines Kegelschnitts), DE und FG seien zwei beliebige andere Tangenten, die AB in D und F, AC in E und G schneiden. Dann liegt der Schnittpunkt von EF und DG in der Verbindungslinie der Berührungspunkte der festen Tangenten.

Wn.

Morel, T. R. Terry, G. Heppel. Solutions of a question (6700). Ed. Times XXXVI. 82.

Einem Kreise ist ein Dreieck ABC einbeschrieben, ein zweites $A'B'C'$ in denselben Punkten umschrieben. Fällt man von einem Punkte μ der Peripherie auf die sechs Dreiecksseiten die Lote μP, μQ, μR, $\mu P'$, $\mu Q'$ $\mu R'$, so ist

$$\mu P . \mu Q . \mu R = \mu P' . \mu Q' . \mu R'.$$

Wn.

H. Schubert. Ueber die Zahl der Bilder bei einem Winkelspiegel. Hamb. Mitt. 1882. 18-20.

Man denke sich zwei Spiegel S und S' und zwischen ihnen einen leuchtenden Punkt B; durch B lege man die zu beiden Spiegeln lotrechte Ebene, und beschreibe um den Durchschnitt M dieser Ebene mit den beiden Spiegelebenen den Kreis mit dem Radius MB, so müssen auf diesem die Bilder von B sein. Sind A und A' die Punkte, in denen der Kreis die Spiegel S und S' trifft, C und C' die Gegenpunkte von A und A' auf diesem Kreise, so muss ein durch wiederholte Reflexionen erhaltenes Bild B_k zwischen

C und C' sein, wenn es das letzte sein soll. Geometrische Betrachtungen führen dann den Herrn Verfasser zu folgender Regel: Wenn zwei Spiegel sich unter dem Winkel α schneiden, und wenn dieser Winkel durch den leuchtenden Punkt in die beiden Teile φ und φ' zerlegt wird, so findet man die Zahl der entstehenden Bilder auf folgende Weise. Man dividire das Supplement von φ durch α. Geht die Division auf, so merke man sich den Quotienten; geht sie nicht auf, die nächst höhere ganze Zahl. Darauf verfahre man ebenso mit φ'. Die Summe der beiden gemerkten Zahlen ist immer die Zahl der Bilder. Zu beachten ist noch, dass in einigen Fällen die beiden zwischen C und C' fallenden letzten Bilder sich decken. Mz.

F. Nowosielski. Einige Eigenschaften des Systems zweier oder mehrerer Kreise. Jahresbericht des Gymnasiums in Sambor (Galizien). Polnisch.

Dn.

Chr. Nehls. Ueber graphische Rectification von Kreisbögen und verwandte Aufgaben. Hamburg, Jenichen.

Von den vier Grössen: Kreisbogen, Sehne, Centriwinkel und Radius sind zwei gegeben; die beiden andern durch Construction zu finden. Das Rectificationsmittel besteht in der Summirung einer Reihe kleiner Sehnen, die Abschätzung des Fehlers geschieht durch die Arcusreihe. Einige andere Curven werden in Betracht gezogen. H.

Weitere Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis von J. Hammond, B. Easton, Curtis, W. S. McCay, G. Eastwood, E. Rutter finden sich Ed. Times XXXVII. 50, 95-96, 96.

Wn.

J. Hoüel. Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie. Bord. Mém. (2) V. 197-209.

Siehe F. d. M. VII. (1875) p. 322. O.

F. Bendt. Ebene und sphärische Trigonometrie. Leipzig. J. J. Weber.

In der Form von Fragen und Antworten wird der elementare Cursus der ebenen und sphärischen Trigonometrie behandelt. Auch sind bei der ebenen Trigonometrie Aufgaben beigefügt, welche den praktischen Nutzen dieser Disciplin darthun. Im Anhang sind die wichtigsten hierher gehörenden Formeln zusammengestellt. Die Darstellung ist sehr leicht verständlich, der Druck übersichtlich und gut. Mz.

G. Reidt. Die trigonometrische Analysis planimetrischer Constructionsaufgaben. Leipzig. Teubner.

Der Herr Verfasser erklärt selbst im Vorwort, dass die vorliegende Schrift sich die Aufgabe stellt, ein ausgedehnteres Material auf dem im Titel angegebenen Gebiet zu liefern, als man gewöhnlich findet, und zwar soll dieses Material nach den Arten der Behandlung geordnet sein. Der Inhalt ist dem entsprechend. Zuerst wird die Methode erklärt, und es werden Strecken mittelst gegebener Winkel gesucht, dann folgt die Analysis mit Hülfe unbekannter Winkel; hierauf Aufgaben mit zusammengesetzten Winkeln; dann Construction von Winkeln durch schiefwinklige Dreiecke und endlich Construction von Winkeln aus unentwickelten Gleichungen. Ausser vereinzelten Andeutungen und durch Beifügung der resultirenden Gleichungen gegebenen Fingerzeigen sind keine näheren Angaben über die Auflösungen beigegeben. Nach Ansicht des Referenten ist dies jedenfalls ein sehr nützliches Buch für die oberste Klasse höherer Unterrichtsanstalten.

Mz.

V. J. HÜBNER. Ueber eine neue Ableitung der Formeln für $\frac{\sin}{\cos}(\alpha+\beta)$. Cas. XI. 214-215. (Böhmisch).

Unter Zugrundelegung des bekannten Satzes von Ptolemäus, das Viereck betreffend, wird die Ableitung der fraglichen Formeln kurz ausgeführt. Std.

SCOTT, J. O'REGAN. Solutions of a question (6696). Ed. Times XXXVI. 53.

Ist

$$m\sin(\vartheta+\varphi) = \cos(\vartheta-\varphi),$$

so ist auch

$$\frac{1}{1-m\sin 2\vartheta}+\frac{1}{1-m\sin 2\varphi} = \frac{2}{1-m^2}.$$

Wn.

A. CAYLEY. Note on the formulae of trigonometry. J. Hopkins Circ. 1882. 241.

Sind a, b, c die Seiten eines ebenen Dreiecks, und A, B, C deren bez. Gegenwinkel, so ist bekanntlich

$$a = c\cos B + b\cos C, \text{ u. s. w.}$$

Hier kann man nun

$$\cos A + i\sin A = \frac{x}{w},\quad \cos B + i\sin A = \frac{y}{w},\quad \cos C + i\sin C = \frac{z}{w}$$

setzen, woraus

$$2\cos A = \frac{x}{w}+\frac{w}{x}, \text{ etc.}$$

folgt, und dann erhält man

$$-2ayzw + by(z^2+w^2) + cz(y^2+w^2) = 0$$

und zwei ähnliche Gleichungen. Eine analoge Betrachtung wird für das sphärische Dreieck angestellt. Mz.

WEILL. Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier. S. M. F. Bull. X. 55-59.

Ist ABC ein Dreieck, in welchem der Winkel B das $(n+1)$-fache des Winkels bei A ist, so ziehe man BD so, dass Winkel DBA dem Winkel bei A gleich wird, und hierauf DE parallel zu AB; dann ist BDE ein Dreieck, in welchem der Winkel DBE gleich dem n-fachen des Winkels EDB ist. Wenn nun a_n, b_n, c_n die Seiten dieses letzteren Dreiecks, ferner a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} die des erstern sind, so zeigt sich, dass

$$a_{n+1} = \frac{a_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{c_n^2-a_n^2}; \quad b_{n+1} = \frac{c_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{c_n^2-a_n^2};$$

$$c_{n+1} = \frac{b_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{b_n^2}.$$

Von diesen Formeln geht nun der Verfasser aus, um ganze Zahlen für die Seiten der in Rede stehenden Dreiecke zu finden. Zahlentheoretische Betrachtungen und die Benutzung der Gleichung

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = 2^{n-1}\cos^{n-1}\varphi - 2^{n-3}.\frac{n-2}{1}\cdot\cos^{n-3}\varphi + \cdots$$

führen dann zu der Lösung

$$a_n = q^n, \quad b_n = c_{n-1}q,$$

$$c_n = p^n - \frac{n-1}{1}p^{n-2}q^2 + \frac{(n-2)\,(n-3)}{1.2}p^{n+4}q^4 + \cdots,$$

wo p und q zwei ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Die Reihe beginnt mit

$$a_1 = q, \quad b_1 = q, \quad c_1 = p.$$

Hierauf wird noch von solchen Dreiecken gesprochen, bei welchen die Seiten durch auf einander folgende Zahlen gemessen werden. Soll z. B. der eine Winkel das Doppelte eines andern im Dreieck sein, so ist bei consecutiven Zahlen 4, 5, 6 die einzige Lösung.

Mz.

L. A. KITTUDGE, J. O'REGAN. Solutions of a question (5951). Ed. Times XXXVII. 39-40.

Sind A, B, C die Winkel eines Dreiecks, und ist

$$\alpha = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{2\cos 2A - 1},$$

während β und γ eine analoge Bedeutung haben, so ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 4\alpha\beta\gamma.$$

Wn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Trigonometrie von E. W. Symons, T. R. Terry, J. W. Russell, H. L. Orchard, D. Edwardes, A. Cohen, R. Knowles, Curtis finden sich Ed. Times XXXVI. 120, 122-123; XXXVII. 28-29, 113-114. Wn.

P. v. Schäwen. Analogien zwischen dem sphärischen und dem ebenen Dreieck. Zeitschr. f. d. Realschulw. 394-401, 469-478.

Die Anzahl derjenigen Sätze aus beiden Trigonometrien, welche nicht nur dem Sinne, sondern auch dem äusseren Ansehen nach sich gegenseitig entsprechen, ist weit grösser, als man gemeiniglich annimmt, und man darf deshalb dem Verfasser Dank wissen, dass er uns mit der hier vorliegenden, umfangreichen Zusammenstellung beschenkt hat. Alle Relationen, deren Richtigkeit erst durch eine eigentliche Rechnung hätte erwiesen werden müssen, sind ausgeschlossen worden; so z. B. die Cosinussätze, denn obwohl für den Radius ∞ zwischen den Gleichungen

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad \text{und} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

keinerlei Unterschied besteht, so leuchtet doch die Analogie nicht von vorne herein ein. Mit grosser Geschicklichkeit hat deshalb der Verfasser die einzelnen Ausdrücke so umgeformt, dass in ihnen einzig und allein Sinus und Tangenten vorkommen; ersetzt man darin $\sin a$ und $\operatorname{tang} a$ resp. durch den Bogen oder die Sehne a, so kann man jeder Formel der Raumtrigonometrie sofort die entsprechende der ebenen Trigonometrie dualistisch zur Seite

stellen. Für die Berührungskreise des rechtwinkligen Dreiecks gilt z. B. folgendes Schema:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\varrho_c &= \sin\frac{1}{2}(\ a+b-c); & \varrho_c &= \frac{1}{2}(\ a+b-c);\\
\operatorname{tang}\varrho_b &= \sin\frac{1}{2}(\ a-b+c); & \varrho_b &= \frac{1}{2}(\ a-b+c);\\
\operatorname{tang}\varrho_a &= \sin\frac{1}{2}(-a+b+c); & \varrho_a &= \frac{1}{2}(-a+b+c),\\
\operatorname{tang}\varrho &= \sin\frac{1}{2}(\ a+b+c); & \varrho &= \frac{1}{2}(\ a+b+c).
\end{aligned}$$

Viele der mitgeteilten Sätze sind früher schon von Meyer Hirsch, Gudermann, dem Berichterstatter u. a. angegeben worden, viele aber sind auch, wenigstens in dieser Form, geistiges Eigentum des Autors. Namentlich gehört in diese Kategorie eine neue Betrachtung, welche zum Lexell'schen Theoreme führt. Man denke auch nicht, dass solche Vergleichungen etwa schablonenmässig durchgeführt werden könnten; es ist vielmehr darauf zu achten, ob einem rechtwinkligen Dreieck beispielsweise das rechtwinklige Kugeldreieck oder jenes andere sphärische Dreieck zuzuordnen ist, in welchem die Summe zweier Winkel dem Dritten gleichkommt; für das erstgenannte Dreieck ist z. B. das Analogon des Pythagoras nur mittelst der Hyperbelfunctionen zu erhalten, bei dem anderen dagegen hat man direct

$$\sin^2\frac{1}{2}c = \sin^2\frac{1}{2}a + \sin^2\frac{1}{2}b.$$

Gr.

P. v. Schäwen. Die seitenhalbirenden Transversalen des sphärischen Dreiecks. Schlömilch Z. XXVII. 126-128.

Der Herr Verfasser giebt in dieser Arbeit einige Sätze über das sphärische Dreieck, in denen die seitenhalbirenden Transversalen (Hauptkreisbogen) vorkommen, und welche ihre vollständigen Analoga im ebenen Dreieck haben. Die Beweise werden sehr einfach durch trigonometrische Rechnung geführt.

Mz.

F. HOZA. Bemerkung zur sphärischen Trigonometrie.
Cas. XI. 212-214. (Böhmisch).

Mit Berücksichtigung einer von Dostor in Grunert Arch. (Bd. 57) veröffentlichten Abhandlung werden Formeln für

$$\cos\frac{a}{2},\quad \sin\frac{a}{2},\quad \cot\frac{a}{2}$$

entwickelt, welche in der Praxis bequemer anzuwenden sind. Bezeichnet nämlich α, β, γ sphärische Winkel, a, b, c sphärische Seiten, und setzt man

$$\sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - 90^\circ,$$

so erhält man

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\sin(\beta-\sigma)\sin(\gamma-\sigma)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\sigma\sin(\alpha-\sigma)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

$$\cot^2\frac{a}{2} = \frac{\sin(\beta-\sigma)\sin(\gamma-\sigma)}{\sin\sigma\sin(\alpha-\sigma)}.$$

Std.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie von W. H. H. HUDSON, R. TUCKER, CH. LADD, E. W. SYMONS, T. R. TERRY, A. MCMURPHY, B. EASTON, J. J. WALKER finden sich
Ed. Times XXXVI. 44, 120; XXXVII. 82, 96.

Wn.

G. F. WALKER. Two constructions for drawing spheres to touch four given spheres, and an associated theorem.
Mess. (2) XII. 173-174.

Der Verfasser teilt zwei Lösungen der Aufgabe mit, eine Kugel zu construiren, die vier gegebene Kugeln berührt. Er beweist dann folgenden Satz: Wenn eine Kugel drei gegebene Kugeln berührt, so besteht der Ort für ihren Mittelpunkt im Allgemeinen aus acht ebenen Kegelschnitten und der Ort des Be-

rührungspunktes mit einer der gegebenen Kugeln besteht aus vier kleinen Kreisen; die Ebenen aller zwölf Kreise gehen durch dieselbe Linie, nämlich durch die Radicalaxe der drei Kugeln.

Glr. (Wn.).

H. M. JEFFERY. On theorems relating to the regular polyhedra, which are analogous to those of Dr. Matthew Stewart on the regular polygons. (Abstract.) Lond. R. S. Proc. XIII. 105-112.

Die beiden Hauptsätze, die hier bewiesen werden, sind folgende: A) Ein reguläres Polyeder mit n Ecken sei in eine Kugel vom Radius a beschrieben. Von den Ecken und vom Mittelpunkte seien die Lote $p_1, p_2, \dots, p_n, p$ auf irgend eine Ebene gefällt (die ausserhalb des Polyeders liegt, wenn m ungrade ist), so gilt für die Summe der m^{ten} Potenzen der von den Ecken gefällten Lote der Satz

$$\Sigma(p_r)^m = \frac{n}{2(m+1)a}\{(p+a)^{m+1}-(p-a)^{m+1}\}.$$

Die Formel gilt für alle fünf regulären Polyeder, wenn $m = 1, 2$ oder 3 ist; für Dodekaeder und Ikosaeder auch noch, wenn $m=4$ oder $m=5$, aber nicht weiter.

B) Unter denselben Beschränkungen für m gilt auch folgende Formel, worin v die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Mittelpunkte, d_r die Entfernung desselben Punktes von einer der Ecken ist:

$$\Sigma(d_r)^{2m} = \frac{n}{2(m+n)av}\{(v+a)^{2m+2}-(v-a)^{2m+2}\}.$$

Cly. (Wn.).

C. GUSSEROW. Die Inhaltsermittelung der Körper aus ihren Projectionen. Pr. Berlin.

Nach einigen einleitenden Worten über die Unterrichtsmethode in der Stereometrie, die manches zu Beherzigende enthalten,

skizzirt der Herr Verfasser einen Lehrgang, welcher die Inhaltsermittelung der Polyeder zum Gegenstande hat. Er geht dabei von den wesentlichsten Eigenschaften der Körper aus, nämlich, dass sie allseitig umgrenzt und rücksichtlich ihres Inhalts von der Anordnung ihrer Teile unabhängig sind. So wird für alle Körper dieselbe Regel der Inhaltsermittelung entwickelt, und dabei einerseits die Abstraction des Allgemeinen aus den wesentlichen Eigenschaften des Besondern, und andererseits das Subsummiren eines einzelnen Falles unter die allgemeine Regel in vorzüglicher Weise geübt. Die allgemeine Inhaltsformel für ein Polyeder ergiebt sich, wenn man dasselbe in beliebiger Richtung auf eine Grundebene, die im Allgemeinen den Körper nicht schneidet, parallel projicirt; dann ist unter jeder Fläche des Körpers ein im Allgemeinen schief abgeschnittenes Prisma, und die algebraische Summe derselben (indem nämlich ein Teil dieser Prismen positiv, der übrige negativ zu nehmen, wie die Anschauung ergiebt) ist dem Inhalte des Körpers gleich. Aus dieser Grundregel wird nun in einfacher und anschaulicher Weise die Inhaltsbestimmung einer Reihe mehr und weniger bekannter Polyeder abgeleitet. Mz.

Fr. Hromádko. Berechnung des kubischen Inhalts eines schiefen Prismas ohne Anwendung der sphärischen Trigonometrie. Cas. XI. 123-137. (Böhmisch).

Std.

M. C. Paraira. Over de figuur, welke ontstaat, wanneer men op de sejden van een driehoek parallelogrammen beschrijft. Nieuw Arch. IX. 87-96.

M. C. Paraira. Een stereometrisch Analogon van het theorema van Pappus. Nieuw Arch. IX. 96-97.

Untersucht wird die Figur, welche entsteht, wenn man über den Seiten eines Dreiecks Parallelogramme beschreibt, über den

Verbindungsgeraden der Ecken wieder Parallelogramme und so weiter.

In der zweiten Arbeit wird der folgende Satz bewiesen: „Construirt man über den Seitenflächen einer Pyramide beliebige Prismen, deren Oberflächen jedoch verlängert, sich in einem Punkte schneiden, so ist die Summe ihrer Inhalte immer gleich dem Inhalt eines Prismas, welches mit der Pyramide eine gemeinsame Grundfläche hat, und dessen Kanten gleich und parallel sind der Verbindungslinie der Spitze der Pyramide mit dem gemeinsamen Schnittpunkte der Oberflächen der Prismen."

G.

G. Dostor. Volumes et surfaces de deux corps de révolution. Hoppe Arch. LXVIII. 421-424.

Die erzeugenden ebenen Flächenstücke der zwei Rotationskörper sind begrenzt von einem verlängerten Kreisdurchmesser, einer Tangente und zwei respectiven Bogen des Kreises. Die in Hoppe Arch. LXVII. 254 (s. F. d. M. XIII. (1881) 154) gefundenen Ausdrücke für Volumen und Oberfläche werden auf anderem Wege hergeleitet, dann umgeformt. H.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Stereometrie von F. Morley, G. Turriff, E. W. Symons, A. L. Selby, E. Rutter, W. J. Sharp finden sich Ed. Times XXXVI. 101, 121-122; XXXVII. 51.

Wn.

Th. Liebisch. Geometrische Krystallographie. Leipzig. Engelmann. 1881.

Das vorliegende Werk ist eine zusammenfassende Darstellung der geometrischen Krystallographie unter sorgfältiger Berücksichtigung der Forschungen von Gauss, Möbius, Bravais, Sohncke, Gadolin, Smith etc., deren einheitliche Darlegung die bisherigen Lehrbücher der Krystallographie entbehrten.

Das erste Capitel enthält nach einleitenden Bemerkungen die Definition des Krystalles und eine Reihe hierher gehöriger Sätze über Polyeder, und schliesst mit der Auseinandersetzung des fundamentalen Gesetzes der Zonen von Chr. S. Weiss. Im zweiten Capitel werden die für das Spätere wichtigen projectivischen Beziehungen zwischen den Grundgebilden der Geometrie, Doppelverhältnisse, harmonische Eigenschaften der vollständigen Vierecke und Vierflache abgeleitet, und wird daran die Bezeichnung der Flächen und Kanten durch Indices, d. h. gewisse Abschnittsverhältnisse, behufs einfacher Darstellung der die besagten Krystallelemente bestimmenden Doppelverhältnisse, geknüpft. Dann folgt die Aufstellung der Kanten- und Flächengleichungen als Function der Indices. Das dritte Capitel enthält als einen Ausfluss des Gesetzes der Zonen das Gesetz der rationalen Indices, nach dem alle in einem Krystallcomplexe möglichen Flächen aus irgend vier Flächen oder Kanten, welche nicht zu dreien einem Büschel angehören, arithmetisch abgeleitet werden können. Es ist aber auch umgekehrt wahr (§ 3), dass alle Flächen mit rationalen Indices, welche aus vier gegebenen linear-geometrisch ableitbar sind, „im Zonenverbande stehen." Im vierten Capitel wird dann weiter gefolgert, dass das Doppelverhältnis von je vier Flächen eines Büschels im Krystallcomplexe stets eine rationale Zahl sein müsse. Das fünfte Capitel behandelt die Transformationen bei Veränderung der bestimmenden Elemente. Einleitend werden im sechsten Capitel einige Formeln der sphärischen Trigonometrie zusammengestellt, und dieselben dann zur Ableitung von Winkelrelationen zwischen Krystallkanten und Flächen benutzt. Hiermit schliesst der erste Abschnitt.

Der zweite Abschnitt kann kurz als eine dem krystallographischen Zwecke angepasste Axonometrie bezeichnet werden. Im letzten, zehnten Capitel, werden Krystallberechnungen als Beispiele vorgenommen. Damit sind die vorbereitenden Untersuchungen erledigt, und es wird im dritten Capitel die Krystallographie im engern Sinne begonnen. Zunächst werden die krystallographisch möglichen Arten von Symmetrieen, d. h. diejenigen, welche dem Gesetze der rationalen Indices genügen,

aufgezählt, und dann die sechs sich ergebenden Krystallsysteme einzeln untersucht. Ein besonderes Capitel wird den Zwillingsbildungen gewidmet. Den Schluss des Werkes bildet eine Zusammenstellung der Bezeichnungsmethoden, wie sie von den verschiedenen Autoren benutzt werden. Sehr anzuerkennen sind die sorgfältigen Literaturnachweise, welche zum Teil in kurzen historischen Uebersichten den einzelnen Capiteln angereiht werden.

Rg.

WEBSKY. Ueber eine Methode, den Normalenbogen, um welchen eine Krystallfläche von einer ihr sehr nahe liegenden Zone absteht, und ihre krystallographische Lage zu bestimmen. Berl. Ber. 1882. 967-979.

Mz.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

G. VERONESE. Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni. Ven. Ist. Atti (5) VIII. 981-1025.

Diese Arbeit bezweckt, die Eigenschaften des Raumes mit vier Dimensionen durch centrische Projection auf einen Raum von drei Dimensionen der Anschauung nahe zu bringen. Die Methoden der Construction sind dieselben, welche in der gewöhnlichen Centralprojection verwendet werden. Die die Elemente des Raumes von vier Dimensionen bestimmenden Elemente des Bildraumes sind: Fluchtpunkt und Spurpunkt für eine Gerade, Fluchtlinie und Spurlinie für eine Ebene und endlich Fluchtebene für einen Raum von drei Dimensionen. Die zu lösenden Elementaraufgaben werden, wie sonst üblich, in projective und metrische eingeteilt und der Reihe nach gelöst. Zum Schlusse wird speciell die orthogonale Projection behandelt.

W. St.

F. Tilšer. Zur Einführung in die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie. Zeitschr. f. d. Realschulw. VII. 75-99, 523-536, 581-595, 641-661; Cas. XI. 59. (Böhmisch).

Diese Aufsätze enthalten nicht sowohl eine Methodik der descriptiven Geometrie, als vielmehr allgemeine Reflexionen zur Philosophie der Wissenschaft überhaupt, ganz im Sinne der bekannten „Ikonognosie" des Verfassers. Dem eigentlichen Gegenstande näher tritt erst die letzte Abteilung, welche die Verwendung verschieden geformter Buchstabensymbole zur Bezeichnung der verschiedenen Bestandtheile eines Raumgebildes erörtert und anempfiehlt. Gr.

A. Mannheim. Premiers éléments de la géométrie descriptive. Nouv. Ann. (3) I. 385-401, 433-450.

Bekanntlich wird die geometrische Natur eines Körpers durch Grundriss und Aufriss zur Darstellung gebracht. Beide Projectionen pflegen durch Zeichnung in einer Ebene entworfen und der Durchschnitt der horizontalen und der verticalen Ebene durch eine Gerade (la ligne de terre) markirt zu werden; die Geraden, welche unter der Horizontalebene und hinter der Verticalebene verlaufen, werden alsdann dadurch von den anderen abgehoben, dass sie in der Zeichnung punktirt werden. Herr Mannheim empfiehlt, den Durchschnitt beider Projectionsebenen willkürlich zu lassen und in der Zeichnung nicht als Gerade auszuwerfen, da dieselbe wol für die Stellung des Körpers zu den Projectionsebenen, aber nicht für seine eigene geometrische Natur von Belang sei. Das Punktiren der Linien kommt dadurch in Wegfall; denn man kann den Körper stets in solcher Stellung zu den Projectionsebenen denken, dass alle seine Teile über der Horizontalebene und vor der Verticalebene gelegen sind. Einige Beispiele zeigen die Zweckmässigkeit, in dieser Form die Elemente der descriptiven Geometrie zu behandeln.

Schn.

A. Schmidt. Elemente der darstellenden Geometrie. Die orthogonale Projection. Nebst eingeheftetem Atlas von acht Tafeln mit 108 Figuren. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

In dem vorliegenden Buche hat der Verfasser die Methode der darstellenden Geometrie dargelegt, die er seit vielen Jahren mit Erfolg am Wiesbadener Realgymnasium zur Anwendung gebracht hat. Demgemäss ist der Text, dem mündlichen Vortrag sich anschliessend, ziemlich breit; 229 Seiten gr. 8 sind für den Gegenstand wol etwas reichlich, zumal da keine Schattenconstruction aufgenommen ist. Diese und die Elemente der Perspective sollen übrigens einen zweiten Teil bilden. Die Tafeln, wie überhaupt die Ausstattung sind musterhaft.

Rg.

J. Menger. Geometrische Formenlehre in Verbindung mit dem Freihandzeichnen. Für die erste Klasse der Realschulen. Mit 44 Holzschnitten. Unter Mitwirkung des Prof. A. Anděl herausgegeben. Wien. A. Hölder.

J. Menger. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Ober-Realschulen. Wien. A. Hölder.

F. Smolik. Elemente der darstellenden Geometrie. Prag. Tempsky.

Alle drei Bücher behandeln den Lehrstoff im Sinne des von der Oesterreichischen Regierung bezüglich des Unterrichts in der darstellenden Geometrie ergangenen Erlasses. Sie reihen sich den besseren Lehrbüchern an und dürften auch in nicht-österreichischen Schulen Verwendung finden. (Vergl. die Recension des Referenten in Schlömilch Z. XXVII. p. 142 f.).

Rg.

W. H. BEHSE. Die darstellende Geometrie für Real-, Gewerbe- und Werkmeisterschulen, sowie zum Selbstunterricht für Bautechniker und Mechaniker. I. Teil. Die Projectionslehre. Construction der Durchschnittsfiguren. Windschiefe Flächen. Spirallinien und Spiralflächen. Vierte gänzlich umgearbeitete Aufl. Leipzig. G. Knapp. (E. Nowák).

Die wiederholten Auflagen des Buches dürften dessen Brauchbarkeit hinlänglich beweisen. Der Text ist leicht fasslich, die Figuren sind im Allgemeinen für den Zweck ausreichend. In Figur 163, einer Abwickelung eines Cylinders, möchte bei einer späteren Auflage eine Aenderung angebracht werden, welche die Tangenten in den Endpunkten der Abwickelungscurve gleiche Winkel mit der Horizontalen einschliessen lässt. Ebenso genügt die Zeichnung der scharfgängigen Schraube (Fig. 195) für ein Lehrbuch der darstellenden Geometrie nicht. Rg.

G. A. V. PESCHKA. Darstellende und projective Geometrie. Mit einem Atlas. Wien. Carl Gerold's Sohn.

Von diesem gross angelegten Werke ist bis jetzt der erste Band „Methodik" erschienen. Referent hat bereits in Schlömilch Z. XXVIII. eine ausführliche Recension veröffentlicht, auf welche hier verwiesen werden möge.

Die folgenden Capitelüberschriften mögen den Inhalt charakterisiren.

Erster Abschnitt. Centralprojection.

I. Capitel. Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene.

II. Capitel. Projectivische Beziehungen zwischen Punkt, Gerade und Ebene.

III. Capitel. Metrische Eigenschaften (Beziehungen).

IV. Capitel. Projectivische Geometrie.

Zweiter Abschnitt. Klinographische oder schiefe Projection.

V. Capitel. Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen.

VI. Capitel. Metrische Beziehungen in parallel-projectivischer Darstellung.

VII. Capitel. Affinität. Parallelprojection (affine Gebilde) des Kreises und der Kegelschnitte. Aufgaben.

Dritter Abschnitt. Darstellungsmethoden vermittelst zweier Projectionsebenen.

VIII. Capitel. Monge's Orthogonalprojection.

IX. Capitel. Methode der schiefen Projection mittelst zweier auf einander senkrechter Projectionsebenen.

X. Capitel. Orthographische Parallelperspective.

XI. Capitel. Axonometrie.

Vierter Abschnitt. Allgemeines über die Lagenveränderungen räumlicher Gebilde.

XII. Capitel. Transformation der Projectionen.

XIII. Capitel. A. Transformation der Projectionen in centraler Projection.

B. Transformation der Objecte.

C. Transformation der Bildebene.

XIV. Capitel. Transformation in schiefer Projection.

XV. Capitel. Transformation in orthogonaler Projection.

Fünfter Abschnitt.

XVI. Capitel. Die Parallelogramm-Projection. (Die Gebilde werden auf zwei Projectionsebenen durch Strahlen projicirt, welche den Ebenen selbst parallel sind.)

XVII. Capitel. Collineation der Räume. Reliefperspective.

XVIII. Capitel. Centrale Projection mit Zuhülfenahme einer Grundebene.

Sechster Abschnitt. Gebilde, welche aus einer endlichen Anzahl ebener Flächenstücke zusammengesetzt sind.

XIX. Capitel. Das körperliche Dreieck oder das Dreikant.

XX., XXI., XXII. Capitel. Darstellung der Polyeder, ebene und gegenseitige Schnitte derselben. Rg.

G. A. V. Peschka. Kotirte Projectionsmethode (kotirte Ebenen) und deren Anwendung. Zweite Aufl. Brünn. Buschak.

G. Nilmann. Handbuch der Linearperspective. Stuttgart. Spemann.

J. Choura. Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie. Wien. Seidel u Sohn.

W. Binder. Die Centralprojection als Hülfsconstruction der Orthogonalprojection. Wien. Braumüller.

D. Tessari. Applicazioni della geometria descrittiva. Vol. I. La Teoria delle ombre e del chiaro-scuro ad uso delle università, delle Scuole d'applicazione per gli ingegneri etc. Fascicolo I., Fascicolo II. ed ultimo. Torino. Camilla e Bertolero.

Ueber das vorliegende umfangreiche Werk ist bereits eine ausführliche Recension von Herrn Wiener in Schlömilch Z. (XXII. p. 180 über die erste Lieferung und ibid. XXVI. p. 134 über die zweite Lieferung) erschienen. Der Inhalt der einzelnen Capitel ist der folgende:

Erster Teil.

Capitel I. Allgemeines.
Capitel II. Schatten von Punkten.
Capitel III. Schatten von Geraden.
Capitel IV. Schatten von Polygonen und Curven.
Capitel V. Schatten der Polyeder.
Capitel VI. Schatten der krummen Flächen im Allgemeinen.
Capitel VII. Schatten der Developpabeln.
Capitel VIII. Schatten der Kugel und des Ellipsoids.
Capitel IX. Schatten der Umdrehungskörper.
Capitel X. Schatten der Schraubenflächen (und Schraubenröhrenflächen).
Capitel XI. Schatten der windschiefen Flächen.

Zweiter Teil. Vom Helldunkel.

Capitel I. Allgemeines.
Capitel II. Tonskala und Anleitung zum Tuschen.
Capitel III. Helldunkel bei Polyedern.

Capitel IV. Abstufung der Töne bei krummen Oberflächen im Allgemeinen.

Capitel V—IX. Isophoten der Developpabeln, der Kugel, der Rotationsflächen, der Schraubenflächen und der windschiefen Flächen.

Capitel X. Glanzpunkte der schwach spiegelnden Flächen.

Das Werk ist hiernach ein sehr vollständiges Handbuch der Beleuchtungslehre. Die Resultate werden fast durchgehend rein geometrisch gewonnen. Der Verfasser glaubt die besten Effecte durch Annahme einer schwach spiegelnden Oberfläche und dementsprechend durch Angabe von Glanzlichtern zu erzielen.

Rg.

J. Vonderlinn. Geometrische Beleuchtungsconstructionen. Vorlagen für den Unterricht im technischen Zeichnen. Erster Teil: die Selbst- und Schlagschattengrenzen an gesetzmässig gestalteten Oberflächen. Mit Tafeln. München. Th. Ackermann.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, rationell ausgeführte Schattenconstructionen in der Gestalt von Vorlegeblättern für den Zeichenunterricht, wie sie zum Gebrauch an technischen Lehranstalten notwendig sind, zu liefern. Das Werk zerfällt in zwei Teile: In dem ersten, bis jetzt erschienenen, sind nur die Schattengrenzen für Polyeder, Cylinder, Kegel, Rotations- und Gesimsflächen in Orthogonalprojection construirt. Als Anwendung der entwickelten Methode wird ein dorisches Capitäl mit Säulenfuss behandelt. In dem zweiten Teile werden die Schattenconstructionen der wichtigen übrigen Flächengattungen, insbesondere die der F_2 sowohl in orthogonaler als in schiefer und centraler Projection gezeigt. Endlich soll in jenem Teile auch die Bestimmung der Stärke der Beleuchtung in den einzelnen Flächenelementen, d. h. die Construction der Linien gleicher Helligkeit, sowie das Wichtigste über die Ausführung der Schattirung mitgeteilt werden.

Die Schrift ist klar und leicht verständlich abgefasst. Sie bietet mehr als der Titel sagt, insofern sie auch die Construction

der betrachteten Körper und deren Durchdringen mit einander auseinandersetzt. Die Tafeln sind mit grosser Sorgfalt ausgeführt. Rg.

W. Fiedler. Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden. Wolf Z. XXVII. 125-175.

Unter elementaren Abbildungs- (Projections-) Methoden sind hier die sich an den natürlichen Sehvorgang anschliessenden verstanden. Zunächst werden die verschiedenartigen Anforderungen besprochen, die an diese Abbildungen zu stellen sind, je nachdem sie mathematischen, technischen oder künstlerischen Zwecken dienen sollen. Die beiden letzteren führten schon bei den Griechen zu einer gewissen, wenn auch mathematisch rohen perspectivischen Raumanschauung. Besondere Wichtigkeit verdient des Weiteren die künstlerische (Hoch- und Flach-) Reliefbildnerei vom Alterthum bis in die neuere Zeit, die unbewusst gewisse mathematische Constructionsregeln involvirt. Hieran knüpft sich die Erörterung der Streitfrage, ob und in wie weit die geometrischen Regeln der Reliefperspective dem Künstler überhaupt nützlich seien (da ja in praxi das Projectionscentrum ein stets bewegliches ist), das zu Gunsten der Geometrie entschieden wird. Dabei wird die weniger bekannte Tatsache erwähnt, dass ein Maler Breysig die Regeln dieser Reliefperspective schon 24 Jahre vor Poncelet (wenn auch in unmathematischer Form) aufgestellt hat, was letzterer erst anerkannte, später aber wieder in Abrede stellte. Der Herr Verfasser macht übrigens darauf aufmerksam, wie man die oft gerügten Mängel dieser Perspective, d. h. ihre unnatürlichen Schlagschatten und den Mangel an eigentümlichen Schatten, durch geeignete Beleuchtung wenigstens theoretisch beseitigen kann.

Es folgen die Ansichten, die sich der Herr Verfasser im Verlauf seiner Lehrthätigkeit über den Vorgang der natürlichen Abbildung der Objecte im Auge gebildet hat, Ansichten, die sich den physiologisch-psychologischen Aufstellungen der neueren Zeit anschliessen. Mathematisch genommen erteilt er der Central-

projection vor den anderen den Vorzug, allgemeiner derjenigen Methode, die sich nur einer Projectionsebene bedient. Nunmehr wendet sich der Herr Verfasser zum Hauptgegenstande, zu der Frage, wie sich von der Centralprojection aus die Abbildung durch reciproke Radien und damit die ganze, von dieser Abbildung ja beherrschte Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme behandeln lasse. Die Antwort lautet „mittelst der Cyklographie", d. h. mittelst der Abbildung der Punkte des Raumes auf die Kreise einer festen Ebene, indem jedem Raumpunkte der Distanzkreis der Orthogonalprojection (des Punktes auf die Ebene) zugeordnet wird. Der Herr Verfasser giebt ein Selbstreferat über sein unter dem Namen der „Cyklographie" neuerdings erschienenes Buch. Da über letzteres in diesem Jahrbuch im folgenden Capitel referirt ist, so möge nur einiges Wenige hier hervorgehoben werden. Einer Geraden im Raume entspricht ein System von Kreisen mit einerlei Centrale und gemeinsamem Aehnlichkeitspunkt; das räumliche Bild aller Kreise der festen Ebene durch einen, resp. zwei Punkte ist ein zur Ebene orthogonal-symmetrischer Kegel, resp. eine solche gleichseitige Hyperbel. Das Bild der Kreise mit demselben Orthogonalkreis ist ein gleichseitiges zur Ebene symmetrisches Rotationshyperboloid etc. Die Durchdringungscurven der hier auftretenden Flächen sind nur Gerade und Kegelschnitte. Letztere treten hier einmal als Orte der Centra von sich nach gewissen, sehr mannigfaltigen Bedingungen bewegenden Kreisen auf, andererseits als Centralprojection des Kreises, was zu ihren projectivischen Eigenschaften führt.

Zu der Methode der reciproken Radien (Inversion) gelangt man hierbei so. Zwei Kreise der festen Ebene bestimmen ein Kreisbüschel, dessen Bild eine gleichseitige Hyperbel ist. Der Durchstosspunkt der Hyperbelaxe und der Centrale des Kreisbüschels liefert durch die entsprechende Hyperbelordinate den einen der beiden Potenzkreise der gegebenen: in Bezug auf den Potenzkreis als Directrix sind dann die beiden gegebenen Kreise Bilder in der Inversion. Durch Drehung der Kreise in der Ebene um ihre Durchmesser gelangt man zur räumlichen Inversion, umgekehrt beim Rückgang auf eine Dimension zur Involution. Als

bezeichnendste Anwendung der Cyklographie dient die vom Herrn Verfasser noch vielfach erweiterte Figur des Feuerbach'schen Kreises.

Als Anhang treten noch zwei Ergänzungen zum Vorigen auf: einmal wird der Dualität in der Cyklographie ihre wichtige Stelle zugewiesen, sodann die Möglichkeit der Ausdehnung der ganzen Betrachtungen auf den Raum von vier Dimensionen mitgeteilt, ein Gebiet, auf dem schon Herr Veronese mit Erfolg vorgeschritten war. My.

G. Hauck. Perspectivische Studien. (Nachtrag zu dem Aufsatze: „Ueber die Grundprincipien der Linearperspective" in Schlömilch Z. XXVI. 273). Schlömilch Z. XXVII. 236-248.

Die vorliegende Arbeit (s. auch F. d. M. XIII. (1881) 457) zerfällt in vier Paragraphen:

I. Die Abbildung von krummflächigen Objecten.

II. Die conform perspectivische Abbildung.

III. De la Gournerie's Restitutionstheorie.

IV. Kritik der Restitutionstheorie.

In den beiden ersten Paragraphen vertritt der Verfasser in Uebereinstimmung mit de la Gournerie (Traité de Perspective linéaire, livre V.: Théorie des effets de perspective) die Ansicht, dass die perspectivische Darstellung krummflächiger Objecte eine besondere Behandlung verlange, indem hier, nicht wie bei Oberflächen mit geraden Kanten das Collineationsprincip, sondern das der Conformität dominire. Den Beweis für die Richtigkeit dieser Ansicht findet der Verfasser in der Uebereinstimmung mit der Kunstpraxis und der Unmöglichkeit der nach den strengen Regeln der Linearperspective erhaltenen Bilder.

Letztere Wissenschaft bleibt aber auch die Erklärung dafür schuldig, dass anerkannt gute Bilder auch von einem falschen, dem Augenpunkte nicht einmal nahe gelegenen Punkte factisch einen guten Eindruck machen. Schon de la Gournerie suchte die Frage zu beantworten, welches räumliche System in diesem

Falle, von allen möglichen, der Beobachter als das beste in seiner Vorstellung restituire. (Siehe insbesondere Capitel I. und II.). Es war ihm bekannt, dass alle räumlichen Systeme, welche unter Voraussetzung eines oder verschiedener Augenpunkte einem und demselben Bilde angehören, unter sich collinear sind, und er gelangte zu dem Resultate, dass von allen diesen Systemen dasjenige restituirt werde, in dem horizontale Ebenen ebenfalls horizontalen Ebenen des Originals zukämen. Die ausführliche Darlegung dieser Dinge bildet den Inhalt des dritten Paragraphen. Der Verfasser selbst gelangt jedoch im vierten zu einem wesentlich andern Ergebnis. Herr Wiener hatte in einer Privatcorrespondenz mit dem Herrn Verfasser darauf aufmerksam gemacht, dass für eine Stellung des Auges unterhalb der Abbildung des hintern Randes der begrenzten Bodenfläche die Restitution der Bodenfläche durch das Unendliche hindurch gehen und hinter dem Rücken des Beobachters endigen würde, vorausgesetzt, dass de la Gournerie's Ansicht die richtige sei, was allerdings evident ist. Herr Wiener nimmt daher an, dass die vom Auge ausgeführte Restitution ein dem Original affines System sei, und zwar dasjenige, dessen Affinitätsrichtung die Verbindungslinie des falschen Standpunktes mit dem richtigen sei. Obgleich der Verfasser anerkennt, dass hierdurch viel gebessert sei, kann er sich zu dieser Annahme doch nicht bequemen, da Neigungswinkel von 30—45 Grad für ursprünglich horizontale Ebenen, bei der in unseren Zimmern üblichen Aufhängung der Bilder, nichts Seltenes sein würde. Seine Ansicht geht nun dahin, dass sehr wohl auch vom excentrischen Standpunkte das wirkliche Object restituirt werden könne, indem die Restitution entgegen der de la Gournerie'schen Annahme nicht durch Vermittelung einer sinnlichen Illusion vor sich geht, sondern vielmehr durch eine Handlung des Verstandes die Bilder in unserer Vorstellung sich so verkörpern, wie wir erfahrungsgemäss die Gegenstände in der Wirklichkeit anzutreffen gewohnt sind.

Rg.

C. Reuschle. Die Deckelemente. Stuttgart. Metzler.

In Orthogonalprojection fallen für einen Deckpunkt und eine Deckgerade die Projectionen, für eine Deckebene die Spuren zusammen. Eine Gerade, deren Spuren vereinigt liegen, nennt der Verfasser symptotische Gerade. Deckpunkte und Deckgerade liegen hiernach in der Halbirungsebene des zweiten (oder vierten) Quadranten, der „zweiten Medianebene“, Deckebenen und symptotische Gerade stehen senkrecht zu jener Ebene. Der Verfasser führt des Weiteren aus, wie in gewisser Weise das Reciprocitätsprincip in der Orthogonalprojection zur Geltung komme, indem die räumliche Reciprocität der Gebilde sich wiederspiegele in einer ebenen Reciprocität der Spuren und Projectionen bei der Ebene und dem Punkte, und ferner bei der Geraden und der Geraden als sich selbst dualistisch gegenüberstehender Gebilde. Referent hat in einer in Schlömilch Z. (Bd. XXXVIII. p. 137) erschienenen Recension, auf die hier verwiesen werden möge, einige Bedenken gegen die Begründung dieser Beziehungen geäussert. Die Schrift bietet viel Interessantes namentlich in der Benutzung der Deckelemente in der Centralprojection, so dass sie von jedem der darstellenden Geometrie Nahestehenden Beachtung verdient.

Rg.

W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen. III. Das Problem der Kegelquerschnitte in allgemeiner Form, nebst Bemerkungen zum Problem des Apollonius. Wolf Z. XXIV. 190-204. 1879.

W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen. IV. Neue elementare Projectionsmethoden. Wolf Z. XXIV. 205-226. 1879.

W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen. V. Ein neuer Weg zur Theorie der Kegelschnitte. Wolf Z. XXV. 217-256.

W. Fiedler. Zusätzliche Bemerkungen zu „Geometrische Mitteilungen. V.“ Wolf Z. XXV. 403-409.

W. Fiedler. Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln. Wolf Z. XXVI. 1-4.

Die Mitteilungen III. und IV., auf die wir in Ergänzung der Referate F. d. M. XI. (1879) 438 u. 386 nochmals zurückkommen, hängen durch eine neue Art der Behandlung des Apollonischen Problems zusammen, die auf der Durchdringung von Kegeln zweiten Grades beruht. Zunächst wird in III. in Centralprojection die Construction eines ebenen Querschnitts einer Kegelfläche entwickelt, die durch ihren Scheitel und eine ebene Leitcurve gegeben ist. Diese Construction liefert mittelst der beiden Systeme der convergenten und der parallelen Gegenaxen direct nicht blos die Bilder der unendlichen Aeste, sondern auch die unendlichen Aeste des Bildes. Obschon dieses Problem elementar ist, so dürfte doch die Behandlung desselben in so vollständiger Weise neu sein und dabei an Einfachheit Nichts zu wünschen übrig lassen. Die in ganz analoger Weise mögliche Unterscheidung und Bestimmung der Bilder der unendlichen Aeste oder der unendlichen Aeste des Bildes auch für die Durchdringungscurve von zwei Kegelflächen führt den Verfasser dann durch Specialisirung, indem namentlich die Durchdringungscurve zweier Kegel als in einen unendlich fernen und einen endlichen Kegelschnitt zerfallend angesehen wird, zu der Gergonne'schen Lösung des erweiterten Apollonischen Problems, welches in folgender Form auftritt: Gegeben sind drei parallele Kegel zweiten Grades; gesucht wird die Bestimmung eines vierten Kegels zweiten Grades, der jeden der drei Kegel längs einer Erzeugenden berührt, und dessen Spurkegelschnitt zu den Spurkegelschnitten der drei Kegel ähnlich und ähnlich gelegen ist.

In Mitteilung IV. wird gezeigt, in wiefern in der Centralprojection die Raumelemente durch das feste Centrum und durch zwei feste Ebenen, die Bildebene und die unendlich ferne Ebene, bestimmt werden. Hiervon ausgehend, gelangt Herr Fiedler dadurch zu einer neuen Projection, für welche er das Epitheton „elementar“ rechtfertigt, dass er an Stelle der bei der gewöhn-

lichen Centralprojection benutzten unendlich fernen Ebene irgend eine andere Ebene setzt, die die Bildebene in einer gegebenen Geraden und unter einem gegebenen Winkel schneidet. Beispielsweise wird bei dieser Projection das Bild einer Geraden g auf folgende Weise bestimmt. Die Gerade g schneide die Bildebene in S, die zweite Ebene in U. Das Bild von U in der Bildebene, d. h. der Punkt, wo die Bildebene von der Verbindungslinie von U mit dem Projectionscentrum C geschnitten wird, heisse U'. Dann ist SU' das Bild von g. Diese allgemeine Centralprojection ist einerseits durch ihre projective Allgemeinheit von Wichtigheit, andererseits auch durch die neuen Formen einer daraus entspringenden Orthogonalprojection. Von diesem neuen Standpunkte aus werden dann die Elemente der darstellenden Geometrie mit Heranziehung geeigneter Beispiele entwickelt. Weiterhin wird darauf aufmerksam gemacht, wie man jedem beliebigen Punkte des Raumes einen Kreis der Bildebene dadurch zuordnen kann, dass man von dem Punkte auf die Bildebene das Lot fällt und um den Fusspunkt desselben mit der Länge dieses Lotes den Kreis beschreibt. Diese Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise der Bildebene führt sofort zu einer grossen Reihe interessanter Anwendungen auf Kreisbüschel und Kreisnetze, und namentlich auch zu der in der Mitteilung III. durchgeführten Fassung des Apollonischen Problems als einer Kegeldurchdringung. Durch diese Momente können die Mitteilungen III. und IV. als Vorläufer von des Verfassers grösserem, „Cyklographie“ betitelten, Werke, (vgl. das betreffende Referat in Abschn. VIII. Cap. 5. A.) angesehen werden. Am Schluss der Mitteilung IV. weist Herr Fiedler auf die erste grosse Gruppe der Steiner'schen Arbeiten hin, da er damals noch glaubte, dass Steiner 1825 durch die eben erläuterte Abbildungsmethode zu seinen zahlreichen Resultaten über die Geometrie der Kreise und Kugeln gelangt sein müsse, und dass diese Entwickelungen in seinen gesammelten Werken an das Licht treten würden. Als Herr Fiedler aber bemerkte, dass dies nicht der Fall sei, zögerte er nicht länger, an eine umfassende Durchführung seines Gedankens zu gehen (vgl. Referat zur „Cyklographie“), um endlich dem mathemati-

schen Publikum die Methoden ausführlich darzulegen, deren Spuren man schon seit seiner 1860 erschienenen Dissertation in allen seinen darstellend-geometrischen und projectiv-geometrischen Publicationen verfolgen kann, und um zugleich die Fruchtbarkeit dieser Methoden für alle Kreis- und Kugelaufgaben zu zeigen. Zunächst setzte er jedoch in zwei kleineren Abhandlungen, nämlich der dritten und vierten von den fünf oben dem Titel nach zusammengestellten Mitteilungen, theoretisch und durch Beispiele erschöpfend auseinander, wie die geometrische Theorie der Kegelschnitte und überhaupt die Grundlage der projectiven Geometrie auf das Natürlichste aus seiner Centralprojection hervorgehe.

Eine weitere Notiz, betitelt „Vom Schneiden der Kreise u.s.w.", zeigt, wie die in den Mitteilungen III. bis V. entwickelte Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise einer Ebene eine einfache und consequente Anschauungsform für das System der Kreise giebt, die einen gegebenen Kreis unter vorgeschriebenem Winkel schneiden, und wie sich aus derselben Lineal- und Zirkelconstructionen zur Lösung aller Winkelschnittprobleme leicht ableiten lassen. Scht.

W. Fiedler. Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln, und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme. Leipzig. Teubner.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. A.

E. Lebon. Solution de la question de géométrie descriptive proposée au concours d'agrégation de l'enseignement special en 1880. Nouv. Ann. (3) I. 269-274.

Es seien gegeben zwei verticale Ebenen, welche sich unter einem beliebigen Winkel schneiden. Durch einen willkürlichen Punkt ihrer Schnittlinie lege man eine Schaar von Ebenen, welche die beiden ersten in zwei zu einander senkrechten Geraden treffen,

und bestimme die Enveloppe dieser Ebenen. Dieselbe ist ein Kegel zweiter Ordnung. Rg

---

M. Petzold. Constructive Lösung der Aufgabe: Eine Gerade zu bestimmen, die zwei durch ihre rechtwinkligen Projectionen gegebene windschiefe Gerade unter vorgeschriebenen Winkeln schneidet. Schlömilch Z. XXVII. 252-253.

Der Inhalt erscheint genügend durch den Titel charakterisirt. Rg.

Leudesdorf. Solution of a question (5527). Educ. Times XXXVI. 64-65.

Lösung der Aufgabe, die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen, das durch orthogonale Projection eines gegebenen Dreiecks entsteht, oder das ein gegebenes Dreieck zur orthogonalen Projection hat. Wn.

E. Rouché. Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite. Nouv. Ann. (3) I. 97-99.

M. J. Caron. Sur l'intersection d'une surface de révolution du second ordre. Nouv. Ann. (3) I. 217-219.

E. Lebon. Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second ordre. Nouv. Ann. (3) I. 219-220.

Die erste Arbeit gab Veranlassung zu den beiden anderen. Während Rouché den Satz beweist: „Wenn zwei einschalige Rotations-Hyperboloide H und H_1 ihre Kehlkreise S und S_1 in einer Ebene P haben, so ist die Projection ihres Durchschnitts auf eine zu P parallele Ebene ein Kreis“, zeigen die beiden anderen Autoren, dass dieser Satz für irgend zwei Rotationsflächen zweiter Ordnung mit gemeinschaftlichem Hauptkreise richtig bleibt.

Soll nun der Schnitt einer gegebenen Rotationsfläche mit einer Geraden bestimmt werden, so lege man durch diese eine zweite Rotationsfläche derart, wie sie im Satze verlangt wird, am besten einen Kegel (Lebon). Dann hat man in einer Projection die Schnittpunkte als Schnittpunkte des leicht zu bestimmenden Kreises mit der Projection der Geraden. Rg.

V. Jarolímek. Ueber die Projection der Durchdringungscurve zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung auf die Ebene der beiden Drehungaxen. (Mit 5 lithograph. Figuren). Cas. XI. 179-191. (Böhmisch).

Liegen die Axen O und U zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung P und R in einer Ebene π, so projicirt sich die Durchdringungscurve der Flächen Σ orthogonal auf die Ebene π bekanntlich in einen Kegelschnitt Σ_1, welcher dem Kegelschnittbüschel angehört, das durch die Schnittcurven von π mit P und R gegeben ist. Die Abhandlung enthält nun die Untersuchung des Kegelschnitts Σ_1, insbesondere seine Classification und die Mittelpunkts- und Axen-Constructionen, wobei die Anwendung imaginärer Elemente von Interesse ist. Schneiden sich die Axen O und U, so ist Σ_1 nur dann eine Ellipse, wenn eine von den Flächen ein abgeplattetes Ellipsoid ist, die andere aber entweder ein eiförmiges Ellipsoid oder eine unendliche Rotationsfläche zweiter Ordnung; sonst ist Σ_1 immer eine Hyperbel, welche wohl auch in ein Linienpaar degeneriren kann. Im Falle $P \frown R$ ist die Hyperbel Σ_1 gleichseitig; die elliptische Projection Σ_1 kann dagegen nie gleichseitig, d.h. kreisförmig werden. Zwei gleichartige Drehungs-Ellipsoide geben jedesmal eine hyperbolische Projection Σ_1. Σ_1 ist eine Parabel, wenn die Drehungsaxen O und U parallel sind; die Axe derselben ist senkrecht zu O. Der Kegelschnitt Σ_1 ist im Allgemeinen auch dann reell, wenn die ganze Durchdringungscurve Σ der Flächen imaginär ist; nur die elliptische Projection Σ_1 kann auch imaginär werden. Std.

LAGUIÈRE. Constructions géométriques de la taugente et du rayon de courbure des sections planes du tore. Nouv. Ann. (3) I. 561-566.

Die Ringfläche wird als Enveloppe von Kugeln constanten Halbmessers gedacht, deren Mittelpunkte auf einem Kreise liegen. Da die Kugeln sich bei der Parallelprojection immer als Kreise abbilden, führt die obige Annahme zu Constructionen der gewünschten Elemente ohne Einführung von Hülfsebenen, welche zur Ringebene eine specielle Lage haben. Rg.

J. TESAŘ. Kinematische Bestimmung der Contour einer windschiefen Schraubenfläche. Wien. Ber. LXXXVI. 377-388.

Es handelt sich um die Bestimmung der Contour einer Orthogonalprojection der bezeichneten Fläche auf eine Ebene, welche der Schraubenaxe parallel ist. Der Verfasser bestimmt das Momentancentrum C für eine Lage ab der Flächenerzeugenden; dann ist der Fusspunkt K der von C auf ab gefällten Senkrechten der gesuchte Berührungspunkt. Sowohl die Curve (K) als der Ort der Momentancentra (C) werden analytisch untersucht. Letztere Curve besitzt unendlich viele parallele Asymptoten senkrecht zur Schraubenaxe, deren Abstand von einander gleich der halben Schraubenhöhe ist.

Schliesslich wird darauf aufmerksam gemacht, dass sich mit Hülfe eines gefundenen Punktes K die Tangenten für alle auf der Fläche liegenden Schraubenlinien in den Punkten der zu K gehörigen Erzeugenden ohne Weiteres angeben lassen.

Rg.

O. MÖLLINGER. Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojectionen mit besonderer Berücksichtigung der stereographischen, Bonne'schen und Merkatorprojection. Für höhere Lehranstalten sowie zum Selbstunterrichte. Mit 50 in den Text gedruckten Figuren. Zürich. C. Schmidt.

Mit dem vorliegenden Lehrbuche beabsichtigt der Verfasser allen denjenigen, welche sich für das Kartenwesen interessiren, besonders den Schülern höherer Lehranstalten und solchen, welche sich mit dem Entwerfen neuer Karten beschäftigen, ein Hülfsmittel zu bieten, durch das sie in den Stand gesetzt werden, sich in möglichst kurzer Zeit mit den wichtigsten Methoden vertraut zu machen, die bei der Construction von Erd- und Himmelskarten zur Anwendung kommen.

Der Inhalt der verschiedenen Abschnitte ist folgender:

I. Die stereographische Projectionslehre.

II. Die cylindrischen Projectionen.

III. Die Kegelprojectionen.

IV. Vergleichung der stereographischen und Bonne'schen Projectionsmethode.

V. Von den äquivalenten Abbildungen.

1) Lambert's normale isocylindrische Projection;
2) Aequivalente Cylinderprojection einer Kugelzone;
3) Albers' äquivalente Kegelprojection;
4) Lambert's äquivalente Kegelprojection;
5) Projection von Bonne;
6) Die äquivalente Projection von Joh. Werner.

VI. Von den conformen oder orthomorphen Abbildungen.

VII. Construction des Netzes der Erd- und Himmelsgloben.

Mit Ausnahme der Mercatorprojection, bei deren Behandlung die höhere Analysis zur Anwendung kommt, sind alle Entwickelungen elementar gehalten. Sehr anzuerkennen ist die Beigabe vieler sorgfältig durchgeführter Beispiele von Kartenprojectionen, welche es auch denjenigen Lesern, die einem eingehenden Studium des Buches nicht die notwendige Zeit zu widmen im Stande sind, ermöglichen, die vorhandenen Methoden und Formeln für ihre speciellen Zwecke zu verwerten. Rg.

F. E. Scheller. Die Theorie der geographischen Netze. Zeitschr. f. d. Realschulw. VII. 20-31, 129-141.

Eine übersichtliche Darstellung der wichtigsten in der karto-

graphischen Praxis vorkommenden Projectionsmethoden. Hervorzuheben ist ein hübscher Beweis für den Fundamentalsatz der Lehre von der stereographischen Abbildung, dass sich zwei Curven in der Copie unter dem nämlichen Winkel durchschneiden, wie im Originale selbst. Gr.

F. Hofmann. Ein elementar-geometrischer Satz als Beitrag zur Theorie des stereographischen Projection. Schlömilch Z. XVII. 383-384.

Durch Betrachtung von vier Punkten A, B, C, D, welche in einer Ebene oder im Raume (aber auf einer Kugel) liegen können, erhält der Verfasser den Satz: „Hält man zwei Punkte A, B auf einem festen Kreise K_3, sowie einen ausserhalb K_3 beliebig gelegenen Punkt C fest, legt dagegen durch einen auf der Peripherie K_3 beweglichen Punkt D die Kreise K_1, welcher D mit B und C, sowie K_2, welcher D mit A und C verbindet, so schliessen diese veränderlichen Kreise K_1, K_2 einen constanten Winkel ein.“ Mit Hülfe dieses Satzes wird in sehr anschaulicher Weise die bekannte Eigenschaft der stereographischen Projection nachgewiesen, dass jedem Kreise auf der Kugel wieder ein Kreis im Bilde entspricht. Rg.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

L. Cremona. Elemente der projectivischen Geometrie. Deutsch von Trautvetter. Stuttgart. Cotta.

Dieses Werk ist bis auf einige von dem Verfasser selbst gewünschte Aenderungen eine Uebersetzung des italienischen Originals. Es soll dazu dienen, Anfänger auf einem anregenden und raschen Wege in die projective Geometrie einzuführen, und

ist in erster Linie für Studirende an technischen Hochschulen bestimmt, wo die graphischen Methoden der Berechnungen immer grössere Wichtigkeit erlangen. Der Leser wird nun sogleich in die perspectiven Beziehungen, die Collineation und Reciprocität eingeführt, und dann erst geht der Verfasser auf die harmonischen Gebilde ein, welche mit Hülfe des vollständigen Vierecks definirt werden. Die Sätze über das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes werden dann aufgestellt und hierdurch wird die Grundlage gewonnen, die allgemeine Projectivität von Grundgebilden der ersten Stufe zu definiren. Dieser Gang der Entwickelung ist vorzüglich geeignet, dem Studirenden sogleich die Schönheit und Fruchtbarkeit der synthetischen Geometrie vor Augen zu führen, ohne ihn erst durch lange einleitende Betrachtungen und Definitionen zu ermüden. Nachdem die besonderen Fälle der projectiven Beziehungen, wie Aehnlichkeit und Involution, besprochen worden sind, werden die projectiven Gebilde am Kreise studirt und dieselben nach dem Vorgange Steiner's durch Collineation auf die Kegelschnitte übertragen. Von besonderem Werte sind die vielen Constructionsaufgaben und die historischen Notizen. W. St.

M. Pasch. Vorlesungen über neuere Geometrie.
Leipzig. Teubner.

Nachdem F. Klein bewiesen hat, dass die projective Geometrie unabhängig ist von dem Parallelentheorem und die Einführung der Coordinaten in die Geometrie keine Massbestimmungen erheischt, hat eine systematische auf der unmittelbaren Anschauung beruhende Entwickelung der projectiven Geometrie in dem nicht-euklidischen Raume bisher nicht stattgefunden. Diese Lücken in der mathematischen Literatur hat der Verfasser mit grossem Erfolge ausgefüllt. Er erblickt in der Geometrie nichts weiter als einen Teil der Naturwissenschaft, und geht von beobachteten Thatsachen aus. Demgemäss wird eine gerade Linie oder eine Ebene nicht weiter erklärt oder definirt, sondern es werden die Grundeigenschaften dieser Gebilde, wie sie etwa der

Beobachtung entsprechen, in einer Reihe von Grundsätzen ausgesprochen. Mit Hülfe derselben werden dann auf dem Wege strenger Beweisführung die abgeleiteten Sätze oder Lehrsätze gefunden. Nachdem zunächst von eigentlichen Punkten, Geraden und Ebenen gesprochen wurde, werden Strahlenbüschel, Ebenenbüschel und Strahlenbündel definirt; die Elemente dieser Gebilde sind construirbar, ohne den Träger zu kennen, welcher überhaupt nicht zu existiren braucht. Aus dem letzten Falle ergiebt sich die Definition der uneigentlichen Elemente, welche durch Massbestimmungen unerreichbar sind, aber in der projectiven Anschauung dieselbe Bedeutung haben, wie die eigentlichen Elemente. Die perspective Beziehung, die Reciprocität und die Congruenz von Figuren werden ausführlich erörtert. Letztere führt auf das „absolute Polarsystem", von welchem die Massverhältnisse abhängen. Von besonderem Interesse ist die Herstellung des „Doppelverhältnisses" von vier Elementen eines einfachen Grundgebildes; es wird zur Herleitung der projectiven Coordinaten verwendet. W. St.

J. Wenck. Die synthetische Geometrie der Ebene.
Leipzig-Heidelberg. C. F. Winter.

Das Buch ist für Anfänger bestimmt, welche sich diejenigen Kenntnisse in der neueren oder synthetischen Geometrie aneignen wollen, die sie haben müssen, um die darauf basirenden Vorträge in der höheren Mathematik, der darstellenden Geometrie und graphischen Statik mit Erfolg hören zu können. Diesen Zweck erfüllt das Buch vollkommen. In dem ersten Abschnitt werden sehr ausführlich mit Benutzung der Doppelverhältnisse die grundlegenden Begriffe und Sätze über projective und involutorische Punktreihen und Strahlbüschel entwickelt. Der zweite Abschnitt behandelt das vollständige Viereck und Vierseit, die damit in Zusammenhang stehenden Involutionen, sowie die auf das Product von drei Strecken- oder drei Sinus-Verhältnissen bezüglichen Dreieckstransversalen-Sätze. Der dritte Abschnitt ist den allgemeineren Verwandtschaften der Collineation, der Affini-

tät, der Aehnlichkeit und der Congruenz gewidmet. Eigentümlich ist, dass der Verfasser in den nächsten vier Abschnitten die Errungenschaften der vorhergehenden drei Abschnitte zunächst nur für den Kreis verwertet. Es werden also hier die harmonischen und polaren Eigenschaften des Kreises, die aus projectiven Punktreihen oder Strahlbüscheln resultirenden Constructionen des Kreises, die Sätze von Pascal und Brianchon, dann auch die Theorie der Chordalen und Aehnlichkeitspunkte und endlich die Eigenschaften der dem Kreise collinear verwandten Figuren entwickelt. Erst der letzte Abschnitt enthält die wichtigsten Eigenschaften des allgemeinen Kegelschnitts, und zwar wird der Kegelschnitt zuerst als collinear verwandte Figur des Kreises und erst in zweiter Linie als Erzeugnis projectiver Punktreihen und Strahlbüschel aufgefasst. Scht.

G. A. V. Peschka. Darstellende und projective Geometrie. Mit einem Atlas. Wien. C. Gerold's Sohn.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 4. p. 481.

W. Fiedler. Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln, und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme. Leipzig. Teubner.

Der alte Gedanke des Herrn Verfassers (vgl. das Referat zu den geometrischen Mitteilungen III. u. IV. p. 489 ff. dieses Bandes), dass alle Kreissätze und Kreisaufgaben, welche die Bedingungen des Berührens oder des Schneidens unter gegebenem oder constantem Winkel mit gegebenen Geraden oder Kreisen enthalten, sich naturgemäss aus gewissen Grundanschauungen der darstellenden Geometrie entwickeln lassen, und dass bei dieser Entwickelung nur elementare Hülfsmittel angewandt zu werden brauchen, ist in dem vorliegenden Buche klar und eingehend durchgeführt. Das Buch eignet sich daher einerseits für den Lernenden, indem es ihn auf bequemem, aussichtsreichem Pfade zu den reichen Schätzen führt,

die uns Steiner, ohne uns den Weg zu ihnen zu verraten, hinterlassen hat, andererseits auch für den geschulten geometrischen Theoretiker, indem es ihm eine einheitliche, innerlich consequente Methode zeigt, welche ihm die Resultate von Steiner über Kreiseigenschaften und Kreisaufgaben in neuem Lichte erscheinen lässt, und ihm zugleich die Ueberzeugung erweckt, dass man mit denselben Forschungsmitteln auch zu vielen verwandten Resultaten muss gelangen können.

Die Methode des Verfassers beruht im Wesentlichen darauf, dass er jedem Punkte A des Raumes denjenigen Kreis in einer Ebene (der Bildebene) zuordnet, dessen Centrum der Fusspunkt des von dem Punkte A auf die Bildebene gefällten Lotes ist, und dessen Radius gleich der Länge dieses Lotes ist. Dadurch werden umgekehrt jedem Kreise der Bildebene freilich nicht ein Punkt des Raumes, sondern zwei zu dieser Bildebene orthogonalsymmetrisch liegende Punkte des Raumes zugeordnet, die man an der Peripherie des Kreises durch Angabe des Drehungssinnes unterscheiden könnte. So entsprechen den Punkten einer Geraden des Raumes die sämmtlichen ∞^1 Kreise der Ebene, von denen je zwei den Schnittpunkt der Geraden mit der Bildebene zum äussern oder innern Aehnlichkeitspunkte haben (lineare Kreisreihe), ferner den ∞^2 Punkten einer Ebene ∞^2 Kreise, von denen je zwei ihren äussern oder innern Aehnlichkeitspunkt auf der Schnittgeraden jener Ebene mit der Bildebene besitzen (planares Kreissystem); und man erkennt sofort, dass vermöge dieser Abbildung der Satz, dass durch drei Punkte im Raume eine Ebene gelegt werden kann, zu den beiden Sätzen führt, welche aussprechen, dass von den sechs Aehnlichkeitspunkten dreier Kreise die drei äussern, sowie immer zwei innere und ein äusserer in gerader Linie liegen; und zwar erhält man den ersten dieser beiden Sätze aus dem Fall, dass die drei Raumpunkte auf derselben Seite der Bildebene liegen, den zweiten Satz aus dem Fall, dass von den drei Raumpunkten nicht alle drei auf derselben Seite der Bildebene liegen. Ferner erkennt man sofort, dass die Gerade, in welcher die ein planares Kreissystem erzeugende Ebene die Bildebene trifft, von allen ∞^2 Kreisen dieses Systems unter demselben Winkel geschnitten wird,

der reell oder imaginär ist, je nachdem der Neigungswinkel jener Ebene gegen die Bildebene grösser oder kleiner als 45 Grad ist; beträgt dieser Winkel 45 Grad, so wird jene Gerade von allen Kreisen des Systems berührt. Umgekehrt füllen die Raumpunkte, welche die sämmtlichen, eine gegebene Gerade unter gegebenem Winkel ν schneidenden Kreise liefern, die beiden Ebenen aus, welche die Bildebene in der gegebenen Geraden unter einem solchen Winkel α schneiden, dass $\operatorname{cotg} \alpha = \cos \nu$ ist. Hiernach erscheinen also z. B. die Kreise, welche drei gegebene Gerade unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, als die Bilder der Schnittpunkte dreier Ebenenpaare. Fügen wir noch hinzu, dass die Raumpunkte, welche den Kreisen entsprechen, die einen gegebenen Kreis unter gegebenem Winkel schneiden, ein gleichseitiges Rotationshyperboloid bilden, dessen Hauptebene der Bildebene parallel ist, so dürfte das Vorstehende genügen, um dem Leser dieses Referats eine Vorstellung von dem Zusammenhang zu geben, der zwischen der Fiedler'schen Abbildung der Raumpunkte durch die Kreise einer Ebene und den auf Berührung und Winkelschnitt bezüglichen Kreisaufgaben besteht. Doch dürfte es die Grenzen eines Referats übersteigen, wenn hier hinzugefügt werden sollte, auf welche Weise dieser Zusammenhang in dem vorliegenden Buche auch planimetrisch-constructiv ausgebeutet ist. Dagegen dürfte hier eine kurzgefasste Inhaltsangabe der in den einzelnen Abschnitten des Buches behandelten Theorieen und Aufgaben am Platze sein.

Die Einleitung entwickelt die Elemente der Methode der Centralprojection vom Standpunkte der darstellenden Geometrie aus, um diese Methode dann, soweit es nötig ist, zur construirenden Verwertung des dem Buche zu Grunde liegenden Gedankens anwenden zu können. Dieser Gedanke ist also der, dass, grade so wie der Distanzkreis in der Centralprojection der Bildkreis des Projectionscentrums ist, jeder Kreis in der Zeichnungsebene Bildkreis eines Punktes im Raume ist. In dieser Einleitung ergeben sich auch die einfachsten Sätze über Doppelverhältnisse, harmonische Gruppen, centrische Collineation, Involution und Symmetrie.

Der erste Abschnitt definirt die Bildkreise der Raumpunkte und die Bildkreis-Systeme der Curven und Flächen. Bei der Betrachtung der linearen Kreisreihe (siehe oben) ergeben sich die auf Aehnlichkeitsstrahlen, Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen bezüglichen Sätze, sowie auch der Gedanke der Constructionen mit Hülfe eines festen Kreises und des Lineals allein. Nach der Einführung des planaren Kreissystems (siehe oben), das zugleich alle Kreise darstellt, die eine gegebene Gerade unter vorgeschriebenem Winkel schneiden, behandelt der Verfasser mehrere Kreisaufgaben, welche aus der Beziehung zweier windschiefer Geraden zu den Punkten und Ebenen des Raumes hervorgehen. Das aus den Transversalen zu drei windschiefen Geraden bestehende Hyperboloid führt dann zu den Kegelschnitten, welche auch als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen in projectiven Büscheln erkannt werden. Den Schluss dieses Abschnitts bilden die auf das planare Kreissystem bezüglichen Elementaraufgaben, namentlich also die schon oben angedeutete Aufgabe, die Kreise zu finden, welche drei Gerade unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden.

Den Ausgangspunkt des zweiten Abschnitts bildet die Betrachtung der Gesammtheit der zwei gegebene Punkte enthaltenden Kreise, welche als die Bildkreise der Punkte einer gleichseitigen Hyperbel auftreten. Weiterhin ergiebt sich die Theorie der Potenzlinien, Potenzpunkte und Potenzkreise, ferner die Abbildung durch reciproke Radien, und in engem Zusammenhang damit die centrische Collineation, beide für Ebene und Raum.

Der dritte Abschnitt zeigt, dass die Raumpunkte, deren Bildkreise zwei gegebene Kreise unter beliebigem, aber gleichem Winkel schneiden, wiederum ein gleichseitiges Hyperboloid bilden, dass diese Kreise sämmtlich zum äussern oder innern Potenzkreise der gegebenen Kreise orthogonal sind, und dass alle Kreise, welche drei Kreise gleichwinklig schneiden, vier Büschel bilden, welche die Aehnlichkeitsaxen zu Potenzlinien haben. So gelangt der Verfasser zu der Bestimmung aller acht Kreise, welche vier gegebene Kreise gleichwinklig schneiden. Der Fall, dass die vier gegebenen Kreise speciell die vier Berührungskreise eines Dreiseits

sind, führt zu den Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises. An die Construction der zu vier Kreisen gleichwinkligen Kreise schliesst sich die Lösung der allgemeinen Aufgabe, zu drei gegebenen Paaren von Kreisen diejenigen zu bestimmen, welche die beiden Kreise jedes Paares gleichwinklig schneiden. Dieser dritte Abschnitt enthält ferner die Anwendung der centrischen Collineation und der Transformation durch reciproke Radien auf Systeme von Kugeln, wobei sich die Aehnlichkeits- und Potenz-Eigenschaften von Kugeln, sowie die Bestimmung der Kugeln, die andere gleichwinklig schneiden, leicht ergeben. Nach einem Ueberblick über die nunmehr ausführbaren Kreis- und Kugelaufgaben behandelt der Verfasser nach seiner Methode ausführlich das Apollonische Problem für Kreise und Kugeln, und man erkennt, dass die bekannte symmetrische Lösung dem Geiste dieser Methode nicht fern steht. Schliesslich ergiebt sich dann auch die Construction der Kreise, welche drei gegebene Kreise unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, ganz analog der Construction der acht Apollonischen Kreise.

Der vierte Abschnitt entwickelt die Theorie der Kegelschnitte und der Rotationsflächen zweiten Grades im Zusammenhange mit der der Kreis- und Kugelsysteme. Hier finden wir erst die Lösung der Aufgabe, die Kugeln zu bestimmen, welche vier gegebene Kugeln gleichwinklig schneiden. Auch das System der einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise tritt in diesem Abschnitt auf.

Das Schlusscapitel ist der Geometrie der Kreise auf der Kugel gewidmet. Um zu zeigen, wie die Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte sich auf die Kreise einer Kugeloberfläche übertragen lassen, behandelt der Verfasser ganz ausführlich die sphärische Uebertragung der Figur des Feuerbach'schen Satzes und der sich daran anschliessenden Sätze.

Die in dem besprochenen Buche niedergelegte Methode und ihre hauptsächlichsten Ergebnisse waren seit sehr langer Zeit in des Verfassers Besitz. Schon in seiner Dissertation (1860) war durch die Einführung des Distanzkreises und der Transformation des Centrums in die Centralprojection der Grundgedanke des

Buches und die Behandlungsform desselben gegeben. Der Grund, warum der Verfasser nicht früher mit einer solchen Durchführung seines Gedankens hervortrat, war der, dass er bis zum Erscheinen des ersten Bandes der Ausgabe von Steiner's Werken durch die Berliner Akademie annahm, es sei, ebenso wie zahlreiche Ergebnisse seiner Methode, auch die Methode selbst Steiner bekannt gewesen. Erst, als durch das Erscheinen des ersten Bandes von Steiner's Werken und durch directe Mitteilungen der Herren Geiser, Schläfli und Weierstrass (Kiepert) constatirt war, dass im Nachlasse Steiner's keine Spuren dieser Methode zu finden waren, ging Herr Fiedler an die Bearbeitung dieses Buches. Ausführlich wird in der Vorrede desselben motivirt, wie der Verfasser notgedrungen zu der Ansicht gelangen musste, Steiner, der die Form der Centralprojection in den Untersuchungen über Kreise und Kugeln fortwährend angewandt hat, Steiner, der ein nun verschwundenes Buch über das Schneiden der Kreise in der Ebene, der Kugeln im Raume und der Kreise auf der Kugel verfasst hat, Steiner, dessen Resultate auf diesem Gebiet sich sämmtlich naturgemäss aus der Fiedler'schen Methode ergeben, müsse auch diese Methode besessen haben. Und wenn die Geometrie der Kreise und Kugeln von Steiner's bahnbrechender Untersuchung an bis jetzt mit allen Mitteln der synthetischen und analytischen Geometrie weiter untersucht wurde, der darstellenden Geometrie bis jetzt aber nur die schliessliche Durchführung der durch andere Methoden begründeten Constructionen zufiel, so hat das Fiedler'sche Buch nunmehr auch der darstellenden Geometrie ihren natürlichen Platz unter den Forschungsmethoden in der Geometrie der Kreise und Kugeln erobert, indem dasselbe zeigt, dass sie zu allen bisher erlangten Hauptresultaten führt und noch manches Neue hinzuzufügen vermag. Ferner sei hier hervorgehoben, dass die Fiedler'sche Methode in ihrer Verbindung der elementaren Anschauungen vom Kreise und der gleichseitigen Hyperbel die natürliche Parallele zu der in der neueren Analysis mehr hervortretenden Gleichbedeutung der cyklischen und hyperbolischen Functionen zeigt.

Was die Form der Darstellung in dem Buche anbetrifft, so

ist dieselbe durchaus elementar gehalten. Deshalb ist auch auf andere, so zu sagen nicht-perspective Abbildungsrelationen zwischen den Kreisen der Ebene und den Punkten des Raumes, wie solche in letzter Zeit mehrfach verwandt sind, nicht eingegangen. Ebenso sind die Literatur-Angaben nur in der Einleitung gemacht. Das Verständnis wird überall durch genaue Figuren unterstützt. Vorausgesetzt ist nicht mehr als die Elemente der Geometrie einschliesslich der Lehre von Pol und Polare beim Kreise. Es liegt in der Natur der Methode, dass alle resultirenden Constructionen, auch die über Kegelschnitte, nur auf das Lineal- und Cirkelpostulat basirt sind. Scht.

W. Fiedler. Zu den Elementen der Geometrie der Lage. Wolf Z. XXVI. 4-8.

Der Verfasser behandelt zwei in systematischer Beziehung wichtige Probleme der Geometrie der Lage. Das erste verlangt die Ueberführung der allgemeinen Strahlen- und Ebenen-Involutionen durch Schein- oder Schnittbildung in symmetrische Involutionen, d. h. solche, wo die Doppelelemente reell und rechtwinklig zu einander sind. Das zweite Problem, das namentlich wegen der Theorie der imaginären Elemente, wichtig ist, verlangt die Construction der Involution, welche mit einer gegebenen Vereinigung von zwei projectiven Gebilden erster Stufe die nämlichen Doppelelemente hat. Scht.

G. Battaglini. Sulla memoria del prof R. De Paolis: Sui fondamenti della geometria projettiva. Rom. Acc. L. (3) VI. 11.

W. St.

W. W. Johnson. New notation for anharmonic ratios. Analyst IX. 185.

Um die sechs verschiedenen Werte des anharmonischen Verhältnisses von vier Punkten in symmetrischer Weise auszu-

drücken, wendet der Verfasser folgende symbolische Bezeichnung an:

$$\begin{matrix} P & A \\ B & Q; \end{matrix}$$

und dies Symbol bezeichnet das Doppelverhältnis

$$\frac{AP}{BP} : \frac{AQ}{BQ} = x.$$

Die gleichzeitige Vertauschung zweier Paare von Buchstaben des Symbols ändert den Wert des Doppelverhältnisses nicht: die Vertauschung der Buchstaben einer Diagonale ergiebt den reciproken Wert $\frac{1}{x}$; die Vertauschung der Buchstaben einer Horizontalreihe giebt den complementären Wert $1-x$, während man durch Vertauschung der Buchstaben einer Verticalreihe das conjugirte Verhältnis $\frac{x}{1-x}$ erhält. Eine cyklische Vertauschung endlich von drei Buchstaben bringt, je nach der Richtung, in der man auf dem Kreise fortgeht, die beiden übrigen Werte $\frac{x-1}{x}$ und $\frac{1}{1-x}$ hervor. Jn. (Wn.).

M. Pasch. Bemerkungen über projective Punktreihen. Schlömilch Z. XXVII. 124-125.

Enthält ein Criterium dafür, ob in zwei projectivischen Gebilden erster Stufe auf demselben Träger die Doppelelemente reell oder imaginär sind. Rg.

V. Jeřábek. Construction von conjugirten und senkrechten Strahlen von projectivischen Büscheln. Cas. XI. 216. (Böhmisch).

O. Schlömilch. Zwei projective Sätze. Schlömilch Z. XXVII. 380-381.

A. Sachse. Beweis der vorigen Sätze. Schlömilch Z. XXVII. 381-383.

Wenn man jede der vier Seiten eines Vierseits mit einer in der Ebene desselben beliebig gelegenen Geraden zum Schnitt bringt, den erhaltenen Schnittpunkt immer mit einem und demselben Diagonalpunkte des Vierseits verbindet und den Punkt aufsucht, in welchem diese Verbindungslinie die Gegenseite des Vierseits schneidet, so erhält man auf den vier Seiten des Vierseits vier in gerader Linie liegende Punkte. Lässt man die beliebige Gerade die unendlich ferne Gerade des Raumes sein, so gelangt man zu einem specielleren Satze, den Herr Sachse gefunden und Herrn Schlömilch zur Veröffentlichung mitgeteilt hatte. Letzterer erkannte die Verallgemeinerung und die Uebertragbarkeit in den Raum, und teilte Herrn Sachse den folgenden Satz mit, der in der ersten der vorliegenden Abhandlungen mit seinem Correlat ausgesprochen ist. Wenn man ein ebenes Viereck $ABCD$ von einem beliebigen Punkte des Raumes aus auf eine durch eine Diagonale EF dieses Vierecks gelegte beliebige Ebene projicirt, und die Projectionen der Punkte A, B, C, D entsprechend mit A', B', C', D' bezeichnet, so schneiden sich AC', $A'C$, BD', $B'D$ in einem und demselben Punkte, vorausgesetzt, dass der Schnittpunkt von AC und BD der Diagonale EF im Diagonal-Dreieck gegenüberliegt. Der eben ausgesprochene Satz und sein duales Correlat, sowie der oben zuerst ausgesprochene Satz mit seiner dualen Uebertragung werden in der zweiten der vorliegenden Abhandlungen von Herrn Sachse mit Benutzung der Sätze von Ceva und Menelaos, also metrisch, bewiesen. Ein auf die Sätze der reinen Geometrie der Lage gestützter Beweis wäre wohl passender gewesen. Scht.

Em. Weyr. Ueber cyklische Projectivität. Cas. XI. 191-212, 265-282 (Böhmisch).

Es wird zunächst die cyklische Projectivität mit n-elementigen Gruppen in den Grundgebilden erster Stufe betrachtet, und es werden die Untersuchungen auf Punktbeziehungen auf Kegel-

schnitten ausgedehnt. Unter Anderem wird die Frage beantwortet, wie man zwei projectivische gerade Punktreihen mit der charakteristischen Potenz k^2 auf einanderlegen muss, um eine cyklische Projectivität mit n-elementigen Gruppen zu erhalten. Für die Entfernung der beiden Gegenpunkte ergiebt sich die Gleichung $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$U_p \equiv a^{p-1} + (p-2)a^{p-3}k^2 + f_{p,2}a^{p-5}k^4 + f_{p,4}a^{p-7}k^6 + \cdots = 0,$$

wobei zu gelten hat

$$f_{p,r} = f_{p-1,r} + f_{p-2,r-1}.$$

In Folge dessen ist

$$U_2 = a,$$
$$U_3 = a^2 + k^2,$$
$$U_4 = a^3 + 2ak^2,$$
$$U_5 = a^4 + 3a^2k^2 + k^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Zum Schlusse wird die cyklisch projectivische Lage ebener Systeme behandelt. Std.

H. Schubert. Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems. Pr. Hamburg.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. D.

R. Sturm. Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften. Klein Ann. XIX. 461-487.

Reciproke oder correlative Verwandtschaft zweier Ebenen nennt man bekanntlich diejenige Verwandtschaft, bei welcher jedem Punkte der einen Ebene eine Gerade in der andern Ebene entspricht, und den Punkten einer Geraden der einen Ebene die Strahlen eines Strahlbüschels entsprechen. Quadratische Verwandtschaft zweier Ebenen nennt man ferner, wie ebenso bekannt ist, diejenige Verwandtschaft, bei welcher jedem Punkte der einen Ebene ein Punkt der andern Ebene entspricht, den Punkten einer Geraden aber die Punkte eines Kegelschnitts entsprechen. Beide Verwandtschaften brachte schon Herr Reye

(Schlömilch Z. XI. p. 280, ferner Geometrie der Lage, II. Teil, II. Aufl. 16. Vortrag) dadurch in Zusammenhang, dass er zwischen den auf zwei Ebenen liegenden Punkten und Strahlen nicht eine, sondern zwei reciproke Verwandtschaften bestehen liess, und dann jedem Punkte der einen Ebene den Schnittpunkt seiner beiden Polaren in der andern Ebene zuordnete, d. h. derjenigen beiden Strahlen, welche durch die beiden reciproken Verwandtschaften dem angenommenen Punkte entsprechen. So erhält man nicht etwa eine collineare, sondern eine quadratische Verwandtschaft, da den Punkten einer Geraden der einen Ebene zwei Strahlbüschel entsprechen, welche durch die Schnittpunkte von je zwei demselben Punkte zugehörigen Strahlen einen Kegelschnitt erzeugen. Wenn man ferner sieben Paare entsprechender Punkte in zwei quadratisch-verwandten Ebenen annimmt, und dann jedes Paar als Paar conjugirter Punkte einer correlativen Verwandtschaft auffasst, so erhält man, da eine Correlation zwischen zwei Ebenen von acht Constanten abhängt, z. B. durch acht Paare conjugirter Punkte eindeutig bestimmt ist, ∞^1 solcher Correlationen; und je zwei dieser ∞^1 Correlationen sind im Stande, eben dieselbe quadratische Verwandtschaft in der oben angegebenen Weise hervorzurufen, weil, wie Herr Reye und Herr Hirst bemerkt haben, alle ∞^1 Strahlen, die durch jene ∞^1 Correlationen einem Punkte einer Ebene entsprechen, sich in einem einzigen Punkte schneiden, also ein Punkt existirt, der dem angenommenen Punkte in allen Correlationen conjugirt ist. Es erscheint deshalb der Kegelschnitt, welcher in der erzeugten quadratischen Verwandtschaft einer Geraden entspricht, einerseits als der Ort der ∞^1 Punkte, die in den ∞^1 erzeugenden Correlationen der Geraden entsprechen, andererseits als der Ort der ∞^1 Punkte, die den einzelnen Punkten der Geraden in allen Correlationen conjugirt sind.

Herr Sturm betrachtet nun den Fall, dass die beiden Ebenen, welche Träger von Correlationen sind, identisch seien. Schon Herr Seydewitz und Herr Schröter erkannten für eine einzelne Correlation, welche auf zwei zusammenfallenden Trägern liegt, dass dadurch zwei ausgezeichnete Kegelschnitte K und Γ von der Beschaffenheit bestimmt werden, dass K der Ort der

Punkte ist, die mit ihren beiden Polaren incident sind, dass Γ von allen diesen Polaren eingehüllt wird, und dass K und Γ sich doppelt berühren. Die Berührungspunkte mögen U und V heissen, die dazu gehörigen Tangenten mögen mit u und v, ihr Schnittpunkt mit W, und endlich die Gerade UV mit w bezeichnet werden. Dass nun alle Paare von Punkten, die auf den zusammenfallenden Trägern zweimal einander conjugirt sind, eine quadratische Inversion bilden, deren beide Fundamental-Dreiecke sich in UVW vereinigen, und deren Fundamentalcurve der Kegelschnitt K ist, dass ferner auf jeder Linie, welche zwei doppelt conjugirte Punkte verbindet, eine Involution von solchen doppelt conjugirten Punkten liegt, und endlich, dass alle diese Linien durch W gehen, sind Resultate, welche von Herrn Reye und Herrn Schröter herrühren. Zu diesen Resultaten fügt Herr Sturm noch hinzu, dass diese quadratische Inversion nicht blos aus einer Correlation, sondern aus einem einstufigen Systeme solcher Correlationen besteht, dass dieses System durch W und w als Pol und Polare in doppelter Weise und durch drei Punkte von K als sich selbst conjugirt definirt ist, dass ferner der Kegelschnitt K für alle diese ∞^1 Correlationen derselbe ist, und dass endlich der Kegelschnitt Γ zwar immer K in denselben beiden Punkten berührt, sonst aber veränderlich ist. Weiterhin untersucht Herr Sturm auch, welche Oerter die Kegelschnitte K und Γ, die Punkte U, V, W, die Geraden u, v, w für alle diejenigen ∞^1 Correlationen bilden, die durch sieben Paare conjugirter Punkte bestimmt werden. Es ergiebt sich z. B., dass die Punkte W eine Gerade bilden, die Strahlen w aber einen Kegelschnitt umhüllen. Namentlich werden auch die in dem Systeme vorhandenen ausgearteten Correlationen, sowie die in den Systemen der Kegelschnitte K und Γ liegenden Ausartungen discutirt.

Der quadratischen Verwandtschaft zwischen den Punkten zweier Ebenen steht zur Seite eine ebensolche Verwandtschaft zwischen den auf ihnen liegenden Strahlen. Statt dieser Verwandtschaft untersucht der Verfasser die dual entsprechende Verwandtschaft zwischen den Strahlen zweier Bündel, die wiederum mit einem System von ∞^1 in den Bündeln liegenden Correlationen

in Zusammenhang gebracht wird. Hierbei geht Herr Sturm namentlich auf den Ort der Schnittpunkte conjugirter Strahlen ein. Im Allgemeinen schneiden sich bei zwei Bündeln, zwischen deren Strahlen eine quadratische Verwandtschaft besteht, nur ∞^1 Paare, und ihre Schnittpunkte bilden eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species, durch die alle Flächen zweiten Grades hindurchgehen, welche von den ∞^1 mit der quadratischen Verwandtschaft in Zusammenhang stehenden Correlationen erzeugt werden. Wenn jedoch die quadratische Verwandtschaft derartig ist, dass sieben Strahlen des einen Bündels ihre conjugirten Strahlen schneiden, so thun es alle Strahlen, und die entstandenen ∞^2 Schnittpunkte bilden eine Fläche zweiten Grades. Herr Sturm bezieht dann auch zwei Ebenen collinear aufeinander, und zwar wieder in doppelter Weise. So gelangt er dadurch, dass er erstens einem Punkte der ersten Ebene die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte zuordnet, welche durch die beiden Collineationen dem angenommenen Punkte entsprechen, und dass er zweitens auch einem Strahle der ersten Ebene den Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen in der zweiten Ebene zuordnet, zu zwei verschiedenen quadratischen Punktstrahlverwandtschaften. Es wird dann, falls die beiden Ebenen identisch sind, das Erzeugnis der Punkte untersucht, welche auf ihren entsprechenden Geraden liegen, so wie noch andere Curven, die durch eine solche Verwandtschaft hervorgerufen werden. Speciell wird auch noch das ebene Nullsystem zweiten Grades untersucht, d. h. diejenige Punktstrahlverwandtschaft, bei welcher jeder Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt geht. Hierbei ergiebt sich, dass jedes Nullsystem zweiten Grades auf die von Herrn Ameseder (Wien. Ber. LXXXIII. 385, siehe F. d. M. XIII. (1881) 495) angegebene Weise erzeugbar ist.

Der zweite Teil der Abhandlung behandelt in ähnlicher Weise eingehend zwei in reciproker Beziehung stehende räumliche Systeme, d. h. zwei Systeme, von denen jedes einem beliebigen Punkte eine Ebene, den Punkten einer Geraden die Ebenen eines Ebenenbüschels, den Punkten einer Ebene die Ebenen eines Ebenenbündels zuordnet. Dadurch werden jedem

Punkte sowohl durch die eine, wie durch die andere Collineation, ∞^2 in einer Ebene liegende Punkte conjugirt, also ∞^1 doppelt-conjugirte Punkte, nämlich alle diejenigen, welche auf den Schnittgeraden der beiden Ebenen liegen. Die ∞^3 Geraden, welche so den ∞^3 Punkten des Raumes als die Oerter der ihnen doppelt-conjugirten Punkte zugehören, bilden einen tetraedralen Complex. An die Untersuchung der durch zwei räumliche Correlationen hervorgerufenen Gebilde schliesst sich die Betrachtung der räumlichen cubischen Punktverwandtschaft, welche der Verfasser, genau analóg der Erzeugung der quadratischen Punktverwandtschaft zweier Ebenen durch zwei Correlationen, auf folgende Weise erzeugt. Man beziehe zwei Räume in drei Weisen reciprok auf einander, und ordne jedem Punkte des einen Raumes den Schnittpunkt seiner drei entsprechenden Ebenen im andern Raume zu. Den Punkten einer Geraden entspricht dann eine cubische Raumcurve, den Punkten einer Ebene eine cubische Fläche. Alle so in jedem Raume entstehenden ∞^3 cubischen Flächen haben eine gewisse Raumcurve sechster Ordnung und sechzehnten Ranges gemein, auf welche schon Herr Cremona aufmerksam gemacht, und mit welcher sich auch Herr Schur beschäftigt hat. Die cubische Verwandtschaft ist durch dreizehn Paare entsprechender Punkte, also durch 39 Bedingungen, bestimmt und kann durch je drei von einander unabhängige Correlationen aus dem zweistufigen linearen Systeme von Correlationen, das durch dreizehn Paare conjugirter Punkte definirt wird, erzeugt werden. Weiterhin bezieht der Verfasser einen Raum auf drei andere collinear, ordnet dann jedem Punkte die Verbindungsebene der drei entsprechenden Punkte zu, und gelangt so zu einer cubischen Punkt-Ebenen-Verwandtschaft. Dabei ergiebt sich z. B. eine Fläche vierter Ordnung als Ort der Punkte, welche in die ihnen entsprechenden Ebenen fallen. Schliesslich wendet sich Herr Sturm zu dem Polarsystem zurück und bespricht die schon mehrfach behandelte Bestimmung desselben oder der zugehörigen Fläche zweiten Grades, wenn drei Punkte und die ihnen zugehörigen Polarebenen gegeben sind. Dabei wird namentlich auch die von Herrn Thieme gelehrte Construc-

tion des Polarengebüsches einer Fläche $(n+1)^{ter}$ Ordnung discutirt und für $n=2$ specialisirt. Scht.

S. Kantor. Bemerkung zu Herrn Sturm's Abhandlung: „Ueber die reciproke Verwandtschaft und damit zusammenhängende Verwandtschaften.“ Klein Ann. XX. 297-299.

Herr S. Kantor spricht davon, dass er sich mit den Gegenständen, die Herr Sturm in der im Titel citirten Abhandlung untersucht, schon seit $2\frac{1}{2}$ Jahren beschäftigt habe, dass er in den Zusammenhang zwischen quadratischen Transformationen und Correlationssystemen etwas tiefer eingedrungen sei, dass er dabei auch zu Nullsystemen beliebigen Grades gelangt sei, dass er ausserdem auch Correlationsnetze auf zusammenfallenden Trägern untersucht habe, und dass er die dabei erscheinenden Oerter schon in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene“ erwähnt habe. Der Herr Verfasser fügt hinzu, dass er seine allgemeinen, auf die Systeme linearer Transformationen bezüglichen Untersuchungen in den Denkschriften der Wiener Akademie demnächst veröffentlichen werde. Dies ist inzwischen durch eine grosse, im Juni 1882 vorgelegte Abhandlung geschehen, über welche man auf der folgenden Seite ein Referat findet. Scht.

M. Allé. Beiträge zur Theorie des Doppelverhältnisses und der Raumcollineation. Wien. Ber. LXXXV. 1021-1034.

In seiner Arbeit „Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst“ (Clebsch Ann. IX. 183, siehe F. d. M. VII. (1875) 53) benutzt Herr Klein eine Transformation, bei welcher die Punkte einer Kugel einander projectivisch zugeordnet werden. In vorliegender Arbeit betrachtet der Verfasser zunächst vier Punkte der complexen Ebene und die durch ihr Doppelverhältnis definirten conjugirten Kreisschaaren, und im Anschluss daran die obige Raumcollineation. Rg.

S. Kantor. Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer Transformationen bei Coincidenz gleichartiger Träger und successiver Anwendung der Transformationen. Wien. Anz. 140-141; Wien. Denkschr. XLVI. 83-126.

Die vorliegende reichhaltige Arbeit kann als Fortsetzung einer Reihe früherer Publicationen des Verfassers, namentlich derjenigen „Ueber successive lineare Transformationen" (Wien. Ber. LXXXII. 139, siehe F. d. M. XII. (1880) 623) angesehen werden. Den Ausgangspunkt bildet das Netz von linearen Transformationen mit drei festen Grundpunktepaaren aa', bb', cc' (vgl. die citirte Abhandlung). Von fundamentaler Wichtigkeit erweist sich die Curve sechster Ordnung, deren Punkte, mit den Grundpunkten verbunden, Strahlenpaare einer Projectivität constanter Doppelverhältnisse D liefern. Die allen Werten von D entprechenden Curven bilden ein Büschel, in welchem die Curve $D=-1$, deren Punkten also drei Strahlenpaare in Involution zukommen, doppeltzählend vorkommt.

Insbesondere werden das bezeichnete Netz und die durch dasselbe erzeugten Curven für specielle Lagen der Grundpunkte untersucht. Sodann wendet sich der Verfasser zur Betrachtung des allgemeinsten Netzes linearer Transformationen, sowohl bei verschiedenen als bei coincidenten Trägern.

In der zweiten Abteilung werden die entsprechenden räumlichen Probleme in ziemlich derselben Reihenfolge abgehandelt. Vier Punktepaare aa', bb', cc', dd' bestimmen ein Gebüsch linearer Transformationen. Die Geraden, welche die Tetraeder $abcd$, $a'b'c'd'$ in projectivischen Punktquadrupeln schneiden, bilden einen Complex vierter Ordnung; diejenigen unter ihnen, für welche das Doppelverhältnis überdies constant bleibt, eine Congruenz vierzehnter Ordnung, sechster Klasse. Rg.

H. Schubert. Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformation der Ebene. Hamb. Mitt. I. 31.

Die Methode, nach welcher der Verfasser in seinem Calcül

der abzählenden Geometrie die Anzahlen für zwei collineare Bündel bestimmte, hat ihn auch zu den Anzahlen für die quadratische Transformation der Ebene geführt, d. h. zu derjenigen Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen, bei welcher jedem Punkte der einen Ebene nur ein einziger Punkt der andern Ebene entspricht, den Punkten einer Geraden aber immer die Punkte eines Kegelschnitts entsprechen. Da diese Anzahlen durch die Anzahlen für gewisse speciellere quadratische Transformationen, deren Constantenzahl durch die Specialisirung um eins kleiner geworden ist, auszudrücken sind, so war es vor allem nötig, diese specielleren oder ausgearteten Transformationen nebst ihren Eigenschaften aufzufinden. In der vorliegenden Abhandlung sind nun diese ausgearteten Transformationen, deren Verhalten ja auch andern Mathematikern als Anzahl-Geometern interessant sein dürfte, erzeugt und beschrieben. Es wird genügen, wenn hier kurz angegeben wird, inwiefern jede dieser Ausartungen einerseits specieller wird, als die allgemeine, andererseits aber doch die Definition der allgemeinen quadratischen Transformation erfüllt.

Bekanntlich existiren in jeder der beiden Ebenen E und E', welche Träger einer quadratischen Transformation sind, drei Fundamentalpunkte F_1, F_2, F_3, bezw. F_1', F_2', F_3' von der Eigenschaft, dass durch sie alle Kegelschnitte hindurchgehen, welche Bilder von geraden Linien der anderen Ebene sind. Bei der ersten der vom Verfasser betrachteten Ausartungen liegen nun diese drei Fundamentalpunkte auf jeder der beiden Ebenen E und E' in gerader Linie, und alle Punkte von E und von E' entsprechen sich collinear, indem jeder Geraden in der einen Ebene ein in ein Geradenpaar zerfallender Kegelschnitt entspricht, der aus der collinear zugeordneten Geraden und der die drei Fundamentalpunkte enthaltenden festen Geraden besteht. Da die Collineation durch acht Bedingungen bestimmt ist, und die Feststellung der drei Fundamentalpunkte der einen Ebene fünf Bedingungen erfordert, so ergiebt sich in der That eine Constantenzahl, die um eins kleiner ist, als die Constantenzahl 14 der allgemeinen quadratischen Transformation. Die zweite Ausartung unterscheidet sich von der allgemeinen nur dadurch, dass in jeder

Ebene zwei Fundamentalpunkte unendlich nahe liegen, so dass alle Kegelschnitte, welche dem Strahlenfeld der einen Ebene entsprechen, auf der andern Ebene einander berühren. Bei der dritten Ausartung sind die beiden Fundamentaldreiecke in allgemeiner Lage. Jedoch entspricht allen Punkten eines durch einen bestimmten Fundamentalpunkt F_1 in der einen Ebene gehenden Strahles ein und derselbe Punkt auf der Geraden $F_2'F_3'$, und zwar so, dass den durch F_1 gehenden Strahlen sich die Punkte auf $F_2'F_3'$ projectiv zuordnen. Umgekehrt entspricht einem auf F_2F_3 liegenden Punkte jeder Punkt eines projectiv zugeordneten Strahles durch F_1'. Es entsprechen sich also projectiv einerseits der Strahlbüschel, dessen Scheitel F_1 ist, und die gerade Punktreihe $F_2'F_3'$, andererseits der Strahlbüschel, dessen Scheitel F_1' ist, und die gerade Punktreihe F_2F_3, jedoch so, dass immer incidente Elemente der einen Ebene incidenten Elementen der andern Ebene entsprechen. Dabei ordnen sich den Punkten F_2 und F_3 die Strahlen $F_1'F_3'$ und $F_1'F_2'$ zu, ferner den Strahlen F_1F_2 und F_1F_3 die Punkte F_3' und F_2'. Bei der vierten Ausartung liegen die beiden Fundamentalpunkte F_1 und F_2 in einem Punkt F unendlich nahe, jedoch so, dass ihre Verbindungsgerade f_3 eine ganz bestimmte Lage hat. Der dritte Fundamentalpunkt F_3 hat eine allgemeine Lage zu dem Coincidenzpunkte F und dem Strahle f_3, so dass also der Strahl FF_3 im allgemeinen von f_3 verschieden ist. Die drei Fundamentalpunkte in E' haben eine ganz allgemeine Lage zu einander. Durch F_3' geht ferner ein ausgezeichneter, im Allgemeinen von $F_3'F_1'$ und $F_3'F_2'$ verschiedener Strahl h', dessen Punkte den durch F gelegten Strahlen projectiv entsprechen, und zwar so, dass F_3' dem Strahle f_3 und der Schnittpunkt von h' mit $F_1'F_2'$ dem Strahle FF_3 entspricht. Einem in E beliebig gegebenen Punkte A entspricht in E' derjenige Punkt auf h', welcher dem Verbindungsstrahle FA projectiv entspricht. Einer in E beliebig gegebenen Geraden entspricht in E' immer der aus h' und $F_1'F_2'$ bestehende, zerfallende Kegelschnitt. Einem beliebigen Punkte in E' entspricht in E immer ein und derselbe Punkt F. Um zu einer beliebig in E' gegebenen Geraden das in E liegende Bild zu finden, suche man den Schnittpunkt dieser

Geraden mit h' und bestimme denjenigen Strahl durch F, welcher diesem Schnittpunkte projectiv entspricht. Dann ist der aus dem so bestimmten Strahle und dem constanten Strahle FF_3 bestehende zerfallende Kegelschnitt das gesuchte Bild. Bei der fünften Ausartung liegen die drei Fundamentalpunkte F_1, F_2, F_3 auf einer geraden Linie f; die Fundamentalpunkte F_1', F_2', F_3' dagegen haben in E' die allgemeine Lage. Ausserdem liegt in E' ein ausgezeichneter Punkt Q'. Dem durch Q', F_1', F_2', F_3' bestimmten Kegelschnittbüschel sind die Punkte auf f projectiv zugeordnet, und zwar so, dass den drei in ein Geradenpaar degenerirten Kegelschnitten des Büschels die drei Punkte F_1, F_2, F_3 entsprechen. Einem beliebigen Punkte A in E entspricht in E' der Punkt Q', einem beliebigen Punkt A' in E' entspricht in F derjenige Punkt A auf f, welcher dem durch A', Q', F_1', F_2', F_3' bestimmten Kegelschnitte projectiv zugeordnet ist. Einer beliebigen Geraden in E entspricht der ihrem Schnittpunkte mit f zugeordnete Kegelschnitt, und einer beliebigen Geraden in E' entspricht die doppelt zu rechnende Gerade f. Bei der sechsten Ausartung fallen F_1, F_2, F_3 in einen und denselben Punkt F, jedoch so, dass ihre Verbindungsgeraden drei durch F gehende Strahlen f_1, f_2, f_3 sind. In E' liegt ein ausgezeichneter Kegelschnitt k', dessen Punkte den durch F gehenden Strahlen projectiv zugeordnet sind, und zwar sind F_1', F_2', F_3' die drei den Strahlen f_1, f_2, f_3 zugeordneten Punkte. Einem beliebigen Punkte in E' entspricht in E immer der Punkt F, einem beliebigen Punkte A in E entspricht in E' immer derjenige auf k' liegende Punkt, welcher dem Strahle FA projectiv entspricht. Einer beliebigen Geraden in E entspricht in E' immer der Kegelschnitt k', und einer beliebigen Geraden in E' entspricht in E das Geradenpaar, dessen beide Strahlen den beiden Schnittpunkten von k' mit der gegebenen Geraden entsprechen. Die erste, zweite und dritte Ausartung entsprechen sich selbst, wenn man die gestrichelten Buchstaben mit den nicht-gestrichelten und umgekehrt vertauscht. Dagegen erhält man aus der vierten, fünften und sechsten Ausartung durch dasselbe Verfahren je eine neue Ausartung. Ausserdem liefern die zweite, dritte und vierte Ausartung dadurch noch je zwei neue Ausartungen, dass man die Indices

1, 2, 3 der Fundamentalpunkte vertauscht. So ergeben sich im ganzen siebzehn Ausartungen, welche eine um eins kleinere Constantenzahl haben, als die allgemeine, quadratische Transformation der Ebene. Scht.

P. H. SCHOUTE. Deux cas particuliers de la transformation birationnelle. Darb. Bull. (2) VI. 152-168, 174-188.

In Abschnitt I. ist die Transformation durch symmetrische Gerade bezüglich der Winkelhalbirungslinien eines Dreieckes besprochen, die wegen der drei Involutionen in den Ecken sofort als Conjunction nach einem Vierecke zu erkennen ist. Bemerkenswert findet Referent nur, dass der Verfasser bemüht war, für die niederen Grade die in sich transformirten Curven festzustellen. In Abschnitt II. ist die Transformation durch symmetrische (umgelegte) Kreise bezüglich der Seiten eines Dreiecks durchgeführt. Sie wird als involutorische Transformation fünfter Ordnung erkannt, für welche die Ecken, der Höhenschnitt und die Kreispunkte doppelte Fundamentalpunkte sind. Jene vier entsprechen sich als Fundamentalpunkte selbst, die Kreispunkte wechselseitig. Es werden die allgemeinen Eigenschaften in euklidisches Gewand gekleidet. In Abschnitt III. ist die zweite Transformation auf die erste zurückgeführt mittelst einer Inversion mit dem Höhenschnitt als Pol und dem Fusspunktsdreiecke als transformirtem des ursprünglichen. Das ist nur ein specieller Ausdruck der allgemein von Bertini festgestellten Reductibilität an involutorischen $T_5(1^2 \dots 6^2)$. In Abschnitt IV. führt eine auf I. angewandte genaue Analogie zu einer Transformation durch symmetrische Ebenen bei einem Tetraeder. Die Transformation hat die Ecken desselben zu Fundamentalpunkten und ist vom dritten Grade. Neues findet sich nicht, für 51, 52 cf. des Referenten Note in den C. R. 17. Mai 1880. In Abschnitt V. liefert beim Tetraeder mit sich in E schneidenden Höhen die Anwendung einer Inversion (E als Pol) auf die vorige Transformation ein Analogon zu II. Aber ihr Ausdruck ist sehr complicirt, und sie hat wohl auch kein selbstständiges Interesse, da sie mittelst der Inversion sofort re-

ductibel ist. Beim regulären Tetraeder verdient sie ihrer Einfachheit wegen hervorgehoben zu werden. Sie besteht dann in der Verwandtschaft zwischen einem Punkte O und einem Punkte O', wo die Kugeln $O'ABC$, $O'ABD$, $O'ACD$, $O'BCD$ symmetrisch sind zu den Kugeln $OABC$, $OABD$, $OACD$, $OBCD$ bezüglich der betreffenden Seitenflächen. Lässt man bei einem willkürlichen Tetraeder eine Seitenfläche weg, so ergeben die übrigen (im Trieder) eine Transformation durch symmetrische Kugeln. Es wird bewiesen, dass eine solche bei willkürlichem Tetraeder nicht möglich ist. Die Hülfsmittel der Ausarbeitung sind allgemeine und elementare untermischt. Es wäre wünschenswert gewesen, den complicirteren Dingen bei den in sich transformirten Curven nicht aus dem Wege zu gehen. Als Vortragsbeispiele in der Transformationslehre dürften solche (consequent nach einer Methode) durchgeführten Fälle instructiv sein. Kr.

P. H. Schoute. Over een paar met elkaar samenhangende involutorische birationeele transformatics.
Nieuw Arch. IX. 117-140.

Die Anregung zu dieser Arbeit gab die Abhandlung von van den Berg, welche im siebenten Teile derselben Zeitschrift enthalten ist (siehe F. d. M. XIII. (1881) p. 538). Anstatt der Rechnung wird hier die Theorie der birationalen Transformationen angewendet. Zuerst wird eine symmetrische Gruppe dreier Geraden hinsichtlich eines Dreieckes betrachtet, dann symmetrische Gruppen dreier Kreise beim Dreieck. Nachher gehen beide Gruppen in einander durch die Verwandtschaft der reciproken Radien über, und werden beide Transformationen auch auf den Raum erweitert. An die Stelle der Geraden treten hier die grössten Kreise in einem sphärischen Dreieck und an die Stelle der Kreise Kugelflächen. So werden einige Eigenschaften der Kugel abgeleitet, und allgemeiner die einer Oberfläche zweiten Grades, welche durch die Eckpunkte eines Tetraeders geht.

G.

A. Ramisch. Ueber sich in einem Punkte schneidende coordinirte Linien und über auf einer Geraden liegende coordinirte Punkte. Hoppe Arch. LXIX. 54-90.

Die Untersuchungen sind wesentlich kinematischen Charakters und beziehen sich im ersten Teile der Arbeit auf die Orte der Schnittpunkte zweier bewegter Curven. Im zweiten Teile wird ein Punktpaar betrachtet, welches sich auf zwei Curven in gesetzmässiger Weise bewegt, sowie die Einhüllende ihrer Verbindungslinie gesucht.

Die Construction der Tangenten, bez. der Berührungspunkte geschieht mit Hülfe der in der Ueberschrift angeführten coordinirten Elemente, und zwar wird definirt: Von vier in einer Ebene liegenden, sich in einem Punkte O schneidenden Geraden a, b, c, d nennen wir, wenn a und d die äussern, b und c die innern Schenkel sind, sowohl die ersteren als auch die letzteren dann zu einander coordinirt, wenn der Winkel $ab = cd$ ist. Die vierte coordinirte Linie zu gewissen dreien ist bei der ersten der betrachteten Curven die gesuchte Tangente. Die Definition von coordinirten Punkten auf einer Geraden ist der eben citirten für Strahlen analog. Mit ihrer Hülfe werden Berührungspunkte bestimmt. Rg.

C. Stéphanos. Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes binaires biquadratiques. S M. F. Bull. X. 134-137.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben sich, projectivisch verallgemeinert, aus den Relationen zwischen den Doppelverhältnissen, welche durch einen Kegelschnitt auf einem Dreieck und dem zu ihm conjugirten bestimmt werden. Mit Hülfe des Hesse'schen Uebertragungsprincipes aber verwandelt sich diese Aufgabe in die entsprechende der binären Formentheorie: „Gegeben sind drei quadratische Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2, welche den Seiten des ersten Dreiecks entsprechen, sowie die

zu den Seiten des conjugirten Dreiecks gehörigen drei Jacobi'schen Formen l_x^2, m_x^2, n_x^2 dieses Systems; gesucht werden die sämmtlichen Relationen zwischen den Invarianten dieser beiden Systeme.“ Der Verfasser stellt dieselben auf und zeigt, wie aus denselben die Formeln der sphärischen Trigonometrie entnommen werden können. V.

B. Besondere ebene Gebilde.

A. Milinowski. Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig. Teubner.

Das sehr empfehlenswerte Buch ist namentlich für Mathematik-Lehrer bestimmt, die in der glücklichen Lage sind, die elementaren Methoden zur Auffindung der Kegelschnitt-Eigenschaften und Kegelschnitt-Constructionen mit ihren Schülern durchnehmen zu können. Da in der That einerseits eine elementar-synthetische Geometrie, welche über die Euklidische Geometrie hinausragt, in mancher Beziehung, namentlich aber wegen ihrer das geometrische Anschauungsvermögen stärkenden Kraft, viel didaktische Nahrung enthält, und da andererseits die Universitäts-vorlesungen ebensowohl wie die meisten der vorhandenen, die Theorie der Kegelschnitte synthetisch entwickelnden Werke, wie namentlich Schröter's und Reye's, nur von der projectiven Verwandtschaft ausgehen, so ist das vorliegende Buch jedenfalls sehr existenzberechtigt, und dies um so eher, als die Geiser'sche „Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung“ mancherlei, z. B. die Behandlung der Polareigenschaften, der Kegelschnittbüschel und der Kegelschnittschaaren fast ganz auslässt. Das einzige Buch wohl, welches ebenso wie das vorliegende, die ganze Kegelschnittslehre leicht und anschaulich elementar-synthetisch entwickelt, ist das Buch des Kopenhagener Mathematikers Zeuthen. Doch ist dieses Buch, wenigstens in deutscher Ausgabe, erst nach dem von Milinowski erschienen, und unterscheidet sich

ausserdem von dem letzteren erstens dadurch, dass es andere Ausgangspunkte nimmt, und zweitens auch dadurch, dass es nicht so ausführlich angelegt ist. Das vorliegende Buch von Milinowski ist aber nicht blos existenzberechtigt, sondern durch die klar und sicher fortschreitende Entwickelung der Begriffe, Eigenschaften und Constructionen auch ganz dazu geeignet, der elementar-synthetischen Behandlung der Kegelschnittslehre, die bis jetzt noch ziemlich wenig Sympathieen begegnet, neue Freunde zu gewinnen.

Es fragt sich vor Allem, was der Verfasser hier unter elementar versteht. Es zeigt sich, dass er zu den elementaren Hülfsmitteln ausser der Congruenz und der Aehnlichkeit auch die einfachsten Eigenschaften der harmonischen und involutorischen Beziehungen, nicht aber die der projectiven Beziehung im allgemeinen rechnet. Der Unterschied in den Grundlagen bei der vorliegenden Theorie der Kegelschnitte und bei der etwa in Reye's Geometrie der Lage entwickelten Theorie ist also im wesentlichen der, dass, während Reye aus der harmonischen Beziehung die allgemeine projective Beziehung ableitet, und letztere dann zum Ausgangspunkt aller weiteren Untersuchungen macht, Milinowski die harmonische Beziehung unmittelbar als Quelle benutzt. Demgemäss enthält der erste Abschnitt die Theorie der harmonischen Punkte und Strahlen, die harmonischen und polaren Eigenschaften der Kreise und Kreisbüschel, die Theorie der Involutionen mit Berücksichtigung der imaginären Elemente, namentlich auch der beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte, die Theorie der Aehnlichkeitspunkte, die Eigenschaften der harmonischen Pole, welche dann auf die Verwandtschaft der reciproken Radien, oder, was dasselbe ist, auf die Kreisverwandtschaft führen, endlich die den folgenden Untersuchungen zu Grunde gelegte harmonische Verwandtschaft, d. h. die Verwandtschaft, wo zwei Punkte A und A' sich entsprechen, wenn ihre Verbindungslinie durch einen festen Punkt geht und eine feste Gerade so schneidet, dass der Schnittpunkt und der feste Punkt von A und A' harmonisch getrennt werden. Die im zweiten Abschnitt entwickelte Theorie der Kegelschnitte beginnt

dann mit dem Satze, dass in jeder harmonischen Verwandtschaft einem Kreise, der den festen Punkt zum Centrum hat, ein Kegelschnitt entspricht, dessen einer Brennpunkt dieser feste Punkt ist. Daraus ergeben sich dann leicht einerseits die Theorie der Brennpunkte, andererseits die Theorie der Polaren. Bald aber wird der Kegelschnitt dann auch als harmonisches Bild eines beliebig liegenden Kreises betrachtet. Es folgen hierauf andere Erzeugungen der verschiedenen Arten von Kegelschnitten, namentlich auch die auf der Constanz eines Abstandsverhältnisses beruhende Erzeugung. An diese schliesst sich die Betrachtung der doppelt-berührenden Kreise und der dreipunktig-berührenden Kreise. Der Schluss des zweiten Abschnittes ist den Constructionen der Kegelschnitte gewidmet. Die gegebenen Bedingungen beziehen sich ausser auf Punkte, die getroffen werden sollen, und auf Strahlen, die berührt werden sollen, namentlich auf Axen, Brennpunkte, Leitlinien und Durchmesser.

Im dritten Abschnitte werden die wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnittbüschel (vier gemeinsame Punkte) und Kegelschnittschaaren (vier gemeinsame Tangenten) mit reellen und imaginären Grundelementen untersucht. Hat ein Büschel zwei oder vier imaginäre Grundpunkte, so lässt es sich durch harmonische Verwandtschaften in ein Kreisbüschel verwandeln, und die Eigenschaften des ersteren lassen sich aus denen des letzteren folgen. Aber auch in dem Falle von vier reellen festen Punkten führt die Anwendung der harmonischen Verwandtschaft sofort zu dem Hauptsatze, dass die Kegelschnitte des Büschels jede Gerade in einer Involution schneiden, aus welchem Satze sich dann leicht die Polareigenschaften des Büschels ergeben. Ausführlich entwickelt der Verfasser dann die Eigenschaften von Kegelschnitten, die sich doppelt berühren, wobei wieder auf diejenigen besonders Rücksicht genommen ist, die sich als Verallgemeinerungen von Kreisbeziehungen auffassen lassen. So erscheint z. B. das Tactionsproblem des Apollonius als specieller Fall der Aufgabe, einen Kegelschnitt zu construiren, der einen gegebenen Kegelschnitt K doppelt und drei gegebene Kegelschnitte einfach berührt, von denen jeder K doppelt berührt. Den Schluss des dritten Ab-

schnitts bildet die Theorie des Polarsystems, die nochmals in einfachster Weise zu den Polareigenschaften der Kegelschnittbüschel führt, und zwar auch solcher Büschel, deren Elemente imaginär sind. Erst im vierten Abschnitt giebt der Verfasser den Begriff der Projectivität, und entwickelt daraus kurz einige Kegelschnitteigenschaften, aber nur, um den Leser im die eigentlich projective Geometrie einzuführen und ihn die Bedeutung derselben für die Theorie der Kegelschnitte merken zu lassen. Den Schluss des verdienstvollen Werkes bildet eine Reihe von Sätzen und Aufgaben, welche teils die gegebenen Theorieen erweitern, teils den Uebungsstoff zur Anwendung derselben bieten sollen.

Scht.

B. SCHÖFFLER. Synthetische Theorie der Curven zweiter Ordnung für den Selbstunterricht bearbeitet. Wien. Seidel und Sohn.

Der Verfasser glaubt selbst von seiner Schrift, dass sie den Ansprüchen des strengen Fachmanns nicht genügen werde. Referent muss ihr überhaupt jeglichen Wert absprechen, da die ganze Darstellung des Gegenstandes denkbarst verworren ist. Als Beleg für diese Ansicht greifen wir aus der grossen Anzahl von Ungereimtheiten nur die folgenden heraus.

Nachdem in der Einleitung die Auffassung des Unendlichen im Sinne der synthetischen Geometrie auseinander gesetzt ist, werden die Curven n^{ter} Ordnung als solche definirt, welche von einer Geraden in n Punkten geschnitten werden. Die Ansichten über das Imaginäre setzt der Verfasser bei dem Laien, für den das Buch bestimmt ist, als bekannt voraus,, denn er sagt gleich darauf, dass eine Gerade gegen eine C_2 drei verschiedene Lagen einnehmen könne, je nachdem die Schnittpunkte getrennt, zusammenfallend oder imaginär seien, und knüpft daran die Unterscheidung dieser Curven nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Geraden. Auf Seite 9 ist nun oben zu lesen: „Eine Ellipse ist eine Curve zweiter Ordnung, die keinen unendlich fernen Punkt hat“; unten: „Dass die Ellipse keinen unendlich

fernen Punkt hat, erkennt man aus der blossen Anschauung." Auf derselben Seite wird weiter gesagt, dass sich die Richtigkeit der oben gegebenen Definitionen bei jeder Construction der Curven zweiter Ordnung nachweisen lasse, und zwar solle das durch Beispiele geschehen. Nun wird plötzlich von Leitlinie und Brennpunkt einer Parabel, dann von conjugirten Durchmessern einer Hyperbel gesprochen. Also auch diese Kenntnisse werden bei dem Laien vorausgesetzt. Wenn eine Gerade durch einen Curvenpunkt nur noch einen zweiten Curvenpunkt enthält, so ist nach der Ansicht des Verfassers die Curve von der zweiten Ordnung. Vielfache Punkte giebt es also für ihn nicht.

Rg.

M. N. Vaněček. Ueber die Transversalen in vollständigen Vielecken und Vielseiten. Prag. Ber. 1881. 274-287.

Enthält die analytische Ableitung von Sätzen über die Abschnitte auf Polygonseiten durch Transversalen etc. Ein Teil derselben findet sich, wie der Verfasser angiebt, bereits in Carnot's „Géométrie de position", ist aber auch, wie Referent hinzufügt, längst in Elementarbücher, z. B. in Heis und Eschweiler's Planimetrie, übergegangen. Rg.

B. Alvord. The intersection of circles and the intersection of spheres. Sylv. Am. J. V. 25-45.

Der Verfasser erörtert in ausführlicher Weise die verschiedenen Probleme, welche sich bei der Betrachtung der Winkel, unter welchen Kreise und Kugeln einander schneiden, darbieten. Die meisten dieser Probleme sind schon lange hinreichend bekannt. Hervorzuheben ist die Construction der Kreise, welche vier gegebene unter gleichem Winkel treffen, und die Construction der Kugeln, welche fünf gegebene unter demselben Winkel schneiden. Die Anzahl der Lösungen wird bei diesen Problemen bestimmt. W. St.

F. da Ponte Horta. Algumas propriedades das conicas. Teixeira J. IV. 65-86.

Zwei Seiten eines veränderlichen Dreiecks drehen sich um zwei gegenüberliegende Ecken eines festen Parallelogramms, während die dritte Dreiecksseite derjenigen Diagonale parallel bleibt, welche die beiden andern Ecken des Parallelogramms verbindet. Bewegen sich dabei zwei Ecken des Dreiecks auf zwei anstossenden Seiten des Parallelogramms, so beschreibt die dritte Ecke eine Ellipse; bewegen sich jene zwei Ecken auf gegenüberliegenden Parallelogrammseiten, so beschreibt die dritte Ecke eine Hyperbel. Diese Erzeugungsart der Kegelschnitte hatte Herr Horta bereits in einer früheren, der Akademie von Lissabon vorgelegten Arbeit behandelt. In dem vorliegenden Aufsatze werden einige Folgerungen und Constructionen mitgeteilt. Insbesondere werden die Schnittpunkte der Ellipse mit zwei von benachbarten Ecken des Parallelogramms ausgehenden Geraden bestimmt.

Tx. (Wn.).

A. Schiappa Monteiro. Note sur la génération d'une conique au moyen du cercle ou d'une autre conique. Teixeira J. IV. 95-108.

Dreht sich eine Transversale um einen festen Punkt, so bilden die Radien, welche zwei feste Punkte eines Kegelschnitts mit jenigen Punkten verbinden, in denen die Transversale den Kegelschnitt schneidet, zwei projective Strahlenbüschel; und der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist daher ein anderer Kegelschnitt. Lässt man ferner um jene festen Punkte zwei parallele Sehnen sich drehen, so bilden deren Enden zwei projective Punktreihen, und die Sehnen, welche entsprechende Punkte verbinden, umhüllen einen Kegelschnitt. Die auf diese Art erzeugten Kegelschnitte werden in vorliegender Arbeit eingehend behandelt. Tx. (Wn.).

C. Hossfeld. Construction des Kegelschnitts aus fünf zum Teil imaginären Curvenelementen. Diss. Jena. Neuenhahn

Der Verfasser stellt zehn Aufgaben auf, welche darin übereinstimmen, dass sie alle die Construction eines Kegelschnitts verlangen, der durch a gegebene Punkte geht und $5-a$ gegebene Strahlen berührt, und welche sich dadurch unterscheiden, dass die gegebenen Elemente teils als reell, teils als imaginär betrachtet werden. Die imaginären Elemente werden als Doppelpunkte elliptischer Punkt-Involutionen eingeführt. Die Betrachtungen sind rein lage-geometrisch und sehr ausführlich.

Scht.

O. Dziobek. Neue Beiträge zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks. Berlin. F. Dümmler.

In einer Arbeit „Nuovi teoremi sull' Hexagnammum Mysticum" (Rom., Acc. L. (3) I. 141, s. F. d. M. X. (1878) 390) zeigt Herr G. Veronese, dass ausser dem System der 60 Pascal'schen Linien und 60 Kirkman'schen Punkte noch unendlich viele Systeme von Linien und Punkten existiren, die, wenn auch nicht alle, so doch die meisten Eigenschaften mit dem ersten Systeme gemeinschaftlich haben. Von diesen Systemen folgt immer eins aus dem vorhergehenden. In der vorliegenden Arbeit zeigt der Verfasser, dass diese Systeme Glieder einer continuirlichen Reihe sind.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 irgend fünf lineare Ausdrücke in homogenen Dreieckscoordinaten und $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ irgend fünf Constanten, so giebt die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{matrix} \right\| = 0$$

zehn Grade $[ik]$, welche sich zu dreien in einem Punkte schneiden. Solcher (ikh) Punkte giebt es ebenfalls zehn, welche zu je dreien auf jenen Geraden liegen. Ordnet man dem Punkte (ik) die Gerade (lmn) zu, so sind sie Pole und Polare eines gewissen Kegelschnittes. Fügt man zu den fünf Functionen und Constanten noch

als sechste x_6 resp. α_6, so erhält man fünfzehn Linien und zwanzig Punkte, welche Hesse eine Steiner'sche Figur nennt, weil die zwanzig Steiner'schen Punkte und fünfzehn Plücker'schen Geraden eine solche (allerdings speciellen Charakters) bilden.

Der Verfasser knüpft nun seine Untersuchungen an ein System

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \end{matrix} \right\|$$

von 35 Linien (ikh), 35 Punkten ($ikhl$). Die Zuordnung ist im Allgemeinen keine polare mehr, jedoch ist die Figur sich in gewisser Weise selbst reciprok, insofern auf jeder Linie vier Punkte liegen und sich in jedem Punkte vier Linien schneiden. Die fünfzehn Plücker'schen Linien und die zwanzig Steiner'schen Punkte, sowie die fünfzehn Cayley'schen Punkte und zwanzig Salmon'schen Linien bilden in ihrer Gesammtheit ein solches System.

Es werden dann gewisse Bedingungen eingeführt, wodurch die allgemeine Figur derjenigen des Pascal'schen Sechsecks bedeutend genähert und schliesslich in dieselbe übergeführt wird.

Rg.

H. Dufau. Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique. Nouv. Ann. (3) I. 99-102.

Es wird auf einfachem Wege gezeigt, wie die Polareigenschaft des Kegelschnitts den Pascal'schen Satz und dieser die Polareigenschaft nach sich zieht. W. St.

Fr. Gräfe. Notiz über das Pascal'sche, resp. Brianchon'sche Sechseck. Kronecker J. XCIII. 184-188.

Die Notiz bezieht sich auf die Reihen von Pascal'schen Sechsecken, welche von einem Brianchon'schen Sechsecke dadurch hervorgerufen werden, dass man in gewisser Weise die Ecken des Brianchon'schen Sechsecks oder die Schnittpunkte gewisser

Seiten desselben geradlinig verbindet. Bei den kurz zusammengedrängten und der Symbolik wegen zu einem Referat wenig geeigneten Betrachtungen spielt die Lage des Kirkman'schen Punktes jedes auftretenden Pascal'schen Sechsecks eine Hauptrolle.

Scht.

E. Brassinne. Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal. Nouv. Ann. (3) I. 318-320.

Ist ein $2n$-Eck einem Kegelschnitt umschrieben und gehen von den n Diagonalen, welche je zwei gegenüberliegende Ecken verbinden, $n-1$ durch einen Punkt, so geht auch die letzte durch diesen Punkt.

Ist ein $2n$-Eck einem Kegelschnitt eingeschrieben und schneiden sich $(n-1)$ Paare von Gegenseiten in Punkten einer Geraden, so schneidet sich auch das letzte Paar auf dieser Geraden.

Rg.

G. Tarry. Relation générale entre sept points quelconques d'une section conique. Conique d'homologie. Propriétés communes à trois figures homographiques. C. R. XCIV. 941-943.

Der Verfasser stellt an die Spitze dieser Note ein allgemeines Theorem über sieben Punkte eines Kegelschnitts und macht specielle Anwendungen desselben. Dieser Satz sagt folgendes aus. Zwei Dreiecke (ABC) und $(A'B'C')$ seien einem Kegelschnitte einbeschrieben. Durch einen beliebigen Punkt D und irgend einen Punkt H des Kegelschnitts lege man die beiden Kegelschnitte $(HDABC)$ und $(HDA'B'C')$. Sie schneiden sich noch in zwei anderen Punkten, deren Verbindungslinie die Polare des Punktes P, in welchen $\overline{HD}$ den ersten Kegelschnitt noch trifft, bezüglich eines Kegesschnittes ist, für welchen (ABC) and $(A'B'C')$ Poldreiecke sind. Dieser Satz wird nun auf drei collineare Figuren, welche eine besondere Lage zu einander haben, angewendet. Es wird definirt: liegen die drei Tripel der Doppel-

punkte dreier collinearer Figuren auf einem Kegelschnitte, so heisst derselbe „Kegelschnitt der Homologie“; und für solche drei Figuren wird nun eine Reihe von Sätzen mitgeteilt. W. St.

AD. SCHUMANN. Die Wechselbeziehung zwischen einem Satze von Chasles und von Steiner, nebst einigen daraus fliessenden geometrischen Relationen. Schlömilch Z. XXVII. 363-368.

Steiner hat bewiesen, dass zwei Tripel (Polardreiecke) eines Kegelschnitts in einem Kegelschnitte enthalten sind, und Chasles, dass ein Paar von je drei Punkten eines Kegelschnitts stets als Tripel eines Kegelschnitts aufgefasst werden kann.

Der Verfasser behandelt die Frage analytisch und findet, dass die Bedingung dafür, dass ein Paar von je drei Punkten Tripel eines Kegelschnitts ist, identisch ist mit der Bedingung, dass ein Paar von je drei Punkten in demselben Kegelschnitte enthalten ist.

Des Weiteren leitet der Verfasser einen Satz von Poncelet, und zwar, wie er sagt, mit einem Zusatze ab; nämlich den folgenden: „Ist ein Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben und einem zweiten umschrieben, so lässt sich von jedem Punkte des ersten aus ein Dreieck dem einen ein- und dem andern umzeichnen, und alle diese Dreiecke sind Tripel eines und desselben dritten Kegelschnitts.“

Aber dieser Satz ist bekannt, vergl. z. B. Steiner-Schröter, Kegelschnitte. II. Aufl. S. 155.

Als räumliches Analogon des obigen Satzes findet der Verfasser den folgenden Satz: „Ein Paar von je drei Geraden einer Regelschaar des Hyperboloids bestimmt in eindeutiger Form die Gruppirung der Geraden dieser Schaar zu je dreien derart, dass jede Gruppe von je dreien mit den drei ihnen parallelen der andern Schaar ein Parallelepipedon ergiebt, welches dem Hyperboloid umgeschrieben und zugleich einer mit ihm concentrischen Fläche zweiten Grades eingeschrieben ist.“ Rg.

C. Pelz. Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. Wien. Ber. LXXXV. 169-174.

Es wird in diesem Aufsatze die Aufgabe gelöst, durch einen Punkt einer bekannten Normalen des Kegelschnitts die drei übrigen Normalen der Curve zu construiren. Die Behandlung des Problems ist synthetisch. Die von Joachimsthal in Crelle J. XXVI. 155 gegebene Construction wird bewiesen, und es werden einige einfache neue Constructionen hinzugefügt.

W. St.

H. G. Zeuthen. Bevis for en Konstruktion af Chasles. Zeuthen T. (4) VI. 13-16.

Enthält die von Chasles gegebene Construction eines Kegelschnitts, wenn zwei conjugirte Halbmesser in Richtung und Länge gegeben sind. (Siehe des Verfassers Grundriss etc.).

Gm.

A. Mannheim. Construire les axes d'une ellipse dont on connait deux diamètres conjugués. Mess. (2) XI. 175-177.

Der Verfasser teilt neue rein geometrische Lösungen der im Titel genannten Aufgabe mit. Glr. (Wn.).

G. Halphén. Sur un critérium relatif à la théorie des sections coniques. Nouv. Ann. (3) I. 5-7.

Steiner hat für einen Kegelschnitt, welcher durch drei Punkte und seinen Mittelpunkt gegeben ist, das Criterium angegeben, welches entscheiden lässt, ob der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist. Der Verfasser stellt sich nun folgende Frage: Der Mittelpunkt sei so gelegen, dass der betreffende Kegelschnitt eine Hyperbel ist; wie verteilen sich dann die drei gegebenen Punkte auf die beiden Zweige der Hyperbel? Zum Schlusse

wird die Gattung des Kegelschnittes festgestellt, wenn derselbe durch den Mittelpunkt und drei Tangenten gegeben ist.

W. St.

G. Bruno. Sulle coniche che passano per tre punti dati e toccano due rette date. Torino Atti. XVII. 29-34.

Der Verfasser teilt eine von der sonst bekannten Construction dieses Problems etwas abweichende Construction desselben mit. Sie giebt Gelegenheit zur Aufstellung einiger Sätze über die Lage der den vier Kegelschnitten ausser den gegebenen Elementen gemeinsamen Punkte und Tangenten. W. St.

H. Schröter. Geometrischer Satz. Schlömilch Z. XXVII. 61-62.

Wenn man von vier in der Ebene gegebenen Punkten einen als Mittelpunkt eines Kegelschnitts, die drei übrigen als die Ecken eines Poldreiecks in Bezug auf denselben annimmt, so ist der Kegelschnitt dadurch bestimmt, und man erhält durch Vertauschung der vier gegebenen Punkte unter einander vier solcher Kegelschnitte. Es wird nun angegeben, welchen Gattungen diese Kegelschnitte angehören, und in welchen Beziehungen sie zu einander stehen. W. St.

Anonyme. Composition mathématique pour l'admission à l'école polytechnique en 1882. Solution géométrique. Nouv. Ann. (3) I. 351-357.

Wenn man durch die beiden Schnittpunkte A und B zweier Kreise erstens einen Kegelschnitt legt, der zugleich jeden der beiden Kreise berührt, zweitens die gleichseitige Hyperbel legt, welche A und B zu Scheiteln hat, und dann die beiden sonstigen Schnittpunkte des Kegelschnitts und der Hyperbel verbindet, so erhält man eine durch einen Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise gehende Verbindungslinie. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche durch A und B gehen und

die beiden Kreise berühren, wird von zwei Kreisperipherieen gebildet. Die Asymptoten aller Kegelschnitte, welche ihren Mittelpunkt auf einer dieser beiden Kreisperipherieen haben, treffen dieselbe in zwei festen Punkten, die auf der Chordale der beiden gegebenen Kreise liegen. Diese Sätze und einige naheliegende Folgerungen sind in der vorliegenden Abhandlung synthetisch bewiesen. Scht.

Z. Reggio. Alcune ricerche sulle coniche, centri descrittivi e rette descrittive — configurazioni di coniche — assi delle configurazioni. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 649-673.

Eine Configuration von Kegelschnitten nennt der Verfasser den Inbegriff aller Kegelschnitte, welche einem Dreiecke *ABC* umschrieben (oder eingeschrieben) sind und einer weiteren Bedingung Genüge leisten. Zu einem Punkte der Ebene (*ABC*) gehört bezüglich des Dreiecks in bekannter Weise eine Gerade als Polare. Die zusammengehörenden Elemente liefern eine reciproke Beziehung zweiten Grades. Den Punkten eines Kegelschnitts der Configuration entsprechen so die Geraden eines Strahlenbüschels; also einem Kegelschnitte ein Punkt, der Mittelpunkt des Büschels, welcher das „descriptive Centrum“ der Curve heisst. Der Verfasser studirt nun einfache Configurationen durch Betrachtung des Ortes des descriptiven Centrums und giebt einige auf Kegelschnitte bezügliche Constructionen an, welche auf diesem Zusammenhange beruhen. W. St.

A. Brill. Ueber das Polvierseit. Klein Ann. XX. 531-535.

Wenn man in Bezug auf einen Kegelschnitt K zu den drei Seiten S_1, S_2, S_3 eines Dreiseits die Pole P_1, P_2, P_3 bestimmt, so sind natürlich die drei Seiten S_{23}, S_{13}, S_{12} des von P_1, P_2, P_3 gebildeten Dreiecks auch Polaren der drei Ecken P_{23}, P_{13}, P_{12} des aus S_1, S_2, S_3 bestehenden Dreiecks. Es liegen aber auch das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ und das Dreieck $P_{23}\ P_{13}\ P_{12}$ perspectiv, so dass die Verbindungslinien $P_1 P_{23}$, $P_2 P_{13}$, $P_3 P_{12}$, welche bez. S_{14}, S_{24}, S_{34}

heissen mögen, sich in einem einzigen Punkte P_4 schneiden, und auch die Schnittpunkte der [Seitenpaare $S_1 S_{23}$, $S_2 S_{13}$, $S_3 S_{12}$, welche bez. P_{14}, P_{24}, P_{34} heissen mögen, auf einer einzigen geraden Linie S_4 liegen. Hieraus geht ferner hervor, dass auch P_4 Pol von S_4 in Bezug auf K sein muss. Die eben bezeichneten zehn Punkte und zehn geraden Linien bilden also eine Configuration, welche die Eigenschaft hat, dass zehnmal drei der zehn Punkte in einer der geraden Linien liegen, und auch zehnmal drei der zehn geraden Linien sich in einem der zehn Punkte schneiden. Von dieser bekannten Configuration, welche der Referent gern auch als Schnitt der zehn Verbindungslinien und der zehn Verbindungsebenen von fünf Punkten im Raume aufgefasst gesehen hätte, zählt der Verfasser mehrere merkwürdige Eigenschaften auf, welche teils der Configuration an sich angehören, teils auch auf den Kegelschnitt K Bezug nehmen. Namentlich betrachtet der Verfasser die fünfzehn Verbindungsgeraden, welche entstehen, wenn man jeden der zehn Punkte mit denjenigen drei Punkten der Configuration verbindet, mit denen er noch nicht durch eine der zehn Geraden der Configuration verbunden ist. Diese fünfzehn Verbindungsgeraden lassen sich nämlich zu fünf Dreiseiten $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_5$ zusammenfassen, welche u. A. die Eigenschaft haben, dass je zwei von ihnen wiederum perspectiv sind. Eine andere von Herrn Brill erwähnte Eigenschaft spricht aus, dass die sechs Osculationspunkte der sechs Kegelschnitte, welche durch die drei Ecken eines der fünf Dreiecke $\triangle$ gehen und zugleich den Kegelschnitt K dreipunktig berühren, zugleich Osculationspunkte für die den vier andern Dreiecken $\triangle$ umschriebenen Kegelschnitte sind. Schliesslich wird angegeben, wie sich hierdurch aus K und einem der fünf Dreiecke $\triangle$ die übrigen linear construiren lassen. Scht.

— – —

J. Streissler. Construction der gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte. Hoppe Arch. LXVIII. 389-404.

Ist jeder von zwei Kegelschnitten irgendwie durch eine fünffache Bedingung gegeben, z. B. durch fünf seiner Punkte oder

durch die Endpunkte seiner grossen Axe und durch seine Brennpunkte, so ist die Aufgabe, die gemeinsamen Punkte oder die gemeinsamen Tangenten der beiden so definirten Kegelschnitte zu finden, eine Aufgabe vierten Grades, und deshalb im allgemeinen mit Cirkel und Lineal nicht lösbar. Für den Forscher aber ist es interessant und für den Constructeur wichtig, den Kegelschnitteigenschaften möglichst bequeme, praktische Methoden zu entnehmen, welche in den verschiedenen Fällen die gemeinsamen Tangenten constructiv liefern. Von diesem Gedanken geleitet, gelangt der Verfasser für die am meisten vorkommenden Fälle zu sehr einfachen Constructionsarten. Scht.

L. Kotanyi. Construction algebraischer Ausdrücke mit Hülfe von Involutionen auf Kegelschnitten. Schlömilch Z. XXVII. 248-252.

Jede quadratische Involution kann durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha x_1 x_2 + \beta(x_1 + x_2) + \gamma = 0$$

definirt gedacht werden. Soll dem Werte $x_1 = \infty$ der Wert $x_2 = \infty$ entsprechen, so specialisirt sich die Involutionsgleichung zu

$$x_1 + x_2 = -\frac{\gamma}{\beta} = c.$$

Diese Gleichung benutzt der Verfasser, um mit Hülfe einer Involution zwei Strecken OA und OB einer Geraden G zu addiren, d. h. einen Punkt X auf G zu finden, so dass $OX = OA + OB$ ist. Bestimmt man nämlich auf der Geraden G die Involution, in welcher der unendlich ferne Punkt sich selbst entspricht, und in welcher dem Punkte A der Punkt B entspricht, so muss, da zu $x_1 = 0$ der Wert $x_2 = c = OA + OB$ gehört, der in dieser Involution dem Punkte O entsprechende Punkt der gesuchte Punkt X sein, der die Forderung $OA + OB = OX$ erfüllt. Zur Ausführung dieser Construction kann man einen in der Ebene der Geraden liegenden beliebigen Kegelschnitt benutzen, auf den man die auf G liegende Involution von einem beliebigen Kegelschnittpunkte S aus projicirt. Man zieht also SA und SB, sucht

die zweiten Schnittpunkte A' und B' dieser Geraden mit dem Kegelschnitt auf und erhält in der Geraden $A'B'$ den einen Ort für das gesuchte Involutionscentrum. Den zweiten Ort liefert, da sich $x_1 = \infty$ und $x_2 = \infty$ entsprechen, die Tangente in dem Punkte D', wo die Parallele durch S mit G den Kegelschnitt schneidet. Den Schnittpunkt S' von $A'B'$ und der Tangente in D' hat man nun noch mit demjenigen Punkte O' zu verbinden, in dem OS den Kegelschnitt zum zweiten Male schneidet. Die Verbindungsstrecke $O'S'$ schneidet den Kegelschnitt in X', und $S'X'$ schneidet endlich die Gerade G in dem gesuchten Punkte X. Durch Wiederholung einer solchen Construction kann die Addition beliebig vieler Punkte, sowie die Multiplication eines Punktes mit einer natürlichen Zahl ausgeführt werden. In ähnlicher Weise wird dann die Subtraction behandelt, wobei auch negative Werte eingeführt werden. Zur Multiplication gelangt der Verfasser aus der allgemeinen Involutionsgleichung, indem er dem Werte $x_1 = 0$ den Wert $x_2 = \infty$ zuerteilt, wodurch sich diese Gleichung in $x_1 x_2 = -\frac{\gamma}{\alpha} = c$ verwandelt, und indem er dann zwei Punkte sich entsprechen lässt, von denen der eine den Wert 1, der andere den Wert c darstellt. Mit Hülfe dieser Betrachtungen beweist der Verfasser dann sowohl den Pascal'schen Satz, wie auch den Satz, dass das einem Kegelschnitt umbeschriebene Vierseit dasselbe Diagonaldreieck hat, wie das aus seinen vier Berührungspunkten bestehende Viereck. Schliesslich werden die Quadratwurzeln, reciproke Werte, conjugirt-imaginäre Werte und Quotienten in ähnlicher Weise behandelt. Scht.

Weill. De l'involution de plusieurs points sur une conique. Nouv. Ann. (3) I. 62-79.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. C.

Gerbaldi. Sui gruppi di sei coniche in involuzione. Torino Atti XVII. 566-580.

Zu einem beliebig in einer Ebene gelegenen Kegelschnitte giebt es ∞^3 Kegelschnitte, von denen jeder mit dem ursprünglichen Kegelschnitte in Involution liegt. Zwei solche in Involution liegende Kegelschnitte bestimmen zwei Gruppen von je vier Kegelschnitten, so dass von den sechs Kegelschnitten, welche sich aus einer solchen Gruppe und den beiden sie erzeugenden Kegelschnitten zusammensetzen, immer je zwei in Involution liegen. Da aber je zwei in Involution liegende Kegelschnitte einer solchen Gruppe von sechs Kegelschnitten, wie aus dem eben Gesagten hervorgeht, ausser dieser Gruppe noch eine zweite Gruppe bestimmen, so kann man sagen, dass zu jeder Gruppe von sechs Kegelschnitten, von denen je zwei in Involution liegen, fünfzehn analoge Gruppen gehören, von denen jede mit der erstgenannten Gruppe zwei Kegelschnitte gemein hat. Verlangt man, dass von n Kegelschnitten je zwei in Involution liegen, so kann n höchstens gleich sechs sein. Derartige Gruppen von sechs Kegelschnitten haben hinsichtlich der ein- und umbeschriebenen Dreiecke und Vierecke, der sich selbst conjugirten Dreiecke, der dadurch erzeugten Jacobi'schen und Hesse'schen Curven, u. s. w. interessante Eigenschaften, die vom Verfasser analytisch bewiesen werden. Scht.

F. Bergmann. Kegelschnittbüschel-Constructionen. Hoppe Arch. LXVIII. 404-421.

Der geometrische Ort für die Pole einer gegebenen Geraden in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte eines gegebenen Kegelschnittbüschels ist bekanntlich wiederum ein Kegelschnitt. Für die Construction des letzteren entwickelt der Verfasser ein auf die Betrachtung zweier Punktinvolutionen gestütztes einfaches Verfahren. Es ergiebt sich dabei auch der bekannte Satz, dass die Kegelschnitte, welche in dieser Weise den sämmtlichen ∞^2 Geraden der Ebene polar zugeordnet sind, ein zweistufiges Kegelschnittsystem mit drei gemeinsamen Punkten bilden. Weiterhin untersucht der Verfasser die Lagen derjenigen Geraden, deren polare Kegelschnitte Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln, gleichseitige Hyper-

beln, Kreise, Geradenpaare werden. Mit Hülfe desjenigen polaren Kegelschnitts, der zu einem Kreise wird, lässt sich dann die Aufgabe, zu einem beliebigen Punkte den im Kegelschnittbüschel conjugirten Punkt aufzusuchen, sehr einfach erledigen. Den Schluss der Abhandlung bildet die Betrachtung des Kegelschnitts, der von den Mittelpunkten der Kegelschnitte des Büschels, d. h. von den Polen der unendlich fernen Geraden gebildet wird.

Scht.

Fr. Hofmann. Théorème relatit à un certain réseau de quatre sections coniques. Nouv. Ann. (3) I. 321-325.

Diese Arbeit enthält einige Sätze über vier Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt, von welchen jeder drei von vier gegebenen Geraden berührt. W. St.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte in synthetischer Behandlung von Genese, A. McMurphy, Ch. Ladd, F. Budd, W. Roberts, W. J. C. Sharp, J. L. Kitchin, Ch. A. Scott, J. Young, M. S. Meyer, K. Gale, T. Woodcock, W. H. Lowry, G. F. Walker, Townsend, Droz, A. Martin, B. Easton, D. Edwardes, R. Knowles finden sich Ed. Times XXXVI. 43, 78, 83; XXXVII. 22, 25, 28, 35-36, 81, 121, 122, 123.

Wn.

O. Zimmermann. Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über Kegelschnitte und über Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Berlin. Friedländer.

Es wird eine grosse Reihe zum Teil neuer Sätze ohne Beweis mitgeteilt. W. St.

H. Drasch. Beitrag zur synthetischen Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Wien. Ber. LXXXV. 534-553.

Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt wird unter Zugrundelegung ihrer Erzeugung durch ein Strahlenbüschel erster Ordnung und ein ihm projectives Büschel zweiter Ordnung eingehend erörtert, und es werden auf synthetischem Wege die wichtigsten meist bekannten Eigenschaften der Curven abgeleitet. W. St.

R. A. Roberts. On polygons circumscribed about a cuspidal cubic. Lond. M. S. Proc. XIII. 148-153.

Der Verfasser giebt, ohne sich auf eine principielle Untersuchung einzulassen, interessante Beispiele von ∞^1 Dreiecken und vollständigen Vierecken, welche einer Curve dritter Ordnung mit Spitze umschrieben und einer anderen rationalen C_3 oder C_4 eingeschrieben sind. V.

C. Le Paige. Note sur l'involution biquadratique du troisième rang et sur son application aux courbes du quatrième ordre. Prag. Ber. 1881. 61-68.

In dieser Note wird die biquadratische Involution dritter Stufe

$$a_x^4+\lambda b_x^4+\mu c_x^4+\nu d_x^4 = 0$$

auf der Geraden betrachtet und zur Lösung einer Reihe geometrischer Probleme benutzt, von denen die Construction des sechsten Schnittpunktes einer C_3 und C_2, sowie die Construction einer C_4 aus vierzehn gegebenen Punkten hervorgehoben werden möge. V.

A. AMESEDER. Geometrische Untersuchungen der ebenen Curven vierter Ordnung, insbesondere ihrer Berührungskegelschnitte. Wien. Ber. LXXXV. 396-423.

Der Verfasser leitet die bekannten Eigenschaften der einfach berührenden Kegelschnitte und der Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung ab auf dem Wege, welchen schon vorher Geiser zu diesem Zwecke betreten hat. Die Berührungskegelschnitte eines Systems erscheinen hierbei als die ersten Polaren der Punkte eines festen Kegelschnitts C_2 bezüglich einer allgemeinen Curve dritter Ordnung. Hervorzuheben ist die Bestimmung des Ortes der Brennpunkte aller Kegelschnitte eines Systems. Besondere Arten von C_4 erhält der Verfasser, wenn C_2 einem vollständigen, der Hesse'schen Curve einbeschriebenen Vierseite einbeschrieben ist. Auf einer solchen C_4 sind die Quadrupel der Berührungspunkte zu je vier in der Art gruppirt, dass die Verbindungslinie zweier Punkte eines Quadrupels noch zwei Punkte eines zweiten Quadrupels derselben Gruppe enthält. Enthält C_4 die Ecken eines solchen Sechzehneckes, so enthält sie die Ecken von unendlich vielen. W. St.

LAGUERRE. Sur les hypercycles. C. R. XCIV. 778-781, 832-835, 933-936, 1033-1036, 1160-1163.

In den vorliegenden Noten ist eine Reihe von, namentlich ihrer Ableitung nach, sehr eleganten Sätzen zusammengestellt über gewisse Curven vierter Klasse und sechster Ordnung mit der unendlich fernen Geraden als Doppeltangente, welche Laguerre als Hypercyklen bezeichnet. Insbesondere ist dabei das Princip hervorzuheben, die auszuführenden geometrischen Constructionen dadurch zu vereinfachen und vor allem weniger vieldeutig zu machen, dass die algebraischen Curven als von ihren Tangenten umhüllt mit einem bestimmten Richtungssinn behaftet aufgefasst werden, indem der Tangente ein solcher zuerteilt wird. Nur den Curven, für welche die Parallelcurven aus zwei getrennten Zügen bestehen, kann dann ein bestimmter Richtungssinn beigelegt werden,

(courbes de direction). Die Gerade mit fixirter Richtung wird als „Halbgerade", der Kreis mit gegebener Richtung als Cyklus bezeichnet. Dann giebt es z. B. an zwei Cyklen nur zwei gemeinsame Tangenten, indem der Sinn der Durchlaufung von Tangente und Kreis übereinstimmen muss; in ein Dreieck lässt sich nur ein einziger Kreis (von bestimmtem Sinne) einschreiben, u. s. w.

Von den folgenden Entwickelungen sei nur eine Definition der Hypercyklen herausgegriffen, an welche Darboux (C. R. XCIV. p. 930, vgl. das folgende Referat) einige analoge Formulirungen angeschlossen hat. Es seien A, A'; B, B', die sich bez. in a und b schneiden, gewisse (specielle) Tangentenpaare unserer Curve, T eine bewegliche Tangente, welche die vier festen beziehungsweise in den Punkten α, α'; β, β' schneidet. So hat für unsere Curven die Relation statt:

$$\alpha a + \alpha' a + b\beta + b\beta' - \beta\alpha - \beta'\alpha' = \text{const.},$$

oder auch, wenn man die beiden Cyklen, welche bez. A, A', T und B, B', T berühren, zeichnet und deren Berührungspunkte α_0, β_0 auf T fixirt:

$$\alpha_0\,\beta_0 = \text{const.}$$

Dabei giebt es stets specielle Tangentenquadrupel, für welche diese letztere Constante gleich Null ist. Von den weiteren Untersuchungen sei noch eine gewisse durch unsere Curven vermittelte Zuordnung der Geraden der Ebene zu Kreisen erwähnt, welche gewisse Analogieen mit der Zuordnung von Pol und Polare bietet; ferner eine Transformation der Ebene, auf welche der Verfasser in den C. R. XCII. p. 71 (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 492) näher eingegangen ist, und durch welche sämmtliche derartige Curven, mit Ausnahme eines gewissen Specialfalles, in Parabeln sich überführen lassen. Dk.

G. Darboux. Sur une classe de courbes unicursales.

C. R. XCIV. 930-933.

Anknüpfend an die Mitteilungen von Laguerre über gewisse Curven vierter Klasse (Laguerre, Notes sur les hypercycles, C. R.

XCIV., vergl. das vorhergehende Referat), teilt Herr Darboux die folgenden Sätze über Curven n^{ter} Klasse mit, die er im Jahre 1880 in einer geometrischen Vorlesung an der Sorbonne zum Vortrag gebracht hat:

1) Man betrachte n feste Gerade, bezeichne auf jeder derselben einen festen Punkt und messe von ihm aus die Stücke, welche eine bewegliche Gerade auf denselben abschneidet. Besteht dann zwischen diesen Abschnitten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine lineare Relation

$$\Sigma x_i p_i = k,$$

so umhüllt die bewegliche Gerade im Allgemeinen eine Curve n^{ter} Klasse, welche die unendlich ferne Gerade zur $(n-1)$-fachen Tangente hat. Der Satz ist umkehrbar. Für $n = 2$ drückt er eine bekannte Eigenschaft der Parabel aus.

2) Analog lässt sich die Eigenschaft der Parabel, dass drei feste Tangenten auf einer beweglichen vierten stets zwei Segmente von constantem Verhältnis ausschneiden, und die Umkehrung derselben sofort auf Curven n^{ter} Klasse mit $(n-1)$-facher Tangente im Unendlichen verallgemeinern.

Die Sätze lassen sich durch Projection auf Curven n^{ter} Klasse mit beliebiger $(n-1)$-facher Tangente übertragen, und ebenso formulirt sich deren dualistische Umkehrung auf die einfachste Weise. Dk.

G. Darboux. Sur une propriété du cercle. C. R. XCIV. 1108-1110.

Eine bewegliche Tangente eines Kreises bestimmt mit zwei festen Tangenten Dreiecke, deren Umfang constant ist. Diese Eigenschaft veranlasst den Verfasser zur Untersuchung derjenigen Curven, deren Tangenten auf n Paaren von Geraden Dreiecke abschneiden, für welche die Summe der Umfänge constant ist.

Die Curven sind Unicursalcurven einer gewissen, der m^{ten} Klasse, welche die unendlich ferne Gerade zur $(m-2)$-fachen Tangente haben. In besonderen Fällen wird jene Gerade zur $(m-1)$-fachen Tangente, und dann gehen die vorliegenden Curven in die vom

Verfasser in einer Note „Sur une classe de courbes unicursales“ (cfr. das vorhergehende Referat) betrachteten über. Rg.

E. Mahler. Zur Theorie der Kegelschnitte. Hoppe Arch LXVIII. 78-84.

In dem vorliegenden Aufsatze beschäftigt sich der Verfasser mit einer Verallgemeinerung des Problems, welches den Gegenstand einer frühern Arbeit „Ueber gewisse Systeme von Kegelschnitten“ (Hoppe Arch. LXVI. 358 ff., siehe F. d. M. XIII. (1881) 477) bildet, und so ausgesprochen werden kann: „Es soll ein Curvensystem von der Eigenschaft gesucht werden, dass das von einem beliebigen Punkte des Systems an eine Curve des Kegelschnittbüschels $K-\lambda K' = 0$ gezogene Tangentenpaar durch das an einen der Fundamentalkegelschnitte des Büschels gezogene Tangentenpaar nach constantem Doppelverhältnis geteilt wird.“ Das betreffende Curvensystem ist ein System von C_4, von denen jede die Eigenschaft hat, dass ihre Schnittpunkte mit den Seiten des den Kegelschnitten des Büschels gemeinschaftlichen, sich selbst conjugirten Dreiecks sich in zwei Punktepaare gruppiren, die durch die Ecken jenes Dreiecks harmonisch geteilt werden.

Jedem der beiden Kegelschnitte K und K_1 ist hiernach ein solches System zugeordnet. Bezieht man diese Systeme dadurch aufeinander, dass man zwei Curven desselben λ einander zuordnet, so erzeugen sie eine C_{32}. Rg.

E. Mahler. Zur Theorie der Curven grader Ordnung. Hoppe Arch. LXIX. 108-110.

Es wird der Satz bewiesen: „Das Erzeugnis eines Curvenbüschels n^{ter} Ordnung und einer mit ihm projectivischen Tangenten-Involution auf einem Kegelschnitte ist eine Curve von der Ordnung $2(n+1)$“; dann wird die Construction der $2(n+1)$ Schnittpunkte des Erzeugnisses mit einer Geraden $\mathfrak{G}$ gezeigt und folgende Eigenschaft der genannten Curve hergeleitet: „Die Curve

hat in jedem der n^2 Scheitelpunkte des Büschels B, sowie in jedem der $(n+1)$ gemeinsamen Elemente der auf der Involutionsaxe $\mathfrak{G}$ befindlichen conlocalen Punktreihen, welche die Schnittpunkte zweier zu einem Tangentenpaare gehörenden Tangenten einerseits und die Schnittpunkte der $\mathfrak{G}$ mit den Curven des Büschels B andererseits bilden, einen Doppelpunkt."

H.

Stoll. Zur Tangentenconstruction der Astroide. Hoppe Arch. LXVII. 447-448.

Der Verfasser leitet für die Astroide, welche als Enveloppe einer constanten Strecke, deren Endpunkte auf zwei beliebigen Geraden sich bewegen, entsteht, auf analytischem Wege eine Construction des Berührungspunktes der Strecke mit der Astroide ab, welche auf kinematischem Wege sich unmittelbar ergiebt.

W. St.

G. Bellermann. Ueber Rouletten, welche entstehen, wenn eine Cycloide auf einer andern rollt. Festschrift zu dem 50-jährigen Jubiläum der Königstädtischen Realschule zu Berlin. S. 215-240.

In seiner Schrift „Epicycloiden und Hypocycloiden" (1867 Lüderitz'sche Buchhandlung) hat der Verfasser diese Curven als geometrischen Ort der Eckpunkte eines Parallelogramms mit unveränderlichen Seiten nachgewiesen, dessen einer Eckpunkt fest ist, während sich die beiden ihm benachbarten Ecken mit gleichförmigen, aber von einander verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten um die feste Ecke in Kreisen bewegen. Die beiden in dem festen Punkte zusammentreffenden Seiten, d. h. also die Halbmesser der Kreise, werden „Deferenten" genannt. Der vierte Eckpunkt wäre hier passend als „Summe" der Deferenten zu bezeichnen. Untersucht wird nun diejenige Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems, bei der eine gemeine Cycloide, Epi- oder Hypocycloide auf einer festen Curve dieser drei Arten rollt,

jedoch soll die Bogenlänge von einem Rückkehrpunkt zum folgenden bei beiden Curven dieselbe sein. Die Curven, welche die einzelnen Systempunkte beschreiben, nennt der Verfasser „Cycloiden zweiter Ordnung", weil, wie er nachweist, dieselben durch einen Punkt gleich der Summe von drei Deferenten beschrieben werden. Ebenso kann man Cycloiden n^{ter} Ordnung bilden. Uebrigens kann eine Cycloide zweiter Ordnung, wie eine gewöhnliche, unter Umständen eine gerade Linie werden. Rollt eine Kardioide innen auf einer eigentlichen Cycloide mit gleichem Bogen, so beschreibt ihr Rückkehrpunkt die Basis dieser Cycloide. Rg.

CHR. WIENER. Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven. Schlömilch Z. XXVII. 129-140.

Die Arbeit kann als eine Fortsetzung einer früheren des Verfassers in Schlömilch Z. XXVI. p. 257 angesehen werden (s. F. d. M. XIII. (1881) 559), woselbst u. a. die doppelte Entstehungsweise der betrachteten Curvenspecies allgemein nachgewiesen wird. In dem vorliegenden Aufsatze wird stets diejenige Entstehungsweise gewählt, bei der das Verhältnis der absoluten Werte der Halbmesser des wälzenden Kreises w und des festen f das kleinere ist. In wesentlich geometrischer Weise werden die Singularitäten der primären Curve sowohl, als auch die ihrer Evoluten bestimmt. Die Constructionen lassen sich nicht wohl in Kürze wiedergeben. Rg.

C. Besondere räumliche Gebilde.

TH. REYE. Das Problem der Configurationen. Act. Math. I. 93-96.

Der Verfasser giebt folgende Definitionen: „Eine Configuration n_i in der Ebene besteht aus n Punkten und n Geraden in solcher Lage, dass jede der n Geraden i von den n Punkten enthält, und durch jeden der n Punkte i von den n Geraden

geben." „Eine räumliche Configuration n_i besteht aus n Punkten und n Ebenen in solcher Lage, dass auf jeder der n Ebenen i von den n Punkten enthalten sind, und durch jeden der n Punkte i von den n Ebenen gehen. Diese Configuration wird genauer bezeichnet durch (n_i, g_k), wenn zu ihr noch g Gerade gehören, die mit je k der n Punkte und je k der n Ebenen incident sind."

Das Problem der Configuration verlangt nun, dass alle verschiedenartigen zu den Zahlen n und i gehörigen Configurationen ermittelt, und dass ihre wichtigsten Eigenschaften aufgesucht werden. W. St.

A. Victor. Die harmonische Configuration 24_4. Freiburg. Ber. VIII. 2.

Die Note enthält die Eigenschaften einer räumlichen Configuration von 24 Punkten, 24 Ebenen, 18 Geraden, wo ein Punkt drei Gerade und neun Ebenen, eine Ebene drei Gerade und neun Punkte, eine Gerade vier harmonische Punkte und vier harmonische Ebenen trägt. Sie giebt damit einen Beitrag zu der Lehre von der factischen Construction und dem Studium einzelner Configurationen. Giebt es sechs Quadrupel separirter Punkte, so spaltet sich die 24_4 in zwei 12_3 (cfr. Reye Acta math. I. 97), die einander eingeschrieben sind. Die Ebenen der einen sind die Diagonalebenen der anderen. Dieses schon öfter aufgetretene Ineinanderschachteln zweier Configurationen kann man zu einem leitenden Principe machen. In 24_4 sind 24 Hexaeder und 24 Oktaeder nachzuweisen. Je ein Oktaeder ist in ein Hexaeder eingeschrieben. Ferner sind die Verwandtschaften bemerkenswert, in denen 24_4 sich selbst entspricht: 24 perspectivische involutorische Collineationen, neun geschaart involutorische Collineationen, zwölf Nullsysteme (mit Bewahrung jeder 12_3), $24+9$ Polarsysteme (mit Vertauschung der 12_3); allgemein 1152 Collineationen und ebensoviele Correlationen. Die Kernflächen der Polarsysteme werden betrachtet. Eine sehr durchsichtige Form giebt ein Würfel mit einem eingeschriebenen regulären Oktaeder. Kr.

H. Schröter. Ueber cyklisch projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen. Klein Ann. XX. 231-254.

Es werden in diesem Aufsatze zwei collineare Räume betrachtet, für welche cyklisch projective Punktgruppen existiren, und bei welchen die Zahl der einer Gruppe angehörigen Punkte gleich vier ist. Zunächst wird folgender Satz bewiesen: „Wenn zwei collineare Räume derart liegen, dass einmal von vier Paaren entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}_1$ die Punkte $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_1$ incident sind, so ist dies immer der Fall, d. h. wenn man, die collineare Beziehung in beiderlei Sinn aufgefasst, mit einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ beginnt, den entsprechenden $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}_1$, den zu $\mathfrak{z}_1$ entsprechenden $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1$ und den zu $\mathfrak{t}_1$ entsprechenden $\mathfrak{t}$ ermittelt, so coincidirt dieser mit $\mathfrak{x}_1$.“ Es sind somit die sämmtlichen Punkte und Ebenen des Raumes zu Quadrupeln angeordnet. Irgend zwei Quadrupel bilden allemal zwei Tetraeder, die gleichzeitig auf vier verschiedene Arten hyperbolisch liegen. Werden je zwei entsprechende Punkte eines Quadrupels durch Gerade verbunden, so entsteht ein windschiefes Vierseit, dessen Diagonalen zwei feste sich selbst entsprechende Geraden s un s' treffen. Die gegenüberstehenden Ecken eines solchen Vierseits sind stets entsprechende Punkte in einem geschaart involutorischen Systeme, dessen Axen s und s' sind. Auf jeder dieser Axen s und s' selbst befindet sich eine Involution entsprechender Punkte der collinearen Räume. Zum Schlusse wird gezeigt, dass und auf welche Weise zwei gegebene collineare Räume in Quadrupellage gebracht werden können.

W. St.

Ad. Schumann. Eine allgemeine Beziehung zwischen fünf Punkten des Raumes. Schlömilch Z. XXVII. 368-369.

Bildet man aus je vier von fünf Punkten des Raumes ein Tetraeder und bestimmt den Potenzwert des fünften gegen die diesem Tetraeder umschriebene Kugel, so hat das Product aus dieser Potenz und dem Volumen des Tetraeders denselben ab-

soluten Zahlenwert, wie man auch die fünf Punkte zu vier combiniren mag.

Der absolute Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2, & x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix}$$

ist

$$= 6 . V_{hklm} P_n,$$

wo h, k, l, m, n die Zahlen von 1 bis 5 in irgend einer Reihenfolge bedeuten. Darin liegt der Satz. Rg.

H. Thieme. Zur Geometrie des Tetraeders. Schlömilch Z. XXVII. 56-61.

Der Ausgangspunkt dieser Untersuchung über das Tetraeder ist die Bestimmung des Ortes derjenigen Punkte, deren orthogonale Projectionen auf die Ebenen des Tetraeders Punkte derselben Ebene sind. Dieser Ort, eine Fläche dritter Ordnung, ist von Geiser und Hankel bereits ausführlich untersucht worden. Der Verfasser gelangt durch elementare Betrachtungen zu einigen Grundeigenschaften der Fläche und den Beziehungen besonderer Punkte derselben zu ihren Projectionen auf alle Tetraeder-Ebenen. So ergiebt sich: Errichtet man auf allen Ebenen eines Tetraeders längs ihrer Schnitte mit einer fünften Ebene senkrechte Ebenen und verbindet dann jede Tetraederecke mit dem Schnittpunkte der drei auf den Ebenen der Ecke senkrechten Ebenen durch eine gerade Linie, so schneiden sich diese vier Verbindungslinien in einem Punkte, dessen Projectionen auf die Ebenen des Tetraeders die Ecken eines ebenen Viereckes sind. Es giebt drei gerade Linien im Raume mit der Eigenschaft, dass die Projectionen jedes ihrer Punkte auf die Ebenen eines Tetraeders die Ecken eines Trapezes sind, und drei Punkte im Raume, für welche die vier Projectionen die Ecken eines Parallelogramms sind. Die drei zu den Gegenkantenpaaren eines Tetraeders gehörigen orthogonalen Hyperboloide schneiden sich in einer Raumcurve, welche auch auf dem Höhenhyperboloide liegt. W. St.

H. Vogt. Ueber die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren. Kronecker J. XCII. 328-342.

In synthetischer Form wird eine Reihe von Relationen entwickelt, welche sich auf ein räumliches Vierseit beziehen, dessen Seiten von einer Kugel berührt werden. Die wesentlichen Ergebnisse sind folgende:

Sind a_1 und a_2 zwei feste Tangenten einer Kugel, so giebt es zwei Schaaren von Tangenten, welche sich an jene beiden festen Tangenten anlehnen. Die eine Schaar der Tangenten b hat ihre Berührungspunkte auf einem festen Kreise β, die andere der Tangenten c auf einem festen Kreise γ. Beide Kreise schneiden sich rechtwinklig. Sind m_b und m_c die Mittelpunkte jener Kreise, M aber der Mittelpunkt der Kugel, so lassen sich jene Tangentenschaaren als Regelschaaren von zwei Rotationshyperboloiden B und Γ auffassen, deren Axen bezüglich Mm_b und Mm_c sind. Die festen Tangenten a_1, a_2 gehören der anderen Regelschaar der Hyperboloide an. Im Allgemeinen giebt es keine Relation zwischen den Seitenlängen eines räumlichen Tangentenvierseits; nur in dem Falle, dass die vier Berührungspunkte in einer Ebene gelegen sind, ist die Summe zweier Seiten gleich der Summe der beiden anderen. Die Criterien, wie diese Summen zu bilden sind, werden angegeben. Ist das räumliche Vierseit keiner Bedingung unterworfen, so giebt es im Allgemeinen acht Kugeln, welche seine Seiten berühren; ist dagegen die Summe zweier Seiten gleich der Summe der beiden anderen, so wird das Vierseit von unendlich vielen Kugeln berührt, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen; ausserdem aber giebt es noch vier Berührungskugeln, welche dieser Schaar nicht angehören.

Der letzte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Tetraedern, welche mit ihren sechs Kanten eine Kugel berühren. Wählt man zwei Tangenten a_1, a_2 willkürlich, so können diese im Allgemeinen nicht als Gegenkanten eines solchen Tetraeders aufgefasst werden; sie können es nur dann, wenn sie gegen die Kreise $\beta\gamma$, zu denen sie Veranlassung geben, unter einem Winkel von 45 Grad

geneigt sind. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so giebt es unendlich viele solcher Tetraeder, welche a_1 und a_2 zu Gegenkanten haben. Ist a_1 gewählt, so bestimmt jeder Punkt der Kugel eine Tangente a_2 eindeutig, welche mit a_1 zugleich ein derartiges Tetraeder zulässt; für jeden Punkt des Raumes aber giebt es zwei Tangenten a_2 an die Kugel, welche mit a_1 zugleich jene Bedingung erfüllen. Ebenso giebt es in jeder Ebene zwei derartige Linien. Schn.

G. Bruno. Sui quadrilateri sghembi circoscritti ad una quadrica. Torino Atti XVII. 35-45.

Durch eine synthetische Untersuchung wird nachgewiesen, dass an Stelle des bei Poncelet (Traité des propriétés proj. p. 78) erwähnten Satzes, dass die Berührungspunkte eines der Fläche zweiten Grades umschriebenen räumlichen Vierseits stets in einer Ebene liegen, der folgende treten muss.

„Die Berührungspunkte aller vierten Seiten eines um eine Fläche zweiten Grades F beschriebenen räumlichen Vierseits, dessen drei erste Seiten dieselbe in gegebenen Punkten A_1, A_2, A_3 berühren, liegen auf den vier (reellen) Kegelschnitten, welche durch die Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 S$, $A_1 A_3 S$, $A_2 A_3 S$ mit F bestimmt werden, falls S der Pol der Ebene $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf F ist.“ Referent bemerkt hierzu, dass dieser Satz einer naheliegenden Verallgemeinerung fähig ist. V.

J. Cardinaal. Zur Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung. Schlömilch Z. XXVII. 119-122.

Es wird im Anschluss an die von Chasles gegebene Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun bekannten Punkten die Aufgabe gelöst: „Die Fläche zu construiren, wenn ein Punkt und die Punktinvolutionen von conjugirten Punkten bezüglich der Fläche auf drei Geraden gegeben sind.“

W. St.

FR. GRAEFE. Erweiterung eines Satzes von Hesse über Sechsecke im Raume. Kronecker J. XCIII. 87-88.

Hesse betrachtet (Borchardt J. LXXXV. 304-317) ein beliebiges Sechseck und zeigt, wie sich aus diesem mit Hülfe eines nach Willkür gewählten Punktes ein ihm eingeschriebenes Brianchon'sches Sechseck bestimmen lasse, welches durch ein Hyperboloid ein neues Brianchon'sches Seckseck liefere, das dem ursprünglichen eingeschrieben ist. Graefe zeigt, dass neben dem ursprünglichen Brianchon'schen Sechseck noch drei weitere Brianchon'sche Sechsecke existiren, welche denselben Brianchon'schen Punkt haben, und von denen jedes unzweideutig ein Hyperboloid bestimmt, auf dem es liegt. Durch Verbindung des Satzes von Hesse mit dem des Verfassers erhält man acht Brianchon'sche Sechsecke, vier Hyperboloide und zwei Brianchon'sche Punkte; je zwei Brianchon'sche Sechsecke liegen auf ein- und demselben Hyperboloide. Rg.

G. A. BORDIGA. Alcuni teoremi sulle quadriche analoghi a quello di Pascal nelle coniche. Ven. Ist. Atti (5) VII. 1253-1261.

Es werden hier einige Sätze über Flächen zweiter Ordnung abgeleitet aus dem bekannten Theoreme: „Wenn der Schnitt zweier Flächen dritter Ordnung eine auf einer Fläche zweiten Grades gelegene Curve sechster Ordnung enthält, so ist der Rest des Schnittes der ersten Flächen eine ebene Curve.“

W. St.

A. RASCHE. Untersuchung der Flächen zweiten Grades, welche durch zwei windschiefe Gerade gehen. Diss. Münster.

Eine sehr eingehende synthetische Untersuchung des im Titel genannten dreistufigen Systems von Flächen zweiten Grades. Von den Resultaten mögen hier folgende Platz finden. Die

∞^3 Polarebenen eines Punktes in Bezug auf alle Flächen des Systems haben einen Punkt gemeinsam, und umgekehrt bilden die ∞^3 Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen des Systems eine Ebene; so dass also auch die Mittelpunkte aller dieser Flächen eine Ebene bilden. Construirt man zu je zweien von drei Strahlen einer Regelschaar die ihnen gemeinsamen Lote, und legt man durch die Mitten der entstandenen drei Lote die zu ihnen senkrechten Ebenen, so erhält man drei Ebenen, welche sich im Mittelpunkte der Fläche zweiten Grades schneiden, die von der Regelschaar erzeugt wird. Die Axen aller ∞^3 durch zwei Gerade gehenden Flächen zweiten Grades bilden einen Complex zweiten Grades. Durch je zwei Punkte des Raumes gehen drei dem System dieser ∞^3 Flächen angehörige orthogonale Hyperboloide. Die Mittelpunkte der Rotationsflächen des Systems erfüllen zwei rechtwinklige Gerade. Der Ort der Scheitel der eigentlichen Paraboloide des Systems ist eine geradlinige Fläche dritter Ordnung, die das gemeinsame Lot der beiden das System erzeugenden Geraden zur Doppelpunktslinie hat. Scht.

O. Rupp. Ueber die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln. Wien. Ber. LXXXVI. 909-918.

Für die Untersuchung wird der folgende geometrische Satz verwendet: „Die Geraden, welche zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 in vier harmonischen Punkten schneiden, berühren einen Kegelschnitt K_3. Die Tangenten von K_1 und K_2 in den vier Grundpunkten der Kegelschnitte sind auch Tangenten von K_3, und ebenso ist auch das beiden Kegelschnitten gemeinsame Tripel ein Tripel bezüglich K_3. Der dem Kegelschnitt K_3 in Bezug auf K_2 polare Kegelschnitte K_4 geht durch die Grundpunkte a, b, c, d und besitzt ebenfalls als Tripel das Dreieck mnp." Indem nunmehr für K_1 der imaginäre Kugelkreis im Unendlichen, für K_2 der unendlich ferne Kegelschnitt einer Fläche zweiten Grades gewählt wird, ergeben sich folgende Sätze:

„Die Ebenen, welche durch einen beliebigen Punkt im Raume

gehen und eine gegebene Fläche zweiten Grades in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, umhüllen einen Kegel zweiten Grades, dessen Axen zu jenen der gegebenen Fläche parallel sind, und dessen Focallinien auf den Kreisebenen der gegebenen Fläche senkrecht stehen."

„Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller auf einer Fläche zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln ist ein mit dieser Fläche concentrischer, coaxialer und concyklischer Kegel zweiten Grades, d. i. ein Kegel, welcher mit der gegebenen Fläche die Kreisebenen gemein hat."

„Der geometrische Ort der Schnittpunkte auf einander senkrechter Erzeugender eines windschiefen Hyperboloids ist jener sphärische Kegelschnitt, welcher durch die zugehörige Monge'sche Kugel aus dem Hyperboloid ausgeschnitten wird." (Die Monge'sche Kugel bildet den Ort der Schnittpunkte je dreier auf einander senkrechter Tangentialebenen einer Fläche zweiten Grades.)

Zum Schluss wendet sich der Verfasser zu dem singulären Gebilde des hyperbolischen Paraboloids und zeigt, welche Formen die obigen Sätze für eine derartige Fläche annehmen.

Schn.

A. Mannheim. Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. Résal J. (3) VIII. 167-173.

Es sei m ein Punkt in einer Fläche zweiten Grades, und die Tangentialebene in ihm schneide die Axen in den Punkten x, y, z. Zieht man in dem Dreieck xyz durch m parallele Grade zu den Seiten des Dreiecks, so bilden diese mit den Strahlen mx, my, mz drei Paar conjugirter Durchmesser der Indicatrix, und die Aufgabe, die Axen derselben zu construiren, ist darauf zurückgeführt, aus zwei Paaren conjugirter Durchmesser eines Kegelschnitts seine Axen durch Construction herzustellen. Diese Axen stehen mit den Punkten m, x, y, z in interessanten Relationen. Legt man nämlich durch diese vier Punkte eine gleich-

seitige Hyperbel, so laufen die Axen der Indicatrix parallel den Asymptoten dieser Hyperbel. Andererseits sind die Axen der Indicatrix Tangenten der Parabel, welche dem Dreieck x, y, z eingeschrieben ist, und welche zur Directrix die Gerade hat, die den Punkt m mit dem Fusspunkt des Lotes vom Centrum der Fläche auf die Tangentialebene verbindet.

Im Anschluss an diese geometrischen Beziehungen wird der Satz entwickelt, dass die drei Normalen N, N', N'' der drei homofocalen Flächen, welche durch den Punkt m gehen, durch die Hauptebenen in proportionale Abschnitte geteilt werden. Sind diese Durchschnittspunkte bezüglich a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', so steht das Krümmungscentrum μ_1 auf der Normale N zu a, b, c in derselben Beziehung, wie der Punkt m zu a', b', c'; das andere Krümmungscentrum μ_2 aber, welches auf N gelegen ist, hat dieselbe Beziehung zu a, b, c, wie der Punkt m zu den Punkten a'', b'', c''.

Hieraus wird folgende Construction der Krümmungscentra für den Punkt m gewonnen. Durch die Punkte a, a', a'' ziehe man perpendiculäre Ebenen bezüglich zu N, N', N''; diese Ebenen schneiden sich in einem Punkte α. In derselben Weise führen die Punkte b, b', b'' zu einem Punkte β. Die Projectionen der Geraden $\alpha\beta$ auf die Hauptschnitte (NN') und (NN'') schneiden die Normale N in den Krümmungscentren. Dieselbe Gerade $\alpha\beta$ führt zu den Krümmungscentren der beiden anderen homofocalen Flächen, welche durch m bestimmt sind. Construirt man daher in der obigen Form aus den Punkten a, a', a'' den Punkt α, aus b, b', b'' den Punkt β und aus c, c', c'' den Punkt γ, so liegen die drei Punkte α, β, γ in ein und derselben Geraden Δ, und die Projectionen von Δ auf die drei Ebenen, welche die drei Normalen N, N', N'' zu je zweien bestimmen, treffen diese Normalen in den Krümmungscentren der drei homofocalen Flächen. Schn.

G. V. Peschka. Neue Eigenschaften der Normalenflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte. Wien. Ber. LXXXV. 381-407.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung früherer Publicationen des Verfassers, der sich seit langer Zeit mit Problemen der vorliegenden Art beschäftigt. (Man vergl. die Arbeiten: „Beitrag zur Theorie der Normalenflächen“ Wien. Ber. LXXXII. 1880, „Normalenfläche einer Developpabeln längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche“ Wien. Ber. LXXXIII. 1881, „Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihrer Schnitte mit einer andern krummen Fläche“ Wien. Ber. LXXXIV. 1881, s. F. d. M. XII. 509, 526; XIII. 515.).

Wie ersichtlich, ist die zu untersuchende Fläche identisch mit der Normalenfläche des Tangentenkegels an dem gegebenen ebenen Schnitte. Zunächst wird die Ebene desselben vollkommen allgemein, später senkrecht zu einer Hauptebene gewählt. Während im ersten Falle die Fläche als Doppelcurve eine eigentliche Raumcurve dritter Ordnung besitzt, ist diese für den herangezogenen Specialfall in einen Kegelschnitt und eine Gerade ausgeartet, welche sich in einem Punkte treffen. Ausserdem schneidet der Doppelkegelschnitt die Leitcurve und steht senkrecht zur ausgezeichneten Hauptebene. Als Ordnung findet sich 4.

Aus der grossen Reihe der rein geometrisch entwickelten Sätze führen wir noch die folgenden an:

a) für die Fläche eines beliebigen Leitkegelschnitts:

„Die Cuspidalcurve der doppelt berührenden Developpablen ist eine cubische Parabel.“

„Eine jede doppeltberührende Ebene der Normalenfläche wird von sämmtlichen andern doppeltberührenden Ebenen in Geraden geschnitten, welche eine Parabel umhüllen.“

„Alle doppeltberührenden Ebenen schneiden die Fläche in Kegelschnitten, und umgekehrt. Die Mittelpunkte dieser sämmtlichen Kegelschnitte sind auf jener Geraden gelegen, welche durch den Mittelpunkt des Leitkegelschnittes geht und zur Ebene desselben senkrecht steht.“

„Die Ebenen aller dieser Kegelschnitte schneiden die Erzeugenden der Normalenfläche in ähnlichen Punktreihen.“

„Die Punkte der Doppelcurve C_3 werden aus sämmtlichen

Erzeugenden der Normalenfläche durch projectivische Ebenenbüschel projicirt."

„Die Orthogonalprojectionen der vier Torsallinien einer Normalenfläche auf die Ebene des Leitkegelschnitts sind die von der Projection des Kegelscheitels aus gezogenen Normalen des Leitkegelschnitts."

b) für den angezogenen Specialfall:

„Die Paare von Erzeugeuden, welche sich in Punkten des Doppelkegelschnittes schneiden, treffen die Doppelgerade in conjugirten Punkten einer Involution."

„Die Normalenfläche besitzt vier Torsallinien, von welchen zwei immer 'reell sind, und zwar sind dies jene Normalen des Leitkegels in den Endpunkten derjenigen Axe des Leitkegelschnitts, welche gleichzeitig in der oben genannten Hauptebene liegt."

„Die der Normalenfläche doppelt umschriebene Developpable ist von der dritten Klasse und zerfällt in ein Ebenenbüschel und einen parabolischen Cylinder. Die Axe des ersteren ist die Doppelgerade; die Erzeugenden des zweiten stehen auf der zur Ebene des Leitkegelschnitts senkrechten Hauptebene des Leitkegels normal, sind mithin zu der Ebene des Leitkegelschnitts parallel."

Da auf jeder Erzeugenden drei Punkte mit ihren Tangentenebenen, nämlich 1) der Schnittpunkt mit dem Leitkegelschnitt, 2) der Schnittpunkt mit der Doppelgeraden, 3) der unendlich ferne Punkt als gegeben betrachtet werden können, so ist damit in jedem vierten Punkt die Tangentenebene einfach construirbar."

Den Schluss der Abhandlung bildet die Untersuchung der Normalenfläche eines Kegels längs eines Querschnittes, welcher zu einer Focallinie senkrecht steht. Für die Doppelcurve ergiebt sich das Resultat:

„Die horizontale Projection eines Teils der Doppelcurve ist ein Kegelschnitt, welcher durch den zweiten (nicht auf der ausgezeichneten Focallinie liegenden) Brennpunkt F des Leitkegelschnitts und durch den vierten harmonischen Punkt zu den beiden

Brennpunkten und dem Schnittpunkte der Hauptaxe mit der Directrix geht.“ Rg.

A. ADLER. Ueber Strictionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades. Wien. Ber. LXXXV. 369-380.

Auf synthetischem Wege werden die Strictionslinien der beiden Regelschaaren eines Hyperboloids construirt, und es wird nachgewiesen, dass dieselben Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species sind. Zum Schlusse werden die Charaktere der Strictionslinie einer Regelschaar dritten Grades angegeben.

W. St.

H. THIEME. Zur Construction des Polarsystems einer Fläche dritter Ordnung. Klein Ann. XX. 144-146.

W. St.

L. GEISENHEIMER. Ueber den Mittelpunkt der Raumcurven dritter Ordnung. Schlömilch Z. XXVII. 321-329.

Anschliessend an die Untersuchungen Schröter's in seiner „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc.“ über die Durchmesser der cubischen Raumcurve giebt der Verfasser eine Definition des Mittelpunktes der Curve. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte in den Schmiegungsebenen, deren Tangenten von den übrigen Schmiegungsebenen ausgeschnitten werden, liegen auf einem Kegelschnitte $\mu^{(2)}$, in dessen Ebene drei Durchmesser der Curve liegen. Sie treffen einander in einem Punkte, welcher Mittelpunkt von C^3 genannt wird. Der Verfasser teilt eine Reihe von Eigenschaften dieses Punktes bezüglich der cubischen Raum-

W. St.

A. Hurwitz. Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung. Klein Ann. XX. 135-138.

„Liegen die acht Ecken zweier Tetraeder auf einer Raumcurve dritter Ordnung E, so sind die acht Seitenflächen dieser Tetraeder Schmiegungsebenen einer zweiten Raumcurve dritter Ordnung U; es giebt dann, ausser jenen zwei, noch unzählig viele andere Tetraeder, welche der Raumcurve E ein-, der Raumcurve U umschrieben sind, und zwar ist jeder Punkt der ersten Raumcurve Eckpunkt eines dieser unzählig vielen Tetraeder.“ Diesen Satz fand der Verfasser 1875, während er als Secundaner Reye's Geometrie der Lage in sich aufnahm, und teilte ihn dann dem Referenten, seinem damaligen Lehrer, mit. Später hat der Verfasser den Satz in einem andern Zusammenhange, nämlich in seiner Note „über unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schliessungsprobleme“ veröffentlicht. Hier aber ist der ursprüngliche Secundanerbeweis mitgeteilt, der sich genau an die in der reinen Geometrie der Lage übliche Behandlungsweise der Raumcurven dritter Ordnung anschliesst. Es wird nämlich, wenn $A, B, C, D, A', B', C', D'$ die Ecken, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die Seitenflächen der beiden Tetraeder bedeuten, jeder Ebene durch A diejenige Ebene durch A' zugeordnet, welche sie in einer Secante der Raumcurve schneidet. Die so in A und A' entstehenden collinearen Ebenenbündel schneiden die Ebenen α' bez. α in zwei collinearen Strahlenfeldern, welche durch die Verbindungsebenen von sich treffenden und einander entsprechenden Strahlen eine zweite Raumcurve U erzeugen, indem jede solche Verbindungsebene Schmiegungsebene von U wird. Die Erkenntnis, dass die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ Schmiegungsebenen von U sein müssen, liefert den Beweis des ersten Teils des Satzes. Der zweite Teil des Satzes wird darauf gestützt, dass zwei Schmiegungsebenen von U, welche durch einen Punkt von E gehen, sich längs einer Secante von E schneiden.

Scht.

G. v. Escherich. Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündel. Wien. Ber. LXXXV. 526-533.

In einer früheren Arbeit (siehe F. d. M. IX. (1877) p. 546) hatte der Verfasser gezeigt, wie sich bei der Construction einer durch die erforderliche Zahl gegebener Punkte bestimmten algebraischen Fläche durch reciproke Flächenbündel die Maximalzahl der in die Knotenpunkte dieser Bündel aufzunehmenden Punkte angeben lässt. Nach der Bemerkung, dass grade diese Maximalzahl den gegebenen Punkten wirklich entnommen werden muss, wird insbesondere die Aufgabe behandelt, eine Fläche $(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche sich durch zwei reciproke Bündel n^{ter} und p^{ter} Ordnung erzeugen lässt, und bei welcher die Maximalzahl der verfügbaren Knotenpunkte $\gtreqless$ als die Zahl der Knotenpunkte in der Basis des Büschels p^{ter} Ordnung ist, zu construiren; und durch ein successives Verfahren, welches dem schon in der früheren Arbeit benutzten ähnlich ist, wird diese Aufgabe reducirt auf das folgende einfache Problem: Zu einem gegebenen Strahlenbündel einen reciproken derart zu construiren, dass jede Ebene des letzteren, welche einem von acht gegebenen Strahlen des ersteren entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt gehe. Eine ausführlichere Darlegung des Gegenstandes beabsichtigt der Verfasser demnächst zu geben. V.

G. v. Escherich. Die Construction der algebraischen Curven und Flächen aus der Anzahl der bestimmenden Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe. Wien. Ber. LXXXV. 893-906.

Die Arbeit knüpft an frühere Untersuchungen des Verfassers in den Bänden LXXV. und LXXXV. an, in denen die Möglichkeit der Darstellung algebraischer Flächen und Curven als Erzeugnisse linearer reciproker Systeme höherer Stufe nachgewiesen wird. Hieraus erwächst nun die Aufgabe, derartige Systeme aus

der zu ihrer Bestimmung notwendigen Anzahl von Punkten herzustellen. Es wird nun gezeigt, wie sich auf diesem Wege die Flächen zweiter bis vierter Ordnung mit alleiniger Hülfe von Zirkel und Lineal punktweise construiren lassen. Was die Construction der höheren Flächen anlange, so sei dieselbe mit den angegebenen Mitteln bisher nicht erreicht worden und auch nach den vorliegenden Methoden unmöglich. Doch behält sich der Verfasser vor, auch diese auf der Grundlage eines Satzes der Grassmann'schen Ausdehnungslehre in einer späteren Arbeit zu erledigen. Rg.

Th. Reye. Ueber das Strahlensystem zweiter Klasse sechster Ordnung von der ersten Art. Kronecker J. XCIII. 81-87.

In Band LXXXVI. p. 84 des Borchardt'schen Journals (siehe F. d. M. X. 1878. p. 420) hatte Herr Reye die algebraischen Systeme zweiter Ordnung ohne Brenncurven eingehend synthetisch behandelt, dabei aber noch die erste Art der Strahlensysteme zweiter Ordnung sechster Klasse ausschliessen müssen. Hier wird diese Lücke ausgefüllt und gezeigt, dass das genannte Strahlensystem, ebenso wie die Strahlensysteme zweiter Ordnung zweiter bis fünfter Klasse, durch die Schnittlinien homologer Tangentialebenen zweier collinear verwandter Flächen zweiter Klasse erzeugt werden kann. Aus dieser Erzeugungsart werden einerseits die von Herrn Kummer gefundenen Eigenschaften, andererseits auch noch manche neue Eigenschaften abgeleitet. Zu den letzteren gehören z. B. die, dass die sechs Strahlen, welche das Strahlensystem zweiter Ordnung sechster Klasse auf jede Ebene wirft, immer sechs Tangenten eines und desselben Kegelschnitts sind, und dass dieses Strahlensystem in einem tetraedralen Strahlencomplex zweiten Grades liegt. Statt des genannten Strahlensystems nimmt jedoch der Verfasser das ihm dual entsprechende Strahlensystem als Object seiner Untersuchung. Ausser den Resultaten, welche aus den schon erwähnten durch duale Uebertragung hervorgehen, mögen hier noch folgende Platz finden.

Ein Strahlensystem zweiter Klasse sechster Ordnung kann aus zwei collinearen Flächen zweiter Ordnung durch Verbindung homologer Punkte auf ∞^2 Weisen erzeugt werden. Die Brennfläche eines solchen Strahlensystems ist vierter Klasse, dasselbe hat, wie auch Kummer an dem reciproken System gezeigt hat, die Constantenzahl 22. Die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente der collinearen Räume, welche den das Strahlensystem enthaltenden tetraedralen Strahlencomplex erzeugen, sind die Flächen, Kanten und Ecken eines Tetraeders, und die sechs Kanten dieses Tetraeders sind Doppelstrahlen des Strahlensystems, während die vier Ebenen dieses Tetraeders singuläre Ebenen sind, indem sie unendlich viele eine Curve vierter Klasse umhüllende Strahlen enthalten. Weitere Betrachtungen beziehen sich auf den Zusammenhang des Strahlensystems mit zwei anderen Strahlensystemen, welche dadurch hervorgerufen werden, dass jede der erzeugenden Flächen eine Regelschaar ist, die durch ihre Leitschaar wiederum eine Regelschaar erzeugt. Dann wird die Gesammtheit der Normalen einer Fläche zweiter Ordnung als ein sehr specielles Strahlensystem von der untersuchten Art erkannt. Schliesslich wird der Fall betrachtet, dass zwei collineare Flächen n Punkte entsprechend gemein haben. Dann zerfällt das Strahlensystem in die n Strahlenbündel, welche die n Punkte zu Scheiteln haben, und in ein Strahlensystem zweiter Klasse $(6-n)^{\text{ter}}$ Ordnung. Scht.

W. Stahl. Ueber das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Kronecker J. XCII. 172-180.

Der Verfasser hatte (Borchardt J. XCI.) das Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse durch eine sehr einfache Construction erzeugt, die auch hier von Herrn Voss (F. d. M. XIII. 1881. p. 650) ausführlich auseinander gesetzt ist. In der vorliegenden Abhandlung wird die Construction des Strahlensystems zweiter Ordnung zweiter Klasse auf eine Weise ausgeführt, die aus der dort angegebenen durch Specialisirung hervorgeht. Man hat nämlich die bei der Construction erwähnte erzeugende Correla-

tion zweier auf derselben Ebene befindlichen ebenen Systeme derartig ausarten zu lassen, dass einem beliebigen Strahle des einen Systems ein singulärer fester Punkt im anderen System entspricht, und einem durch den singulären Punkt gehenden Strahle in dem einen System jeder Punkt eines zugeordneten Strahles entspricht, der durch den singulären Punkt im anderen System geht. Die aus dieser Specialisirung hervorgehende Construction führt den Verfasser dann auch zu der Construction der fünf andern Systeme, welche mit dem betrachteten System dieselbe Brennfläche haben, ferner zu Beziehungen zwischen den sechs Systemen und überhaupt zu den meisten Sätzen, welche für die Strahlensysteme zweiter Ordnung zweiter Klasse durch die Arbeiten der Herren Kummer, Klein, Reye, Schur, Caporali und Anderer gefunden sind. Eine Schlussbemerkung bespricht den Zusammenhang zwischen der Construction des Verfassers und der Reye'schen Construction. Scht.

W. Stahl. Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades. Kronecker J. XCIII. 215-237.

Die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung und Klasse mit sechzehn singulären Punkten und Ebenen, die von Herrn Klein (Zur Theorie der Liniencomplexe, Clebsch Ann. II. 198; siehe F. d. M. II. 1870. 605) in ihrer Eigenschaft als Singularitätenfläche des allgemeinen Complexes zweiten Grades analytisch untersucht war, wurde (Borchardt J. LXXXVI. 209, s. F. d. M. X. 1878. 419) dann auch von Herrn Reye mit dem Doppeltangenten-Systeme auf synthetischem Wege construirt. Hieran anknüpfend, giebt Herr Stahl in der vorliegenden Arbeit die Construction des Complexes zweiten Grades selbst, indem er namentlich die Lagen der zwölf Strahlen untersucht, welche, den sechs Fundamentalcomplexen angehörend, in einer Ebene liegen oder durch einen Punkt gehen. Diesen Betrachtungen gehen auf Flächenbüschel zweiten Grades bezügliche Hülfssätze voran, welche von Herrn Harnack bereits aufgestellt sind, aber hier synthetisch bewiesen werden. Weiterhin wird auch die Polaren-

theorie für den allgemeinen Complex zweiten Grades entwickelt, und im Zusammenhang damit die Schur'sche Erzeugungsart bewiesen, bei welcher der Complex zweiten Grades durch die ∞^3 Schnitte entsprechender Elemente zweier reciproker Bündel linearer Complexe entsteht. Scht.

F. Schur. Ueber eine besondere Klasse von Flächen vierter Ordnung. Klein Ann. XX. 254-297.

Nachdem der Verfasser (in Klein Ann. XVIII. p. 1-32, siehe F. d. M. XIII. 1881. 490) durch Zusammenstellung von vier collinearen räumlichen Ebenensystemen eine gewisse Gattung von Flächen vierter Ordnung, welche von 33 Constanten abhängen, construirt und gezeigt hat, dass jede solche Fläche eine eindeutige Transformation in sich zulässt, stellt er nun die Frage nach solchen collinear erzeugten Flächen vierter Ordnung, für welche die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich eine collineare ist. Gewissen Curven c_6, resp. g_6 von F^4 müssen dann wieder gleichartige Curven entsprechen, während im Allgemeinen einer c_6 oder g_6 eine Curve 14ter Ordnung zugehört. Hieraus muss man schliessen, dass die letztere Curve zerfällt und als Bestandteil acht feste Gerade von F^4 enthält. Es wird nun die Anordnung dieser zweimal acht Geraden näher untersucht und folgendes Resultat gewonnen:

„Die allgemeinste Fläche vierter Ordnung, welche sich durch vier collineare räumliche Systeme so erzeugen lässt, dass die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich eine collineare wird, erhält man dadurch, dass man durch die sechzehn Schnittlinien der Seitenflächen zweier einfach hyperboloidisch liegender Tetraeder irgend eine Fläche vierter Ordnung legt; die durch die vier hyperboloidischen Lagen bedingten Beziehungen der Seitenflächen der beiden Tetraeder gehen dabei durch cyklische Vertauschung aus einander hervor. Die Fläche enthält noch sechzehn andere gerade Linien, welche ebenfalls die Schnittlinien zweier vierfach hyperboloidisch liegender Tetraeder sind. Diese Fläche kann im Ganzen auf vier Arten collinear erzeugt werden,

und allen vier Erzeugungen gehört dieselbe collineare Transformation zu; sie führt die Seitenflächen jener vier Tetraeder cyklisch in einander über."

Es werden nun solche F^4 aufgesucht, welche eine collineare Transformation in sich möglichst oft zulassen, was mit der Construction zweier Tetraeder, welche möglichst oft hyperboloidisch liegen, auf das engste zusammenhängt. Die Untersuchung wendet sich deshalb zu solchen Tetraedern, und es wird gezeigt, dass zwei Unterarten solcher Lagen existiren. Die eine erhält man durch zwei Tetraeder, welche neunfach hyperboloidisch liegen und einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sind; die andere durch zwei Tetraeder, welche achtfach hyperboloidisch liegen und zwei Quadrupel harmonischer Ebenen bilden. So ergeben sich zwei Arten von F^4 mit folgenden Eigenschaften:

Erstens: „Jede Fläche vierter Ordnung durch die sechzehn Schnittlinien der Seitenflächen zweier neunfach hyperboloidisch liegender Tetraeder enthält im Ganzen 52 gerade Linien. Dieselben gruppiren sich noch fünfmal zu je sechzehn zu den Schnittlinien der Seitenflächen zweier Tetraeder. Von diesen Tetraedern liegen drei vierfach und zwei sechsfach hyperboloidisch. Die Fläche geht durch vierundzwanzig Collineationen in sich über; drei von ihnen von der Periode vier entsprechen je vier collinearen Erzeugungen der Fläche; vier anderen von der Periode drei gehören als Axen vier ausgezeichnete Gerade der Fläche zu. Durch jede dieser vier Geraden gehen sechs Ebenen, welche die Fläche in vier Geraden schneiden; durch weitere zwölf gehen nur zwei solche Ebenen und durch die übrigen sechsunddreissig je vier. Alle diese Geraden und Ebenen können reell sein."

Zweitens: „Legt man durch die sechzehn Schnittlinien zweier Quadrupel harmonischer Ebenen eine Fläche vierter Ordnung, so enthält dieselbe noch zweiunddreissig andere Linien, welche sich ebenfalls als die Schnittlinien von zweimal zwei Quadrupeln harmonischer Ebenen darstellen; die sechs Axen dieser dreimal zwei Quadrupel bilden die gegenüber liegenden Kanten eines Tetraeders. Die Fläche lässt sich zwölfmal so durch col-

lineare ebene Systeme erzeugen, dass die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich eine lineare wird."

Die erste Unterart führt noch auf eine specielle Form von Flächen vierter Ordnung, welche vierundsechzig gerade Linien enthalten und durch 1152 Collineationen in sich übergehen.

W. St.

H. Schröter. Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species. Kronecker J. XCIII. 132-176.

Die Raumcurve, welche in diesem Aufsatze ausführlich betrachtet wird, entsteht als gemeinschaftlicher Schnitt dreier orthogonaler Hyperboloide. Es sei ein Tetraeder mit den Ecken 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 gegeben; durch je zwei Gegenseiten desselben lässt sich eine Regelschaar eines orthogonalen Hyperboloids als Schnitt je zweier durch diese Seiten gelegten auf einander senkrechter Ebenen bestimmen. Diese drei Hyperboloide gehören, wie hier bewiesen wird, einem Büschel an, d. h. sie schneiden sich in einer Raumcurve vierter Ordnung $C^{(4)}$. Der Ort der Punkte, von welchen aus gesehen, jedes der drei Paar Gegenkanten eines gegebenen Tetraeders unter rechtem Winkel erscheint, ist eine Raumcurve $C^{(4)}$ vierter Ordnung. Es folgt hieraus: Jede Ebene, welche auf einer Kante des Tetraeders normal steht, begegnet unserer $C^{(4)}$ in vier Punkten eines Kreises. Die Fusspunkte 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 der Höhen des Tetraeders in den Seitenflächen desselben liegen auf $C^{(4)}$. In jeder Ecke des Tetraeders schneiden sich drei Seitenflächen desselben und bilden ein Dreikant, dessen Höhenstrahl die Tangente der Raumcurve $C^{(4)}$ in dieser Ecke ist. Nun ergiebt sich ein anderes Hyperboloid, welches $C^{(4)}$ enthält. Das gleichseitige Hyperboloid, auf welchem die vier Höhen des Tetraeders liegen, geht durch $C^{(4)}$, und die Berührungsebenen am Höhenhyperboloid in den Tetraederecken sind die Schmiegungsebenen von $C^{(4)}$ in diesen Punkten.

Mit Hülfe der acht nun bekannten Punkte von $C^{(4)}$ werden neue Punkte der Curve construirt und eine grosse Reihe von Sätzen über die gegenseitige Lage von Punktgruppen auf der

Curve abgeleitet. So ergiebt sich: Die beiden Tetraeder 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 und 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 sind auf vier verschiedene Arten in hyperboloidischer Lage. Das Poltetraeder O, O_1, O_2, O_3 der Curve und das ursprüngliche Tetraeder 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 liegen auf vierfache Art perspectivisch. Die vier Centren liegen auf $C^{(4)}$ und liefern ein drittes Tetraeder, welches mit den beiden ersten ein sogenanntes desmisches System bildet.

Der Verfasser schliesst mit den Worten: „Indem ich hiermit die Untersuchung unserer Raumcurve $C^{(4)}$ vorläufig abschliesse, möchte ich nur noch auf die Ermittelung des particulären Charakters unserer $C^{(4)}$ gegenüber der allgemeinen Raumcurve vierter Ordnung erster Species die Aufmerksamkeit der Geometer lenken.“

Dem Berichterstatter möge es gestattet sein, hieran folgende Bemerkung zu knüpfen. Die hier betrachtete Curve ist in sofern von keinem particulären Charakter, als jede allgemeine Raumcurve vierter Ordnung erster Species mit reellem Poltetraeder durch eine collineare Raumtransformation auf unendlich viele Arten in die specielle Form der von Herrn Schröter betrachteten Curve übergeführt werden kann. Betrachten wir eine beliebige $C^{(4)}$ und bestimmen zu einem beliebigen Punkte 𝔄 derselben diejenigen drei Punkte 𝔅, ℭ, 𝔇 von $C^{(4)}$, deren Verbindungsgerade mit 𝔄 gegenüber stehende Kanten des zu $C^{(4)}$ gehörenden Poltetraeders treffen; fügen wir die vier Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 hinzu, in welchen die Seitenflächen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Tetraeders 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 die Curve noch schneiden, so liegen die vier Strahlen $\overline{𝔄𝔞}$, $\overline{𝔅𝔟}$, $\overline{ℭ𝔠}$ und $\overline{𝔇𝔡}$ auf einem Hyperboloid, welches $C^{(4)}$ enthält. Je zwei gegenüber stehende Kanten des Tetraeders 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 liegen ebenfalls auf einem durch $C^{(4)}$ gehenden Hyperboloide. Somit sind vier durch $C^{(4)}$ gelegte Hyperboloide bestimmt. Diese Flächen sowie die beiden Tetraeder liefern unter einander und in ihren Beziehungen zu $C^{(4)}$ dieselben projectiven Eigenschaften, welche die in gleicher Art bezeichneten Flächen und Tetraeder des Herrn Schröter unter einander und zu der von ihm betrachteten Raumcurve zeigen. Bringt man nun die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und die Strahlen

$\overline{\mathfrak{Aa}}$, $\overline{\mathfrak{Bb}}$, $\overline{\mathfrak{Cc}}$, $\overline{\mathfrak{Dd}}$ zum Schnitt mit einer beliebigen Ebene ν des Raumes, so erhält man vier Gerade a, b, c, d und vier Punkte A, B, C, D, welche in dieser Folge die Polaren und Pole eines in ν hierdurch bestimmten Polarsystems sind. Durch eine collineare Raumtransformation, mittels welcher ν in die unendlich ferne Ebene und das auf ν befindliche Polarsystem in das Polarsystem des unendlich fernen imaginären Kreises übergeführt wird, geht $C^{(4)}$ in die specielle von Herrn Schröter betrachtete Form über. Von den vier Hyperboloiden werden drei orthogonal, das vierte gleichseitig. Die Raumtransformation ist immer reell durchführbar, sobald das Polarsystem in ν keine reelle Ordnungscurve besitzt, was durch passende Lage von ν auf unendlich viele Arten erreicht werden kann. W. St.

A. Adler. Ueber Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art. Wien. Ber. LXXXVI. 919-936, 1201-1211, 1212-1229.

Diese Raumcurve C^4 wird mit Hülfe der projectiven Abbildung derselben auf einen Kegelschnitt K studirt. Jeder Secante von C^4 entspricht so eindeutig eine Gerade der Ebene des Kegelschnitts K, und jeder Regelfläche, deren Erzeugende Secanten von C^4 sind, das Tangentensystem einer Curve der Ebene von K. So entsprechen den dreifachen Secanten von C^4 die Tangenten eines Kegelschnitts T; den Geraden einer Regelfläche dritter Ordnung, welche eine gegebene Secante von C^4 treffen, entsprechen in der Ebene K die Geraden eines Büschels erster Ordnung. Nun findet sich, dass die der gegebenen Secante von C^4 zugehörende Sehne von K und der Mittelpunkt des Strahlenbüschels entsprechende Elemente eines Polarsystems k sind, in welchem K und T einander entsprechen. Hieraus ergiebt sich eine Reihe von interessanten Sätzen über die C^4. Die Bilder der drei durch einen Punkt gehenden Secanten von C^4 bilden ein Polardreieck von k. Die Bilder von vier Punkten der Raumcurve, welche in einer Ebene liegen, bilden ein vollständiges Viereck von der Eigenschaft, dass je zwei Gegenseiten hinsichtlich k einander conjugirt sind.

Die Seiten des gemeinsamen Poldreiecks x, y, z von K und T sind die Bilder der drei einzigen Secanten von C^4, welche gleichzeitig Schnitte von Schmiegungsebenen sind. Diese Secanten werden „Axen" der C^4 genannt. Die drei Axen der C^4 bilden mit den drei einfachen Leitlinien der drei Regelflächen dritter Ordnung, welche sie mit C^4 bestimmen ein Poltetraeder, der einzigen durch C^4 legbaren Regelfläche zweiten Grades. Je zwei Gegenseiten dieses Tetraeders bestimmen eine geschaarte Involution, in welcher C^4 sich selbst entspricht.

Es wird dann in der zweiten Abhandlung das System der doppelt-berührenden Tangentialebenen von C^4 untersucht. Jede einfache Leitlinie einer durch C^4 gelegten Regelfläche dritter Ordnung ist der Schnitt zweier Doppeltangentialebenen, und umgekehrt. Die nähere Betrachtung dieser Geraden führt dann auf den interessanten Satz: „Es ist möglich, vier räumliche Polarsysteme so zu construiren, dass jeder Secante von C^4 eine einfache Leitlinie einer durch C^4 gelegten Regelfläche dritter Ordnung entspricht, und dass zu den Punkten von C^4 die Doppeltangentialebenen derselben Curve gehören."

In der ersten und dritten Abhandlung werden noch specielle Formen von C^4, unter anderen die Strictionslinie des Hyperboloids untersucht, und es wird eine Einteilung der Curven in Arten vorgenommen. W. St.

E. Weyr. Sulle curve gobbe razionali. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 250-251.

Einige auf rationale Raumcurven bezügliche Sätze, insbesondere für Curven sechster Ordnung, werden hier mitgeteilt. Hat eine Curve n^{ter} Ordnung eine $(n-2)$-fache Secante, und entsprechen die auf der Curve gedachten $(n-2)$ Punkte derselben projectiv den auf der Secante liegenden, so hat die Curve auch eine $(n-1)$-fache Secante. So hat eine Curve fünfter Ordnung stets eine vierfache Secante. Die allgemeine rationale Curve sechsten Grades hat sechs vierfache Secanten, welche die eine Hälfte der Doppelsechs einer Fläche dritten Grades bilden, während die

Geraden der andern Hälfte keine Punkte mit der Curve gemein haben. W. St.

Em. Weyr. Ueber Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve. Wien. Ber. LXXXV. 513-525.

Ist auf einer cubischen Raumcurve C_3 eine Involution n^{ten} Grades erster Stufe gegeben, so ist der Ort der Verbindungslinien je zweier einer Gruppe angehöriger Punkte eine Regelfläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Ebenen, welche man durch je drei einer Gruppe angehörige Punkte legen kann, sind Schmiegungsebenen einer Raumcurve J von der $\frac{(n-1)(n-2)^{\text{ten}}}{2}$ Klasse. Die Fläche F_6, welche für $n=4$ so entsteht, wird einer näheren Untersuchung unterworfen. Einige Eigenschaften von F_6 heben wir hervor. Die Erzeugenden von F_6 ordnen sich in Paare, welche sich so verhalten, wie die Paare eines Systems conjugirter Pole einer Curve dritter Ordnung. Jede Ebene von J ist dreifache Tangentialebene von F_6, und die drei Berührungspunkte liegen auf der Tangente von J. Jedes durch C_3 gehende Hyperboloid schneidet aus F_6 drei Erzeugende aus, welche die Elemente einer Involution dritten Grades zweiter Stufe bilden. Diese Elemententripel verhalten sich wie die Punkttripel einer allgemeinen Curve dritter Ordnung, welche in einer Geraden liegen. Ist F_6 eine Fläche sechster Ordnung mit einer dreifachen cubischen Curve, so ist F_6 geradlinig, und ihre Erzeugenden bestimmen auf C_3 ein symmetrisches Punktsystem dritten Grades. Auf eine solche F_6 lassen sich einige der gefundenen Sätze übertragen. Zum Schlusse werden specielle Involutionen auf C_3 betrachtet; insbesondere kann F_6 rational werden und endlich zerfallen in ein Hyperboloid und eine Fläche vierter Ordnung. W. St.

Em. Weyr. Sur les surfaces d'involution. Belg. Bull. (3) III. 472-485.

F. Folie. Rapport. Belg. Bull. (3) III. 460-461.

Neue Anwendungen der Methoden des Verfassers, um gleichzeitig die Involutionen und die Curven höherer Ordnung zu studiren. Mn. (Wn.).

D. Abzählende Geometrie.

H. SCHUBERT. Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems. Pr. Hamburg.

Bezeichnet x die Entfernung eines Punktes P der Geraden g von einem festen Punkte dieser Geraden, und haben x', x'' die analoge Bedeutung für die Geraden g' und g'', so wird durch eine in den Grössen x, x', x'' lineare Relation eine Beziehung zwischen den Punkten der drei Geraden festgelegt, vermöge welcher je zwei Punkten, die willkürlich auf zweien der Geraden angenommen werden, im Allgemeinen ein bestimmter Punkt der dritten Geraden correspondirt. Diese Correspondenz wird als eine „trilineare Verwandtschaft" bezeichnet. Da die erwähnte lineare Relation sieben Constante enthält, so hängt die trilineare Verwandtschaft von sieben Constanten ab, vorausgesetzt, dass die drei Geraden, die „Träger" der Verwandtschaft, als fest gegeben angenommen werden. Wenn man auch diese Geraden beliebig im Raume veränderlich denkt, so treten noch 3.4 Constanten hinzu, so dass das Gebilde Γ, welches aus drei Geraden und einer auf diesen liegenden trilinearen Verwandtschaft besteht, die Constantenzahl 19 besitzt. Es handelt sich nun in der vorliegenden Arbeit darum, die Zahl derjenigen Gebilde Γ zu bestimmen, welche gewissen 19-fachen Bedingungen genügen. Die zur Lösung dieser Aufgabe angewandten allgemeinen Methoden sind grösstenteils von dem Verfasser selber ausgebildet und in seinem Buche: „Calcül der abzählenden Geometrie" (Leipzig. Teubner. 1879) ausführlich dargelegt worden. Dieselben laufen darauf hinaus, die Anzahlen der geometrischen Gebilde, welche gegebenen Bedingungen genügen, auf andere leichter zu bestimmende

Anzahlen zurückzuführen, welche sich auf die sogenannten Ausartungen des betreffenden Gebildes beziehen. Es werden dementsprechend in der vorliegenden Arbeit nach einander die Ausartungen des Gebildes Γ, die Zurückführung der gesuchten Anzahlen auf die zu den Ausartungen gehörenden, sowie diese letzteren Anzahlen bestimmt. In einer Tabelle werden die auf Γ bezüglichen Zahlen, welche das letzte Ziel dieser Untersuchungen bilden, zusammen gestellt. Die Art der Resultate mag das folgende Beispiel zeigen: „Es giebt im Raume 489520 Tripel von Geraden, auf denen durch die Schnittpunkte von neunzehn Tripeln gegebener Ebenen, neunzehn Tripel entsprechender Punkte einer trilinearen Verwandtschaft entstehen.“ Alle diese Resultate lassen sich auch algebraisch interpretiren als Zahl der Lösungen bestimmter Gleichungssysteme. Diese Interpretation wird am Schlusse der Arbeit an mehreren Beispielen ausgeführt.

Hz.

H. Krey. Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten. Klein Ann. XIX. 497-517.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Bestimmung der Anzahl solcher Punktgruppen, welche, in festen Ebenen oder im Raume liegend, teils die Bedingung erfüllen, dass ihre Coordinaten gegebenen Gleichungen genügen, teils Grundbedingungen erfüllen, wo unter Grundbedingung einer Gruppe von ν Punkten jede Bedingung zu verstehen ist, welche entweder aussagt, dass einer der ν Punkte in einem gegebenen Punkte, auf einer gegebenen Geraden oder auf einer gegebenen Ebene liegt, oder aussagt, dass die Verbindungslinie zweier der ν Punkte eine gegebene Gerade trifft. Unter gewissen Voraussetzungen, die ausführlich discutirt werden, lässt sich diese Anzahl immer durch die Gradzahlen der gegebenen Gleichungen und durch die auf die Ausnahmepunkte bezüglichen Anzahlen ausdrücken. Ausnahmepunkte nennt der Verfasser solche feste Punkte der Ebene, für welche eine der gegebenen Gleichungen identisch verschwindet. Das Verfahren, welches zu den gesuchten Anzahlausdrücken führt,

ist die in der abzählenden Geometrie gebräuchliche, namentlich von Chasles, Zeuthen und dem Referenten angewandte allmälige Reduction der Anzahlen für complicirtere Bedingungen auf die Anzahlen für speciellere Bedingungen. So werden z. B. auf die Anzahlen für Punktgruppen, die nur Grundbedingungen erfüllen, die Anzahlen für solche Punktgruppen zurückgeführt, die ausser Grundbedingungen noch die Bedingung erfüllen, dass ihre Coordinaten einer gegebenen Gleichung genügen, u. s. w. bis zu den Anzahlen für Gruppen von ν Punkten, deren 2ν, bezw. 3ν Coordinaten 2ν, bezw. 3ν gegebene Gleichungen erfüllen. Als Hülfsmittel bei dieser Reduction benutzt der Verfasser Sätze, die er aus den verallgemeinerten Correspondenzformeln des Referenten ableitet, z. B. den folgenden Hülfssatz: „Sind die Punkte zweier Curven, eines x-Ortes und eines y-Ortes eindeutig auf einander bezogen, und coincidirt an c_{12} freien Stellen x mit dem entsprechenden y, bestimmt ferner die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, deren linke Seite für $x = y$ einfach verschwindet, für einen beliebig gegebenen Punkt y ξ bewegliche Punkte x des ersten Ortes, für einen beliebigen Punkt x η bewegliche Punkte y des zweiten Ortes, dann giebt es $\xi + \eta - c_{12}$ Paare von zusammengehörigen Punkten x, y, welche der Gleichung $\varphi = 0$ genügen.“ An die allgemeinen Betrachtungen schliesst der Verfasser die wirkliche Aufstellung der gesuchten Anzahlformeln in den Fällen, wo die Punktgruppe zwei Punkte in fester Ebene, drei Punkte in fester Ebene und zwei Punkte im Raume enthält. Schliesslich werden auch noch die Formeln angegeben, welche sich auf zwei Punkte beziehen, die auf einer festen punkt-allgemeinen Fläche liegen. Diese Formeln sind einerseits Verallgemeinerungen der Formeln für Punktepaare in fester Ebene, andererseits Specialisirungen der Formeln für Punktepaare im Raume, da zwei Bedingungen dann nur auszusagen haben, dass jeder Punkt auf der festen Fläche liegen soll. Von den vielen Anzahlformeln, die der Verfasser entwickelt, sei hier beispielsweise wenigstens eine angeführt. Zwischen den vier Coordinaten eines Punktepaars in fester Ebene mögen die vier Gleichungen

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_3(x, y) = 0, \quad f_4(x, y) = 0$$

bestehen. Die Gradzahlen dieser Gleichungen seien

$$\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3, \mu_4, \nu_4;$$

ferner sei α die Anzahl der Ausnahmepunkte. Dann ist die Anzahl der Punktepaare, deren Coordinaten jenen vier Gleichungen genügen, gleich

$$[\mu\mu\nu\nu]-(\alpha+1)\ [\mu\mu]-(\alpha+1)\ [\nu\nu]-[\mu\nu]+3[\mu] \\ +3[\nu]+6\alpha^2+18\alpha-6,$$

wo immer jede, i Buchstaben enthaltende eckige Klammer die Summe aller möglichen Producte von je i Factoren mit den i verschiedenen Indices 1, 2, 3, 4 bedeutet, z. B.

$$[\mu\mu\nu\nu] = \mu_1\mu_2\nu_3\nu_4+\mu_1\mu_3\nu_2\nu_4+\mu_1\mu_4\nu_2\nu_3+\mu_2\mu_3\nu_1\nu_4 \\ +\mu_2\mu_4\nu_1\nu_3+\mu_3\mu_4\nu_1\nu_2.$$

Um die Anwendung seiner Formel zu zeigen, leitet der Verfasser aus der eben mitgeteilten Formel den folgenden Satz ab: „Zu $\frac{1}{2}n(n+3)-4$ willkürlich in der Ebene gegebenen Punkten kann man auf $\frac{1}{8}(n-2)(n-4)(n^2-9)$ Arten ein Punktepaar so bestimmen, dass durch die $\frac{1}{2}n(n+3)-2$ Punkte noch eine dreifach unendliche Schaar von Curven n^{ter} Ordnung geht."

Scht.

O. Tognoli. Sulla teorica della involuzione. Batt. G. XX. 270-287.

Der Verfasser betrachtet zunächst auf ebenen Curven Involutionen, d. h. Schnittpunktsysteme, die von gegebenen Curvenbüscheln ausgeschnitten werden, wiederholt dabei die bekannte Formel

$$k = 2nm+2(p-1)-r$$

für die Zahl k derjenigen Curven eines Büschels von Curven m^{ter} Ordnung, welche eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung p^{ten} Geschlechts mit r Spitzen berühren, definirt dann mit Hülfe einer bilinearen Gleichung zwischen zwei Parametern den Begriff der

Projectivität zweier auf zwei festen Curven gelegenen Involutionen und gelangt so mit Benutzung der obigen Formel für k zu einer Formel, aus welcher sich durch Specialisirung der oft und auf verschiedenen Wegen bewiesene Satz von der Gleichheit des Geschlechts zweier projectiver, d. h. Punkt für Punkt eindeutig auf einander bezogener Curven ergiebt. Weiterhin verweilt der Verfasser bei der Ableitung und bei der Formulirung von Sätzen über Gradzahlen von Oertern, die durch die Paare entsprechender Elemente von ebenen und räumlichen Curven, sowie von Linienflächen erzeugt werden. Von diesen Sätzen, welche unmittelbar aus dem Correspondenzprincip folgen, sei hier folgender erwähnt: Verbindet man je zwei entsprechende Punkte zweier projectiver Involutionen, die auf zwei Curven n^{ter} und n'^{ter} Ordnung liegen, und $(nm-\gamma)^{\text{ten}}$ bezw. $(n'm'-\gamma')^{\text{ten}}$ Grades sind, so erhält man die ∞^1 Verbindungsstrahlen einer Linienfläche vom Grade

$$n(n'm'-\gamma')+n'(nm-\gamma).$$

Schliesslich behandelt der Verfasser eingehend ein Beispiel, das mit der eindeutigen Abbildung einer gewissen Fläche auf einer Ebene in engem Zusammenhang steht. Scht.

C. F. E. Björling. Om algebraiska rymdkurvors singulariteter och polardeveloppabelns karakterer.
Öfv. Stockh. 1881. 3-26.

Die Coordinaten einer Raumcurve, deren Anfang in dem zu charakterisirenden Curvenpunkte liegt, und für welche die x, y, z die Richtung der Tangente, Haupt- und Binormale haben, sind als rationale Functionen eines Parameters λ angenommen, deren gemeinsamer Nenner nicht mit λ verschwindet. Sind dann l, m, n die kleinsten Potenzexponenten der Zähler, so ist stets $l<m<n$, und im Allgemeinen $l=1$, $m=2$, $n=3$. Jeder höhere Wert bedingt eine Singularität. Statt der rationalen Brüche können offenbar auch beliebige convergente Reihen stehen, deren Anfangsterm allein massgebend ist. Es werden hiernach die Singularitätsfälle discutirt, dann Theorien von Salmon und Cayley,

bezüglich auf abzählende Geometrie, nach gleicher Methode behandelt. H.

C. F. E. Björling. Modelle von Raumcurven- und Developpabeln-Singularitäten. Lund. Gleerup.

Ankündigung und Beschreibung von acht Modellen, die dazu dienen sollen, die Singularitäten der Punkte algebraischer Raumcurven zu veranschaulichen. Bezeichnet man für einen Punkt O eines Raumcurvenzweiges mit (a, b, c), dass der Zweig in O gemein hat: a Punkte mit einer O enthaltenden beliebigen Ebene, b Punkte mit einer in O berührenden Ebene, und endlich c Punkte mit der Schmiegungsebene von O, so kann man das, was die acht Modelle darstellen sollen, kurz so angeben:

$$(1, 2, 3), \quad (1, 2, 4), \quad (1, 3, 4), \quad (1, 3, 5), \quad (2, 3, 4), \quad (2, 3, 5),$$
$$(2, 4, 5), \quad (2, 4, 6).$$

Die Fäden der Modelle sind die Tangenten der Raumcurve, so dass jedes Modell eigentlich die Developpable darstellt, deren Cuspidalcurve die gemeinte Raumcurve ist. Damit die betreffende Singularität deutlich hervortrete, sind die beiden durch den singulären Punkt gebildeten Teile der Developpabeln von verschiedenfarbigen Fäden verfertigt. Den Schluss des Ankündigungsblattes bildet eine tabellarische Zusammenstellung der Charaktere der acht modellirten Raumcurven nach den Bezeichnungen von Cayley und Salmon. Da der Referent die Modelle nicht gesehen hat, so kann er kein Urteil darüber abgeben, ob dieselben correkt und anschaulich sind. Scht.

Vaneček. Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure de tous les degrés. C. R. XCIV. 210-212.

Was der Verfasser „Erzeugung“ der Flächen oder Raumcurven aller Grade nennt, besteht einfach in Folgendem. Wenn eine bewegliche Ebene einen ein- oder zweistufigen Ort n^{ten} Grades beschreibt, so durchläuft der Diagonalen-Schnittpunkt des auf

dieser Ebene durch die vier Kanten *AB*, *BC*, *CD*, *DA* eines Fundamental-Tetraeders *ABCD* ausgeschnittenen Vierecks einen gleichstufigen Punktort, dessen Gradzahl dreimal so gross ist, als der Grad n des Ebenen-Orts, wie sich übrigens aus den Incidenzformeln des Raumes unmittelbar ergiebt. Ebenso durchläuft die bewegliche Ebene einen Ort vom Grade $3n$, sobald der genannte Diagonalenschnittpunkt einen Ort vom Grade n durchläuft. Diese Gradzahlen $3n$ werden natürlich um k, bezw. $2k$ Einheiten vermindert, wenn k Tetraeder-Ebenen oder k Tetraeder-Ecken dem erzeugenden Orte angehören, und dieser Ort zweistufig, bezw. einstufig ist. Scht.

Vaněček. Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. C. R. XCIV. 1463-1465, 1583-1586; XCV. 1049-1051, 1146-1179.

Es giebt in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung bekanntlich vier Polartetraeder *ABCD*, von denen zwei Ecken *A* und *B* je auf einer gegebenen Geraden und die beiden andern Ecken *C* und *D* je auf einer gegebenen Ebene liegen. Hieraus ergiebt sich für jeden Kenner der neueren Abzählungsmethoden unmittelbar, dass wenn von jenen vier Ecken *A*, *B*, *C*, *D* die beiden Ecken *A* und *B* Raumcurven a^{ten} und b^{ten} Grades beschreiben, und die Ecke *C* eine Fläche c^{ten} Grades beschreibt, die Ecke *D* eine Raumcurve vom Grade $4abc$ durchlaufen muss. Nachdem der Verfasser dies bewiesen hat, sieht er darin ein Mittel, um zu einer Transformation einer Raumcurve a^{ten} Grades in eine Raumcurve vom Grade $4abc$ oder einer Fläche c^{ten} Grades in eine Fläche vom Grade $4acd$ zu gelangen. Weiterhin discutirt der Verfasser einige besondere Lagen und Singularitäten der erzeugenden Gebilde. Scht.

J. Möller. Ueber die Transformation einer gewundenen Curve durch sphärische Inversion. Lund Årsskrift. XVIII.

Untersuchung der Veränderungen, welche die Singularitäten und Charaktere einer Raumcurve durch sphärische Inversion erleiden. Werden die Charaktere derselben mit m, n, r, α, β, u. s. w., und diejenigen der aus derselben durch solche Transformation gebildeten Curve mit m', n', r', u. s. w. bezeichnet, so werden im Allgemeinen

$$m' = 2m, \quad n' = n+3m, \quad r' = r+2m,$$
$$\alpha' = \alpha+4m, \quad h' = h+m(m-1),$$
$$D' = D+\frac{1}{2}m(m-1),$$
$$g' = g+\frac{1}{2}m(9m+6n-17),$$
$$x' = x+2m(m+r-2),$$
$$y' = y+2m(m+r-3).$$

Die Modificationen, welche diese Resultate bei specieller Lage der Curve erfahren, werden auch sehr vollständig untersucht und die Ergebnisse zuletzt auf die cubischen Kegelschnitte angewendet. E.

R. Sturm. Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln.
Klein Ann. XIX. 487-488.

Der Verfasser hatte in den Dissertationen von Herrn Boule (Göttingen 1872) und von Herrn Ed. Weyr (Prag 1873), welche Beide Raumcurven sechster Ordnung behandeln, gefunden, dass das Geschlecht einer Curve, welche auf einem Kegel zweiter Ordnung liegt, durch die Spitze desselben b-mal geht und jede Kante desselben noch a-mal trifft, auf ziemlich umständliche Weise abgeleitet war. Er unternimmt es deshalb hier, auf einfachere Weise jenes Geschlecht abzuleiten und zugleich auch das Resultat dahin zu verallgemeinern, dass der Kegel allgemein die Ordnung n, die Klasse m und das Geschlecht p hat. Er findet das Resultat mit Hülfe der allgemeinen Coincidenzformeln des Referenten ohne jede Schwierigkeit. Es ergiebt sich für das gesuchte Geschlecht

$$\pi = \frac{1}{2}a(a-1)n+(a-1)(b-1)+ap.$$

Für $n = 2$, $p = 0$ erhält man hieraus das von den Herren Boule und Weyr gefundene Resultat $\pi = (a-1)(a+b-1)$. Für $a = 1$ ergiebt sich ferner das Resultat $\pi = p$, also unabhängig von b und n, welches bekannt ist. Scht.

SCHOUTE. Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques. S. M. F. Bull. X. 219-220.

Im 47[ten] Bande des Crelle'schen Journals hat Steiner die Ordnung der von den Mittelpunkten der centrischen C_3, welche durch sechs feste Punkte gehen, gebildeten Curve, sowie die Anzahl solcher Curven, die durch sieben Punkte gehen, bestimmt. Der Verfasser teilt ohne Beweis die Verallgemeinerung dieses Resultates für centrische Curven beliebiger Ordnung mit. Referent bemerkt, dass die Ordnung jener von den Mittelpunkten gebildeten Curve durch eine einfache Abzählung sich finden lässt. Für die dem zweiten Steiner'schen Satze analoge Anzahl aber wird nur eine obere Grenze gegeben, welche durch einen Druckfehler entstellt scheint. V.

J. M. LOVÉN. Om plana algebraiska kurvors rektifiabilitet. Lund Årsskrift. XVIII.

$f(x, y) = 0$ sei die Gleichung einer ebenen algebraischen Curve, ferner sei $u^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; durch Elimination erhalte man $F(x,u) = 0$. Der Verfasser bestimmt die Charaktere (M, N, D, K, T, J) und das Geschlecht (P) der die letzte Gleichung repräsentirenden Curve aus denjenigen $(\mu, \nu, \delta, \ldots, p)$ der ersten, der „f-Curve“.

Diese ist offenbar für $P = 0$ rectificirbar im gewöhnlichen Sinne.

Im allgemeinen Falle ist

$$M = 2(\mu+\nu), \quad N+K = 8\nu+2\varkappa, \quad D = 2(\mu+\nu)^2-5\nu-\mu-\varkappa,$$
$$P = 2p+\nu-1;$$

in solchem Falle kann P offenbar niemals verschwinden.

Diese Ergebnisse erfahren aber Modificationen, wenn die f-Curve specielle Beziehungen zu der unendlich fernen Geraden oder den unendlichen Kreispunkten hat. Besonders mag Folgendes hier bemerkt werden. Es sei

h_1 die Anzahl der im Endlichen belegenen Berührungspunkte mit ungrader Indexdifferenz der von einem Kreispunkte gezogenen Tangenten;

i_1 die Anzahl der durch einen Kreispunkt gehenden Zweige mit endlicher Tangente, deren grösserer Index ungrade ist;

j_1 die Anzahl der die unendlich ferne Gerade in einem Kreispunkte berührenden Zweige mit ungradem kleineren Index; dann ist

$$P = 2p - 1 + h_1 + i_1 + j_1.$$

Die drei Zahlen h_1, i_1, j_1 können nicht gleichzeitig verschwinden. Sind zwei von ihnen $= 0$, und die dritte $= 1$, so wird $P = 2p$, und beide werden gleichzeitig gleich 0. E.

K. Bobek. Ueber den geometrischen Ort der Inflexionspunkte eines Curvenbüschels. Cas. XI. 283-284. (Böhmisch).

Ist ein Curvenbüschel C_n in der Ebene gegeben, so entsteht die Frage, auf welcher Curve die betreffenden Inflexionspunkte liegen. Diese erscheint durch Eruirung der Ordnungszahl $6(n-1)$ und der Klassenzahl $6(n-2)(4n-3)$ gelöst.

Std.

G. Halphén. Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles. S. M. F. Bull. X. 162-172.

Eine ebene Curve sechster Ordnung mit neun Doppelpunkten, also vom Geschlechte 1, hat die Constantenzahl 18. Man könnte daher denken, dass es eine oder mehrere solcher Curven giebt, die neun beliebig gegebene Punkte zu Doppelpunkten haben. Es ergiebt sich jedoch, dass bei allgemeiner Lage der neun Punkte keine solche Curve existirt, da die neunten Punkte,

welche mit acht beliebig gegebenen Punkten zusammen eine Gruppe der neun Doppelpunkte einer Curve sechsten Grades vom Geschlecht 1 constituiren können, nicht die ganze Ebene ausfüllen, sondern eine Curve neunten Grades bilden, welche die acht gegebenen Punkte zu dreifachen Punkten hat. Die Abhängigkeit der neun Punkte von einander kann auf folgende Art dargestellt werden. Man sondere einen von den neun Punkten aus, er heisse A, und lege durch die übrigen acht alle ∞^1 Curven dritten Grades, bestimme den neunten Punkt A', den dieselben noch gemein haben, wähle dann die eine Curve aus, welche auch noch durch A hindurchgeht, und ziehe die beiden Tangenten, welche diese Curve in A und A' berühren. Nur wenn der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten wiederum auf jener Curve dritten Grades liegt, haben die neun Punkte die verlangte Eigenschaft, Doppelpunkte von Curven sechsten Grades vom Geschlechte 1 sein zu können. Unter den ∞^1 Curven, die dieselben neun Doppelpunkte haben, giebt es zwölf, welche noch einen zehnten Doppelpunkt besitzen. An die Beweise dieser Resultate, bei denen der Verfasser auch die Darstellung der Punkte einer cubischen Curve durch die Argumente einer doppelt-periodischen Function benutzt, schliesst sich die Ableitung der analytisch-geometrischen Gleichung der untersuchten Curve sechsten Grades, sowie auch die Verallgemeinerung der Resultate auf Curven vom Grade $3m$ mit neun m-fachen Punkten.

Scht.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Coordinaten.

H. Picquet. Traité de géométrie analytique à l'usage des candidats aux écoles du gouvernement et aux grades universitaires. Première partie. Géométrie analytique à deux dimensions. Paris. G. Masson.

Dem gesammten Inhalt zufolge ist das Vorliegende kein Lehrbuch der analytischen, sondern der synthetischen Geometrie. Das erste Buch handelt von den Coordinaten, der geraden Linie, ihren tangentiellen Coordinaten, dem Princip der Dualität und der homographischen Transformation; das zweite von den ebenen Curven, den singulären Punkten und Tangenten, Determination der algebraischen Curven; das dritte von den Kegelschnitten; das vierte von den Curven dritten und vierten Grades.

H.

G. Veronese. Dei principali metodi in geometria e in ispecial del metodo analitico. Verona. Padova. Tedeschi.

Diese Abhandlung bildet die Einleitung zu einer Vorlesung über analytische Geometrie. Der in Deutschland mathematisch

ausgebildete Verfasser giebt hier einen recht instructiven, historischen Ueberblick über die wesentlichsten analytisch-geometrischen Forschungsmethoden, insbesondere über die verschiedenen Coordinatensysteme und die Benutzung höherer Räume. Auf letztere Frage lässt er sich um so lieber ein, als ihm hier die Resultate eigener fruchtbarer Untersuchungen zu Gebote stehen. Unter den zu erwähnenden namhaften Autoren hat der Herr Verfasser eine etwas subjectiv gefärbte Auswahl getroffen. So z. B. scheinen ihm die Leistungen eines Hesse und Grassmann nicht erwähnenswert. My.

W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen. I. Die allgemeine Transformation der Coordinaten. Wolf Z. XXIV. 145-179.

Schon im sechzehnten Bande der Wolf'schen Vierteljahrsschrift hatte Herr Fiedler darauf aufmerksam gemacht, dass aus der geometrischen Deutung der Coefficienten einer linearen Substitution sich die allgemeine Coordinatentransformation ergebe. Hier wird dieser Gedanke näher ausgeführt und seine Fruchtbarkeit an mehreren Beispielen gezeigt.

Zunächst wird die Transformation von einem Systeme schiefwinkliger Cartesischer Coordinaten in der Ebene zu einem andern solchen Systeme als Specialfall der allgemeinen Coordinatentransformation behandelt. Um dann das orthogonale Hyperboloid als Object der Coordinatentransformation behandeln zu können, bespricht Herr Fiedler die verschiedenen Erzeugungsarten dieser speciellen Fläche zweiten Grades. Steiner hatte dieselbe als Ort der Durchschnittslinien der zu einander normalen Ebenen zweier Ebenenbüschel erzeugt, woraus man finden kann, dass die Gleichung derselben aus der des allgemeinen Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

durch Hinzufügung der Bedingung

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$$

hervorgeht. Der Verfasser beweist nun im Zusammenhang hiermit die zuerst von ihm und zwar schon im Sommer 1878 bei Gelegenheit des Druckes der dritten Auflage der „Analytischen Geometrie des Raumes“ bemerkte Eigenschaft, dass das orthogonale Hyperboloid ausser in einer Art aus orthogonalen Ebenenpaaren auch in unendlich vielen Arten aus gleichwinkligen Ebenenbüscheln entsteht. Den constructiven Uebergang von der einen zur andern Erzeugungsart giebt Herr Fiedler in der von einem seiner Schüler, Herrn Ruth in Graz, entwickelten Form. Hierbei muss erwähnt werden, dass die Erkenntnis der Erzeugbarkeit des orthogonalen Hyperboloids aus unendlich vielen gleichwinkligen Ebenenbüscheln von Herrn Fiedler (Sommer 1878) und nicht von Herrn Ruth herrührt, wie dies F. d. M. XI. 1879. p. 438 irrtümlich angedeutet ist. Schliesslich wird auch die Chasles'sche Erzeugungsart dieser merkwürdigen Fläche zweiten Grades als Ortes der Punkte, die gleiches Abstandsverhältnis von zwei Geraden haben, besprochen und der Abhandlung des Herrn Schröter im Bande LXXXV des Borchardt'schen Journals gedacht (s. F. d. M. X. 1878. p. 412).

Nach diesen allgemeineren Betrachtungen über das orthogonale Hyperboloid nimmt der Verfasser an der Gleichung desselben die Coordinatentransformation vor und zwar zuerst gemäss der Chasles'schen, dann gemäss der Steiner'schen Erzeugung und zuletzt gemäss einer Verbindung der letzteren mit der Erzeugung aus gleichwinkligen Büscheln. Das bei dieser Gelegenheit vom Verfasser benutzte neue Coordinatensystem mit zwei unendlich fernen Fundamentalpunkten wird wegen des allgemeineren Interesses, das es darbietet, auch für sich besprochen. Aus den Betrachtungen des Verfassers ergeben sich dann auch auf einfachste Weise die besten darstellend-geometrischen Constructionsmittel und die einfachste rechnerische Behandlung des orthogonalen Hyperboloids. Auch das Schlusscapitel der inhaltreichen Abhandlung enthält neue Betrachtungen. Es wird hier das Coordinatensystem mit nur einem unendlich fernen Punkte besprochen, also das dem Cartesisch-Plücker'schen dual gegenüber stehende Coordinatensystem. Hierbei ergeben sich naturgemäss

die metrischen Relationen in allgemeinen Coordinaten als Beziehungen der Elementenpaare zum unendlich fernen imaginären Kugelkreise. Scht.

Borletti. Sulla trasformazione delle coordinate nello spazio. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 252-258.

Die Richtungscosinus einer Geraden lassen sich durch drei von den neun Winkeln ausdrücken, welche die Axen zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme mit gemeinsamem Ursprung mit einander bilden, wenn zwischen zwei aus den Cosinus jener Winkel gebildeten Determinanten Reciprocität besteht. Durch Drehung um die Gerade lässt sich alsdann das eine System mit dem andern zur Deckung bringen. Die Resultate stimmen zum Teil mit den von Bardelli gefundenen überein. (S. F. d. M. II. 1869-70 p. 460.) Schg.

W. J. C. Sharp, G. M. Reeves. Solution of a question (6863). Ed. Times XXXVII. 117-118.

Sind die drei Cartesischen Coordinaten eines Punktes alle dieselben linearen Functionen der entsprechenden Coordinaten beliebig vieler anderer Punkte, so ist diese Beziehung von der Lage des Coordinatensystems unabhängig; falls die Summe der Coefficienten gleich 1, ist die Beziehung auch von der Lage des Anfangspunktes unabhängig. Wn.

E. Hain. Die ersten Formeln für die Rechnung mit trimetrischen Punktcoordinaten. Hoppe Arch LXVII. 425-446.

Lösung einfachster Aufgaben durch verhältnismässig umständliche Formeln. Schg.

H. W. L. Tanner. On the coordinates of a plane curve in space. Lond., M. S. Proc. XIII. 125-148.

Fortsetzung der Untersuchungen von Spottiswoode und Cayley über die 21, resp. 18 Coordinaten eines Kegelschnittes im Raume. (S. F. d. M. XI. 1879. p. 553.). Als Coordinaten einer ebenen Curve im Raume werden die n-dimensionalen Producte von sechs Grössen betrachtet, welche den Coordinaten einer Geraden analog sind und für $n = 1$ in dieselben übergehen. Diese sechs Grössen ergeben sich durch successive Elimination der vier homogenen Coordinaten zwischen den Gleichungen einer Ebene und einer Fläche n^{ter} Ordnung. Mit Hilfe der neuen Coordinaten erscheint dann die Curve als Schnitt derselben Ebene mit einem Kegel. Dass eine Gruppe von $2(n^2+3n-1)$ Coordinaten zur vollständigen Bestimmung einer C_n im Raum ausreicht, ist wahrscheinlich und für $n = 2$ bekannt; den allgemeinen Beweis aber hat der Verfasser noch nicht erbringen können. Es schliessen sich hieran weitere Untersuchungen über die zwischen den Coordinaten bestehenden Gleichungen, über Curven, deren Coordinaten teilweise verschwinden, über die Art, wie gewisse den Curven auferlegte Bedingungen durch die Coordinaten ausgedrückt werden können, und Aehnliches. Das Coordinatensystem des Verfassers ist auch auf Raumcurven anwendbar, die als Schnitt zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung erscheinen.

Schg.

E. Mathieu. Sur les coordonnées curvilignes. Résal J. (3) VIII. 5-19

Als Coordinaten eines in nächster Nähe einer Curve gelegenen Punktes $M(x,y)$ können verwendet werden 1) die Länge n der zur Curve gezogenen Normale MP, 2) die Länge σ des zwischen P und einem festen Curvenpunkte liegenden Bogens. Der Verfasser zeigt zunächst, dass, wenn $u = f(x,y)$ gegeben ist, $\frac{du}{d\sigma}$ und $\frac{du}{dn}$ sich eindeutig durch $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ und den Winkel ε zwischen der Normalen MP und der Axe der x ausdrücken lassen, wobei das gerade Stück dn noch durch ein Curvenelement ersetzt werden kann. Dagegen enthält im letzteren Falle die

zweite Ableitung $\frac{d^2u}{d\sigma dn}$ den die Krümmung von dn ausdrückenden Differentialquotienten $\frac{dv}{dn}$, ist also nicht mehr vollkommen bestimmt. Dieser Umstand ist von Cauchy bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen einer elastisch gekrümmten Lamelle (Exercices de mathématiques, 1828. p. 285-325) ausser Acht gelassen. Die Differentialquotienten von u nach x und y lassen sich durch σ und n einfacher ausdrücken, als durch die von Lamé in seinen „Leçons sur les coordonnées curvilignes" benutzten Parameter ϱ und ϱ_1. Der Verfasser zeigt die Uebereinstimmung der Lamé'schen Formeln mit den seinigen und verallgemeinert die letzteren, indem er die ersteren auf den Fall einer krummen Fläche ausdehnt und dann die Lamé'schen Coordinaten in die seinigen transformirt. Endlich werden die Kirchhoff'schen Formeln für die Schwingungen einer elastischen Platte (Vorlesungen über mathematische Physik No. 30) durch Anwendung der Coordinaten σ und n auf eine sehr einfache und elegante Gestalt gebracht. Schg.

A. Cayley. On curvilinear coordinates. Quart. J. XIX. 1-22.

In einer früheren Arbeit hatte Warren für den Fall normaler krummliniger Coordinaten sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen Coefficienten und Variablen aufgestellt (siehe F. d. M. IX. 1877. 469). Herr Cayley erweitert diese Untersuchungen, indem er die Voraussetzung fallen lässt, dass die ursprünglichen Coordinaten rechtwinklige und cartesische sind, und indem er ausserdem die neuen Coordinaten p, q, r als beliebige Functionen von x, y, z betrachtet. So ergeben sich sechs allgemeinere Differentialgleichungen nebst einer siebenten symmetrischen, die ebenfalls einer von Warren gegebenen entspricht. Den Schluss bildet die Ableitung der von Lamé in seinen „Leçons sur les coordonnées curvilignes" pp. 76, 78 gegebenen Gleichungen.

Schg.

P. Barbarin. Note sur les coordonnées bipolaires.
Nouv. Ann. (3) I. 15-29

Der Verfasser bestimmt die Entfernung zweier Punkte und die Gleichungen von Tangente und Asymptote in Bipolarcoordinaten und benutzt die gewonnenen Formeln zur Ableitung von Sätzen über die bekannten Curven, welche den einfachsten Formen der Gleichungen zwischen diesen Coordinaten entsprechen.

Schg.

G. Leonhardt. Grundzüge einer Dipolargeometrie.
Schlömilch Z. XXVII. 346-363.

Ueber die Bedeutung dipolarer Coordinaten s. F. d. M. XIII. 1881. 403. Der Verfasser ist durch seine an die Neumann'schen Arbeiten sich anschliessenden Forschungen über Elektricitätsverteilung auf einem Conoide zu einer rein geometrischen Untersuchung über jene Coordinaten veranlasst worden, deren Resultate hier vorliegen. Es wird zuerst die Green'sche Function in diesen Coordinaten ausgedrückt. Sodann führt der Verfasser den Begriff der „Isogreene" ein, d. h. derjenigen Curve, welche alle Punkte von gleicher Green'scher Function verbindet, und erhält durch mannigfache Specialisirungen und wiederum Verallgemeinerungen dieser Curve Gleichungen, welche verschieden bestimmte Ebenen, Geraden, Kegel, Conoide und Kugeln ausdrücken.

Schg.

H. Cox. On systems of circles and bicircular quartics.
Quart. J. XVIII. 74-121.

Der Verfasser behandelt die Theorie der Systeme von Kreisen in der Ebene mit Hülfe eines symbolischen zum Teil neuen Algorithmus. Unter der Summe zweier Kreise c_1, c_2 versteht er der üblichen Anschauungsweise gemäss den Kreis

$$(c_1+c_2)C = c_1C_1+c_2C_2;$$

das doppelte Product $2(c_1c_2)$ zweier Kreise wird dann definirt als Summe der Quadrate der Radien, vermindert um das Quadrat

der Entfernung ihrer Mittelpunkte. Diese Definition scheint in der Tat zweckmässig, da sie mit den formalen Gesetzen der Multiplication, soweit dieselben hier in Betracht kommen, in Einklang ist. Da sich jede gerade Linie als Summe von zwei Kreisen ansehen lässt, so ergeben sich aus den Gesetzen für Multiplication und Addition der Kreise auch die für Strecken (es sind die von Grassmann in der Ausdehnungslehre entwickelten). Insbesondere wird für die Summe zweier ein „Kräftepaar" bildenden Strecken das Symbol θ eingeführt, für welches die formalen Gesetze $\theta^2 = 0$, $\theta C = 1$, $\theta(c_1 - c_2) = 0$ in Anwendung zu bringen sind; der Beweis derselben ist allerdings unnötig umständlich. Dieser Algorithmus lässt sich mit Vorteil verwenden zur Untersuchung einer grossen Zahl von Problemen, von denen nur das der Ermittelung der bekannten Determinantenrelationen zwischen den Centren von vier Kreisen, die zu einem orthogonal sind, resp. von fünf Kreisen erwähnt sein möge. Der Mehrzahl nach lassen sich die Resultate freilich unmittelbar durch das Princip der reciproken Radien aus der Theorie der Geraden gewinnen, und wenn in der Einleitung (p. 75) besonders hervorgehoben wird: „It is shown, that three circles passing through a point have properties analogous to those of an ordinary triangle", so giebt eben jenes Princip für diese hier nur zufällig auftretende Analogie den eigentlichen Grund an.

Zum Schlusse wird mittels der obigen Operationen ein eigentümliches System von Kreiscoordinaten eingeführt und mittels derselben die Theorie der bicircularen Curve vierter Ordnung behandelt, ohne dass indessen neue Gesichtspunkte gewonnen würden. V.

H. Cox. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space. Cambr. Trans. XIII. 68-143; Cambr. Proc.. IV. 194-196.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1. p. 439.

HAMILTON. Elemente der Quaternionen. Deutsch von P. Glan. Bd. 1. Leipzig. Barth.

Seitdem Hankel 1867 in seiner „Theorie der complexen Zahlensysteme“ auf 50 Seiten eine übersichtliche und alles Wesentliche umfassende Darstellung der Quaternionen-Rechnung gegeben hat, sind verschiedene Versuche gemacht worden, dieselbe durch Lehrbücher in Deutschland einzubürgern, so durch Unverzagt, Odstrčil, Graefe. Hierzu musste schon die zunehmende Verwendung dieser Methode in England und Amerika auffordern, (neuerdings, seit dem Erscheinen von Laisant's trefflichem Lehrbuch, auch in Frankreich). Zu diesen durch Kürze und Uebersichtlichkeit sich auszeichnenden selbständigen Arbeiten gesellen sich nun neuerdings Uebersetzungen der englischen Originalwerke von Hamilton und Tait. Herr Glan hat sicherlich sehr recht daran getan, den Meister der Theorie selbst dem deutschen Publikum vorzuführen, und von seinen Werken dasjenige (posthume) zur Uebersetzung zu wählen, welches schon nach dem Zeugnisse Hankel's die Kenntnis der vom Verfasser bei Lebzeiten veröffentlichten Schriften überflüssig macht. Der Stoff ist in zwei Bände verteilt, von welchen der vorliegende erste die vollständige Theorie mit Beispielen enthält, während der zweite nur Anwendungen geben soll. Eine ausführliche vergleichende Kritik der Quaternionentheorie an der Hand dieses authentischen Lehrbuches zu geben, behält sich Referent für eine andere Stelle vor, da dieselbe den hier zur Verfügung stehenden Raum weit überschreiten würde. Nur einige Bemerkungen mögen die kurze Inhaltsangabe begleiten.

Der erste vorbereitende Teil enthält die Rechnung mit Strecken (Vectoren), im Wesentlichen übereinstimmend mit der von Möbius und Grassmann her bekannten Darstellung. Die hier eingeflochtene Theorie der geometrischen Netze hat inzwischen eine ganz gleichartige, sogar zu derselben Symbolik führende, übrigens selbständige Behandlung durch Noth erfahren, welcher von der Ausdehnungslehre her dazu gelangte. (S. F. d. M. XIII. 1881. 425). Die sonstigen Anwendungen der Strecken-

rechnung enthalten zwar Fortschritte gegenüber den gewöhnlichen Coordinaten-Methoden, sind aber durch die Grassmann'sche Methode der Punktgleichungen wesentlich überholt. Es ist an verschiedenen Stellen zu sehen, wie Hamilton selbst das Steckenbleiben in der Vectoren-Rechnung als einen Mangel empfunden und Anläufe zu einer Punktrechnung gemacht hat, so z. B. S. 31, wo der Schnittpunkt P_1 der Strecken PA und BC in der Form $P_1 = PA.BC$ dargestellt wird, oder S. 61, wo $DABC = -ADBC$ das Volumen eines Tetraeders bedeutet. Da aber Hamilton diese Ausdrücke, welche bei Grassmann planimetrische Producte vorstellen und als notwendige Folgerungen aus einfachen Grundbeziehungen sich ergeben, nur als willkürlich gewählte Abkürzungen aufstellt, so ist er auch nicht im Stande, einen mehr als vorübergehenden Gebrauch davon zu machen und sie organisch in den Rahmen seiner Theorie einzufügen.

Im zweiten Teile wird uns zunächst die Quaternion als Quotient verschieden gerichteter Vectoren vorgeführt. Man kann diese erste Untersuchung der Quaternionen als eine ausführliche Darstellung der Lehre vom Winkel in der Ebene und im Raume betrachten, wobei auch die trigonometrischen Functionen in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Richtungs- und Längenverhältnis der Schenkel werden Anfangs durch denselben Quotienten dargestellt, während später diese Grössen durch vorgesetzte Buchstaben ausgedrückt werden. Um ein charakteristisches Beispiel dieser Schreibweise zu geben, so würden andere Autoren, um auszudrücken, dass die Strecke a das n-fache der Längeneinheit e ist, einfach schreiben $ne = a$. Hamilton schreibt dafür $Ta . Ua = a$, und nennt a einen Vector, Ta (n) den Tensor, und Ua (e) den Einheits-Vector von a. Wir gelangen in diesem Teile auch zu dem wichtigsten und fruchtbarsten Begriff der Quaternionentheorie, nämlich zu dem der fundamentalen Einheiten i, j, k, sowie zu den zwischen diesen Einheiten geltenden Gesetzen und zur Darstellung der Quaternionen selbst durch diese Einheiten. Eine einfachere Form nehmen Quaternionen in derselben Ebene an. An die specielle Untersuchung dieser Ausdrücke schliesst sich die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und

Logarithmen der Quaternionen, worauf noch ein kurzer Abschnitt über Quaternionen im Raume folgt und über die associative Eigenschaft ihrer Multiplication.

Im dritten Teile wird dadurch, dass in einem Streckenquotienten der Divisor als reciproker Wert einer anderen Strecke aufgefasst wird, der Begriff des Productes zweier Strecken gewonnen, und diese Multiplication als nicht commutativ, wohl aber distributiv nachgewiesen. Es folgen dann Producte mehrerer Vectoren, vierte Proportionalen, Darstellung einer Quaternion als Product von Vectoren und am Schluss die Differentialrechnung der Quaternionen.

Diese kurzen Angaben können natürlich nur den allgemeinen Gang der Darstellung verfolgen, aber auch nicht annähernd einen Begriff geben von dem ungemeinen Reichtum an Beziehungen und Resultaten, die das Werk enthält. Leider ist das Studium desselben mit ausserordentlichen Unbequemlichkeiten verbunden, welche die Geduld des Lesers auf's Aeusserste in Anspruch nehmen. Dieses Uebelstandes konnten nicht einmal die selbständigen Bearbeiter des Gegenstandes Herr werden, geschweige der Uebersetzer. Der Hauptvorwurf trifft die Methode der Bezeichnung. Der Gebrauch der grossen Buchstaben S, T, U, V, um Eigenschaften der dahinter stehenden, durch andere Buchstaben ausgedrückten Gebilde zu bezeichnen, ist gradezu unerträglich, weil er dem Leser beständig zumutet, Combinationen von zwei Zeichen als einfache Begriffe, noch dazu von heterogenster Art, zu deuten. In Folge dessen erscheinen Formeln mit ganz simplem Inhalt schon complicirt, und das Transformiren der Formeln, sowie die Deutung ihres Inhalts ist eine um so verdriesslichere Arbeit, weil man sich bewusst ist, dass die Schwierigkeit nicht in der Sache, sondern nur in der unzweckmässigen Form liegt. Hierzu kommen noch Combinationen jener Buchstaben und eine Menge anderer vorübergehend eingeführter Zeichen und Abkürzungen. Als erheblicher innerer Mangel der Theorie und das Verständnis erschwerend erscheint ferner die Willkür in der Wahl und die Zusammenhangslosigkeit der abkürzenden Bezeichnungen, namentlich, wenn man das geschlossene und folgerichtige System Grass-

mann's damit vergleicht, dessen Hilfsmittel in dieser Art sich obendrein auf ein Minimum beschränken. Besser durchdacht ist die Terminologie, nur dass wenigstens die Hälfte der eingeführten Ausdrücke vollständig überflüssig ist, was der Autor selbst mitunter zwischen den Zeilen zugesteht. (Dabei sei gleich der Wunsch ausgesprochen, dass der zweite Band das so nötige vollständige Register dieser Ausdrücke bringen möge). Diesen Uebelständen gegenüber verschwindet fast die Breite der Darstellung und der wenigstens in der ersten Hälfte des Bandes bemerkliche Mangel an Anwendungen, welche die Mühe des Studiums lohnen. Zum Glück hat Hamilton selbst eine vom Uebersetzer in dankenswerter Weise in der Vorrede mitgeteilte Anleitung dazu gegeben, welche Partien des Werkes beim ersten Studium ohne Nachteil überschlagen werden können. Dennoch wird der deutsche Anfänger besser auf die Eingangs genannten Werke hinzuweisen sein, als auf das Hamilton'sche Originalwerk. Es muss überdies immer wieder betont werden, dass jeder Versuch, die Quaternionentheorie weiter zu vervollkommnen mit Notwendigkeit auf die Ausdehnungslehre hinführt. (Wenn z. B. Résal und Somoff den Ausdruck $S\alpha\beta$ als „geometrisches Product" von α und β auffassen, so ist dieses Product nichts anderes als das „innere Product" der Ausdehnungslehre). Soviel Aufhebens auch von der Quaternionentheorie im Auslande gemacht wird, in der Geschichte der Geometrie wird sie doch nur als vorübergehende Entwickelungsstufe des Calcüls erscheinen, welcher in der Ausdehnungslehre seinen umfassenden und endgiltigen Abschluss und seine vollkommenste, weil sachgemässe Darstellung findet. Für uns Deutsche liegt daher, abgesehen vom historischen Interesse, nur soweit eine Veranlassung vor, uns mit den Quaternionen bekannt zu machen, als es sich darum handelt, fremde Arbeiten auf diesem Gebiete zu verstehen. Jedenfalls aber müssen wir dem Herrn Uebersetzer dankbar sein für den grossen Aufwand an mühevoller Arbeit, womit er das Hamilton'sche Originalwerk in Deutschland eingeführt hat. Steht doch zu hoffen, dass solche Bestrebungen allmälig die Zahl jener altertümlichen Mathematiker verringern werden, welche jede

Arbeit, in der *ab* nicht gleich *ba* ist, grundsätzlich perhorresciren. Schg.

D. Padeletti. Principii della teoria dei quaternioni elementarmente esposti. Batt. G. XX. 1-48.

Uebersichtliche Darstellung der Elemente der Quaternionentheorie, am Schluss mit einer kurzen Zusammenstellung der Hauptbegriffe und Formeln und funfzig Uebungsaufgaben. Die Grassmann'schen Bezeichnungen und Benennungen sind zwar nicht grundsätzlich adoptirt, aber überall, wo erforderlich, gebührend hervorgehoben. Auch die Arbeiten von Bellavitis u. A. sind berücksichtigt. Schg.

G. J. Mounier. Eene byzondere eigenschap der quaternionen. Nieuw Arch. VIII. 81-88.

Die Bedingung wird gesucht und gefunden, welcher zwei Quaternionen genügen müssen, damit das Product Null sei, ohne dass eine von beiden Null ist. G.

C. S. Peirce. On the relative forms of quaternions. J. Hopkins Circ. 1882. 179.

Wenn das Symbol $(Y:Z)$ die Vertauschung der Y-Componente eines Vectors mit seiner Z-Componente bedeutet, und $1, i, j, k$ die Einheiten der Quaternionen sind, so ist

$$1 = (W:W) + (X:X) + (Y:Y) + (Z:Z),$$
$$i = (X:W) - (W:X) - (Y:Z) + (Z:Y),$$

während j und k aus i durch circulare Vertauschung von X, Y, Z erfolgen. (W ist die vierte der homogenen Coordinaten.) Durch Anwendung der Gesetze

$$(Y:Z)(Z:X) = (Y:X); \quad (Y:Z)(X:W) = 0$$

erhält man wieder die Grundgleichungen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ijk = -1 \text{ etc.}.$$

Mit Hülfe dieser Symbole lassen sich die Quaternionen selbst in determinantenähnlichen Formen schreiben.

Schg.

J. J. WALKER. Solutions of two questions (5803, 6674). Ed. Times XXXVII. 46-47, 57.

Bestimmung der Lage gewisser Kreise als Uebungsaufgabe für Anwendung der Quaternionen. Wn.

F. GRAEFE. Einige Sätze über abwickelbare Flächen abgeleitet mit Hülfe von Quaternionen. Hoppe Arch. LXIX. 1-18.

Der Verfasser leitet zunächst eine grössere Reihe von Sätzen ab, welche die Krümmung der Flächen im Allgemeinen betreffen, und giebt dann eine ausführliche Theorie der abwickelbaren Flächen. Die Einfachheit der Formeln, welche aus dem Wegfall der Coordinaten resultirt, ermöglicht dem Verfasser die Lösung complicirterer Aufgaben und die Aufstellung einer Reihe von Sätzen, deren allgemeinster mit der Frage zusammenhängt: Wie muss die Curve $\varrho = f(u, v)$ der Fläche $\varrho = f(u, v)$ beschaffen sein, damit die geradlinige Fläche

$$\varrho = V(\alpha f' + \beta n + \gamma n f') + (af' + bn + cnf')\lambda$$

eine abwickelbare Fläche ist? (wobei α. β, γ, a, b, c Functionen von v sind). Diese Frage gedenkt der Verfasser in einer späteren Arbeit zu beantworten. Schg.

D. PADELETTI. Su un calcolo nella teoria delle dinami analogo da quello dei quaternioni. Nap., Rend. XXI. 111-119.

Dem „Vector" der Quaternionen, welcher eine Strecke von

gegebener Richtung ausdrückt, stellt der Verfasser den Begriff des „Segmentes“ gegenüber, d. h. einer Strecke von gegebener Lage. Dasselbe soll für die Drehungen der Strecken und der durch sie dargestellten Kräfte dasselbe leisten, wie der Vector für die Verschiebungen. Durch Aufstellung der Grundformeln und Operationen für Segmente wird gezeigt, dass diese Analogie zwischen Vectoren und Segmenten wirklich besteht. Diese Betrachtungen werden dann erweitert, indem den gewöhnlichen (Verschiebungs-) Quaternionen von der Form $B = b + \beta$ die Drehungsquaternionen von der Form $A = a + \binom{\alpha}{\varrho}$ gegenüber gestellt werden. In der gewöhnlichen Bezeichnung der Quaternionen würde $A = a \left\{ \cos A + \binom{U\alpha}{\varrho} \sin A \right\}$ sein. Es folgen die Begriffe des Productes einer Kraft und einer solchen Quaternion, ferner eines Vectors und eines Segmentes, endlich zweier Quaternionen. Für das letztere wird der associative und distributive Charakter festgestellt. Soweit geht alles analog zu wie bei den gewöhnlichen Quaternionen. Dagegen befolgt, abweichend von dem Verhalten der letzteren, die Addition der neuen Quaternionen andere Gesetze als die der Kräfte, so dass in einer Additionsgleichung die Quaternionen nicht mehr durch die von ihnen dargestellten Kräfte ersetzt werden können. Eine Anmerkung stellt das Verhältnis fest zwischen den vom Verfasser eingeführten Benennungen und Symbolen und denjenigen, welche Clifford, Everett, Bellavitis, Ball gebraucht haben.

Schg.

Seydler. Zur Theorie der complanaren Biquaternionen oder der doppelt complexen Grössen. Prag. Ber. 1881. 80-104.

Um für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

eine ebenso symmetrische Lösung zu finden, wie sie in

$$V = \varphi(x+iy) + \psi(x-iy)$$

für die Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ vorliegt, dehnt der Verfasser den Begriff der complexen Multiplication (welcher er wegen der Commutativität der Factoren den Vorzug vor den Quaternionen giebt), wie er durch Grassmann für zwei Einheiten mittels der Gleichungen $e_1 e_2 = e_2 e_1$, $e_1 e_1 = -e_2 e_2$ festgestellt ist, auf vier Einheiten aus, giebt also den Grössen e_1 und e_2 neben den resp. Werten 1 und i noch zwei Werte h und k, wobei $k = hi$ gesetzt wird. Eine aus den Einheiten $1, i, h, k$ abgeleitete Grösse q erweist sich dann als complanare Biquaternion im Sinne Hamilton's. Neben der Lösung der ursprünglich gestellten Aufgabe enthält die Arbeit noch Berechnungen der einfachen Functionen von q. Den Schluss bildet eine geometrische Anwendung der gewonnenen Resultate, aus der sich der Nutzen der complanaren Biquaternionen für die Erweiterung von Resultaten der ebenen auf solche der räumlichen Geometrie ersehen lässt.

Schg.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

W. Jocknick. Sifferexempel till plana koordinatgeometrien. Stockholm.

Eine Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie, worin den bekannten Grössen immer bestimmte numerische Werte beigelegt sind.

E.

H. G. Zeuthen. Om stationäre kurver i el System. Zeuthen T. (4) VI. 5-13.

Ein ebenes Curvensystem sei durch $f(xy\alpha) = 0$ dargestellt. In den meisten Lehrbüchern wird dann gesagt, dass die durch Elimination von α aus $f(xy\alpha) = 0$ und $\frac{\partial f(xy\alpha)}{\partial \alpha} = 0$ entstandene Gleichung $\psi(xy) = 0$ einer stationären Curve dann eine einhüllende Curve des Systems darstellt, wenn sie nicht für einen gewissen Wert von α in dem System enthalten ist. Bei dieser Reservation werden aber zwei Umstände übersehen. Erstens kann es sich ereignen, dass zwar $f(xy\alpha) = \psi(xy)$ für $\alpha = \alpha_1$ ist, dass aber nicht zugleich α_1 gemeinschaftliche Wurzel von f und $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ ist. In diesem Falle ist $\psi = 0$ eine Curve, welche zugleich Curve des Systemes und einhüllende Curve der übrigen Curven ist. Zweitens kann es geschehen, dass $f(xy\alpha_1)$ nicht gleich $\psi(xy)$ wird, sondern $\psi(xy)$ Factor in $f(xy\alpha_1)$ ist. Dann wird, wenn nicht zugleich der erste Fall eintritt, $\psi(xy) = 0$ einen stationären Teil einer zerfallenden Curve des Systemes darstellen. Man muss daher in solchen Fällen die einzelnen Factoren von $f(xy\alpha_1)$ besonders untersuchen. Gm.

P. Gilbert. Exercices d'analyse infinitésimale. Math. II. 17-20.

Ausdruck des Bogendifferentials ds einer Curve durch die Differentiale dq_1, dq_2 der halben Summe und der halben Differenz der Radienvectoren, welche jeden Punkt mit zwei festen Centren verbinden. In diesem Coordinatensysteme q_1, q_2 werden der Ellipsen- und Hyperbelbogen durch dasselbe Integral ausgedrückt. Mn. (Wn.).

B. Theorie der algebraischen Curven.

E. Holst. Et Par synthetiske Methoder isor til Brug ved Studiat af metriske Egenskaber. Christiania Verh. 1882. No. 11.

E. Holst. Ein Paar synthetische Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen. Lie Arch. VII 240-362.

Diese beiden Abhandlungen, unter denen die letzte im Wesentlichen als eine Uebersetzung der ersten aufzufassen ist, verdienen nach der Auffassung des Referenten die Aufmerksamkeit der Geometer. Sie entwickeln beachtenswerte Methoden und liefern gleichzeitig hübsche Anwendungen derselben. Wir beschränken uns in diesem Referate auf die ebene Geometrie.

Der Verfasser geht von einigen einfachen metrischen Betrachtungen aus, die er zuerst in Clebsch Ann. IX. 341, 375 (siehe F. d. M. IX. 1877. 485) und im Bull. Soc. Math. de Fr. VIII. 52, (siehe F. d. M. XII. 1880. 553) entwickelt hat. Sodann beschäftigt er sich mit dem fundamentalen Begriffe „metrische Invariante", den Referent folgendermassen definiren möchte. Eine Function von den Coordinaten gewisser Punkte oder Geraden und von den Gleichungscoefficienten gewisser algebraischer Curven heisst eine metrische Invariante, wenn sie sich gegenüber allen Bewegungen der Ebene als Invariante verhält. Man kann sich nun die interessante Aufgabe stellen, die einfachste metrische Invariante aufzusuchen, bei deren Verschwinden eine gewisse projectivische (descriptive) Beziehung ausgedrückt wird. So z. B. ist der (doppelte) Flächeninhalt eines Dreiecks die einfachste metrische Invariante, deren Verschwinden ausdrückt, dass die drei Ecken auf einer Geraden liegen. Andererseits ist der Flächeninhalt eines Dreiseits, dividirt durch den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, die einfachste metrische Invariante, durch deren Verschwinden ausgedrückt wird, dass die drei Seiten durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Dem entsprechend bildet der Verfasser eine metrische Invariante der Coordinaten von sechs Punkten (oder Geraden), durch deren Verschwinden ausgedrückt wird, dass dieselben einem Kegelschnitte angehören. Für beliebige algebraische Curven gegebener Ordnung lassen sich ähnliche Invarianten bilden. Diejenigen Fälle, in denen die Entfernung zweier Punkte, der Winkel

zweier Geraden, die Entfernung eines Punktes von einer Geraden die Werte Null, Unendlich oder den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ annehmen, werden erschöpfend bestimmt. Neu und nützlich war dabei dem Referenten die auffallende Bemerkung, dass die Entfernung von zwei getrennten und unendlich entfernten Punkten nicht unendlich, sondern unbestimmt ist. Sind AB gegebene Punkte einer isotropen Geraden, so hat der Winkel APB einen bestimmten Grenzwert, wenn sich der Scheitel P in beliebiger Weise einem gegebenen auf der besprochenen Geraden gelegenen Punkte nähert. Nimmt man drei beliebige Erzeugende eines Hyperboloids, so hat das entsprechende Parallelepiped ein constantes Volumen. Interessante Sätze zwischen metrischen Invarianten, welche als Grenzfälle die Pascal'schen und Brianchon'schen Sätze umfassen, werden aufgestellt. Es besteht zwischen metrischen Sätzen ein sehr bemerkenswerter Dualismus, dessen Begrenzung indes nur angedeutet, aber leider noch nicht genau festgestellt wird. L.

E. Holst. Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Curven. Lie Arch. VII. 109-114.

Zur Auffindung von metrischen Eigenschaften einer algebraischen Curve kann man seinen Ausgangspunkt in den beiden folgenden evidenten Principien nehmen: Ein Product von n Factoren verschwindet oder wird unendlich dann und nur dann, wenn ein Factor gleich Null oder unendlich wird. Eine Summe von n endlichen Grössen ist immer endlich. Durch consequente Anwendung dieser Principien werden mehrere geometrische Sätze erhalten. L.

E. Holst. Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes. Lie Arch. VII. 177-178.

Analytischer Beweis eines Satzes, der in der vorangehenden Note durch eine synthetische Methode erhalten wurde.

L.

F. Lindemann. Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini, qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre. S. M. F., Bull. X. 21-40.

Ist $A = \Sigma\lambda_i\varphi_i = 0$ die Gleichung eines Gewebes von Curven s^{ter} Ordnung, $f = 0$ eine Curve n^{ter} Ordnung, so sagen die Gleichungen

$$A = 0,\quad dA = 0,\quad d^2A = 0,\quad d^3A = 0,$$
$$f = 0,\quad df = 0,\quad d^2f = 0,\quad d^3f = 0$$

aus, dass eine dreipunktige Berührung zwischen einer Curve des Gewebes mit f stattfindet. Zur Bestimmung einer Curve, welche die gesuchten Berührungspunkte auf f ausschneidet, hat man aus den vorstehenden Gleichungen die λ und die ersten, zweiten und dritten Differentiale der homogenen Variablen x zu eliminiren. (Vergl. F. d. M. IX. 1877. 485 und die daselbst gegebene Literatur.) Diese Resultante wird mittels symbolischer Rechnung vollständig bestimmt und liefert in Uebereinstimmung mit den vom Verfasser bereits auf anderem Wege in den Vorlesungen von Clebsch entwickelten allgemeinen Resultaten eine Curve von der Ordnung $4\left[s+\frac{3}{2}(n-3)\right]$. Gleichzeitig ist damit eine explicite Darstellung der Formen gewonnen, welche in dem bei dieser Frage in Betracht kommenden Brill'schen Reciprocitätssatze (Clebsch Ann. IV. 527, siehe F. d. M. III. 1871. 316) auftreten. Der eingeschlagene Weg kann endlich dazu dienen, auch für ein beliebig vielfach lineares System von Curven die explicite Darstellung der analogen Bedingungen zu liefern.

V.

J. S. Vaněček. Sur l'inversion générale. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 29-31.

Der Verfasser betrachtet in Verbindung mit einem Kegelschnitt C zwei Curven L, D, resp. von der Ordnung m, n. Die inverse Curve einer derselben in Bezug auf die andere ist eine Curve von der Ordnung $2mn$ mit $2n$ vielfachen Punkten von der Ordnung m und $2m$ vielfachen Punkten von der Ordnung n. Ferner findet folgender Satz statt: Wenn die eine Ecke α eines Polardreiecks $\alpha\alpha_1\alpha_2$ in Bezug auf einen Kegelschnitt C eine Curve L von der Ordnung m, die Ecke α_1 eine Curve D von der Ordnung n beschreibt, so bewegt sich die dritte Ecke α_2 auf einer Curve von der Ordnung $2mn$ mit denselben vielfachen Punkten, wie oben, und zwar sind diese vielfachen Punkte die Schnittpunkte von C mit den Curven D, L. Cly. (Wn.).

Genese, Ch. Ladd. Solutions of a question (7028). Ed. Times XXXVII. 112-113.

Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten einer Curve p^{ter} Klasse mit den darauf senkrechten Tangenten einer andern Curve q^{ter} Klasse ist vom Grade $2pq$. Wn.

C. Le Paige. Notiz über die $2k$-elementige neutrale Gruppe einer Involution k^{ter} Stufe und $(2k+1)^{\text{ten}}$ Grades. Wien. Ber. LXXXVI. 104-105.

Der Verfasser entwickelt die Covariante, durch deren Verschwinden die $2k$ Elemente der neutralen Gruppe gegeben werden. Scht.

C. Le Paige. Sur une représentation géométrique de deux transformations uniformes. Belg., Bull. (3) III. 760-762.

C. Le Paige. Sur quelques transformations géométriques uniformes. Belg., Bull. (3) IV. 415-431.

F. Folie. Rapport. Belg., Bull. (3) III. 717.

Einfache geometrische Deutung einer Transformation fünfter oder sechster Ordnung mit Hülfe der Curven dritter Ordnung.

Mn. (Wn.).

Weill. Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale. S. M. F., Bull. X. 137-139.

Durch einfache Betrachtungen nach der Methode der analytischen Geometrie gelangt der Herr Verfasser zu dem Theorem: „Der Ort der Centra mittlerer Entfernungen derjenigen Punkte, die einer festen unicursalen Curve vom Grade ϱ und einem System von Curven m^{ter} Ordnung, deren Gleichung einen variablen Parameter im k^{ten} Grade enthält, gemeinsam sind, ist eine unicursale Curve von der Ordnung $k\varrho$, welche die asymptotischen Richtungen der ursprünglichen unicursalen Curve auch zu asymptotischen Richtungen, und zwar eine jede in der Multiplicität k hat." Der Herr Verfasser macht darauf aufmerksam, dass der Grad dieses Ortes nicht von m abhängt, ferner, dass eine grosse Zahl besonderer Resultate in diesem Theorem enthalten ist, wobei der Fall $k = 1$ hervorgehoben wird. Am Schlusse findet sich eine Anwendung auf ein Polygon, das einem festen Kegelschnitt eingeschrieben und einem andern festen Kegelschnitt umschrieben ist.

Mz.

P. Gordan. Ueber Bündel von Kegelschnitten. Klein Ann. XIX. 529-553.

Siehe Abschn. II. Cap. 2. p. 80.

W. H. L. Russell. On certain geometrical theorems. No. 2. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 35-37.

Enthält Formeln zur Bestimmung des Kegelschnitts, welcher eine fünfpunktige, der Curve dritten Grades, welche eine neun-

punktige, endlich derjenigen Curve vierten Grades, welche eine vierzehnpunktige Berührung mit einer gegebenen Curve hat.
Cly. (Wn.).

W. Spottiswoode. Note on Mr. Russell's paper „On certain geometrical theorems. No. 2." Lond, R. S. Proc. XXXIII. 37-38.

Zeigt, dass die obige Methode angewandt werden kann zur Bestimmung von sechspunktigen Berührungen einer gegebenen Curve.
Cly. (Wn.).

H. J. Rink. Sur quelques applications géométriques simples du théorème d'Abel. Arch. Néerl. XVII. 460-478.

Die Arbeit schliesst sich an zwei Abhandlungen von Clebsch über denselben Gegenstand an, welche sich im Band LXIII. und LXIV. des Borchardt'schen Journals finden. Es werden in derselben einige neue und einfache geometrische Anwendungen des Abel'schen Theorems gegeben. Die erste Anwendung bezieht sich auf den Schnitt einer Curve dritter Ordnung mit einer Geraden; es werden auf diesem Wege viele bekannte Eigen schaften dieser Curven abgeleitet, unter anderen der Steiner'sche Satz über die in sie eingeschriebenen Vielecke, welchem durch Clebsch eine grosse Allgemeinheit gegeben ist. Ebenso wird weiter der Schnitt der Curve mit einer oder mehreren Linien zweiter Ordnung behandelt, und es werden einige bekannte Eigenschaften, welche sich hierauf beziehen, abgeleitet. Zum Schluss wird noch der Schnitt mit einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung besprochen. Auf diesem Wege wird das Theorem von Wiener (Clebsch Ann. III. 32, siehe F. d. M. II. 1869. 375) aufs Neue bewiesen.
G.

F. Folie et C. Le Paige. Mémoire sur les courbes du troisième ordre. Seconde partie. Belg., Mém. XLV. 1-45.

Die vorliegende Fortsetzung einer früher besprochenen Arbeit (cfr. F. d. M. XII. 1880. 545-546) behandelt, ebenso wie die frühere Arbeit selbst, nach einander Homographie, Involution, anharmonisches Verhältnis. Ein weiteres Capitel ist Constructionen gewidmet, die hauptsächlich auf den involutorischen Eigenschaften beruhen. Die Verfasser geben an, dass ihre Methode die von Chasles, Grassmann und Schröter als specielle Fälle, resp. als Folgerungen ergebe. Die zuletzt behandelten Aufgaben sind folgende: Wenn neun Punkte einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, soll der Schnitt der Curve mit einer beliebigen Geraden, resp. mit einer, die durch ein oder zwei der gegebenen Punkte geht, bestimmt werden. Ferner soll, wenn neun Punkte gegeben sind, ein System von Dreiecken construirt werden, die in Bezug auf die Curve conjugirt sind.

Mn. (Wn.).

C. le Paige. Essai de géométrie du troisième ordre. Addition (1883). Liège Mém. (2) X 1-104, 105-132; Belg., Bull. (3) V. 85-112.

Der Verfasser fasst in streng systematischer Anordnung seine bisherigen Untersuchungen über höhere Geometrie zusammen. Er behandelt 1) die Homographie dritter Ordnung, 2) Involution dritter Ordnung, 3) anharmonisches Verhältnis, 4) polare Gruppen.

In dem Zusatze beschäftigt sich der Verfasser, in Ergänzung seiner früheren Untersuchungen, mit der Construction homographischer Punktreihen und speciell mit folgender fundamentaler Aufgabe: Wenn eine Homographie dritter Ordnung und zweiten Ranges durch eine hinreichende Zahl von Bedingungen definirt ist, so soll zu zwei gegebenen Elementen das zugehörige dritte gefunden werden. Mn. (Wn.).

C. Le Paige. Sur les courbes du troisième ordre. Belg., Bull. (3) IV. 334-344.

F. FOLIE. Rapport. Belg., Bull. (3) IV. 301-302.

Zieht man von einem Punkte einer Curve dritter Ordnung Radien nach den Berührungspunkten der Tangenten aller übrigen Curvenpunkte, so erhält man eine biquadratische Involution ersten Ranges, die durch eine Gleichung von der Form

$$a_x^4 + \lambda(aa')a_x^2 + a'^2_x = 0$$

definirt wird. Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich eine grosse Zahl von Eigenschaften der Curven dritter Ordnung ableiten, speciell solcher, die sich auf die Inflexionspunkte beziehen.

Mn. (Wn.).

R. A. ROBERTS. On tangents to a cubic forming a pencil in involution. Lond., M. S. Proc. XIII. 25-27.

J. J. WALKER. On the covariant locus of the vertex of a pencil of tangents on a cubic in involution. Lond., M. S. Proc. XIII. 66-69.

Herr Roberts zeigt durch Untersuchung der kanonischen Form der Gleichung einer Curve dritter Ordnung U, dass der Ort der Punkte, von denen sechs Tangenten in Involution an die Curve gehen, aus zwölf Curven dritter Ordnung und den neun Inflexionstangenten von U besteht. Herr Walker fügt hinzu, dass diese Curven dritter Ordnung keinen Doppelpunkt haben, so lange dies nicht bei U der Fall ist, und dass das Produkt der Gleichungen derselben rational aus den Covarianten und Invarianten von U zusammengesetzt ist, während bekanntlich erst das Quadrat des Produkts der Gleichungen der neun Inflexionstangenten eine rationale Covariante ist.

V.

F. D'ARCAIS. Sopra alcuni teoremi sulle curve piane del terzo ordine. Ven. Ist., Att. (5) VIII. 673-685.

Sind die Punkte einer allgemeinen C_3 als doppelt-periodische Functionen eines Parameters u mit den Perioden ω, ω' dargestellt, so ist bekanntlich $u_1 + u_2 + \cdots u_{3n} \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$ die Be-

dingung dafür, dass die $3n$ entsprechenden Punkte auf einer C_n liegen, und umgekehrt. Von diesem Theorem werden einfache Anwendungen auf Punktgruppen auf der C_3 gemacht, die von Tangentialpunkten gebildet sind, von denen die folgende erwähnt sein möge: Die $12n$ Berührungspunkte der von den Schnittpunkten mit einer C_n an die C_3 gelegten Tangenten liegen zu je $3n$ auf m^2 Curven n^{ter} Ordnung, wo m die Anzahl der Lösungen der Congruenz

$$p_1+p_2+\cdots+p_{3n}\equiv 0 \pmod{2}$$

für $p_i = 0, 1$ ist. V.

E. W. DAVIS. Note on binodal quartics. J. Hopkins Circ. 1882. 242.

Die kurze Note bezieht sich auf die Parameterdarstellung der elliptischen C_4, enthält jedoch nichts Neues. V.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

W. E. STORY. On a system of conchordal conics. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

W. E. STORY. Analytical proof of some properties of binodal quartics. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Conchordal nennt der Verfasser das System aller ∞^3 Kegelschnitte, welche durch dieselben zwei festen Punkte gehen, Radical-Axe zweier Kegelschnitte eines solchen Systems die Verbindungslinie ihrer beiden nicht festen Schnittpunkte, Radical-Centrum dreier Kegelschnitte eines solchen Systems den Punkt, in welchem sich die drei Radical-Axen von immer je zwei dieser drei Kegelschnitte schneiden, endlich Radical-Kegelschnitt den Kegelschnitt, welcher durch die sechs Berührungspunkte der sechs Tangenten geht, die an drei conchordale Kegelschnitte von ihrem Radical-Centrum aus gezogen werden können. Die analytische

Methode, mit deren Hilfe der Verfasser die bekannten (Salmon's Conic sections) in diesen Definitionen steckenden beiden Sätze, sowie einige andere auf drei conchordale Kegelschnitte bezügliche ebenfalls bekannte Sätze beweist, führen ihn in seiner zweiten Note zu einem analytischen Nachweise von Eigenschaften der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

Scht.

W. Abendroth. Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig. Hirzel.

Der Herr Verfasser sagt im Vorwort, dass er weniger einen kurzgedrängten Abriss des Lehrganges für den Schüler, als vielmehr eine leichtfassliche Darstellung der Elemente geben wollte, die nicht nur der Schüler bei der Repetition selbst verstehen, sondern auch der weiter Vorgeschrittene als Vorbereitung zu umfassenderen Lehrbüchern und schwierigeren Vorlesungen benutzen könne. Das Buch zerfällt in drei Abschnitte: Die gerade Linie, die Linien zweiten Grades als geometrische Orte und allgemeine Sätze über die Kegelschnitte. Es beginnt mit dem Begriff der Function reeller Variablen und der graphischen Darstellung ihres Verlaufs. Nach Behandlung der geraden Linie und ihrer verschiedenen Gleichungsformen folgt der Kreis und die Coordinatentransformation. Dann wird die Parabel geometrisch definirt, ihre Gleichung, die Gleichung einer ihrer Tangenten und die zugehörige Construction gegeben; hierauf kommt dasselbe bei der Ellipse und Hyperbel. Daran knüpft sich die Betrachtung des Kegels und seiner Schnitte, die Polargleichungen der Kegelschnitte. Aufgaben. Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades; Sätze über Durchmesser und Tangenten; Quadratur der Ellipse und Parabel. Formeln. Die Darstellung ist sehr klar, und die äussere Ausstattung des Buches gut.

Mz.

A. Wiegand. Analytische Geometrie. 6te Aufl. Halle. H. W. Schmidt.

Der Inhalt dieses Buches giebt die analytische Geometrie der Ebene von den Elementen an bis zu den Kegelschnitten einschliesslich. Es eignet sich sehr gut für ein erstes Studium dieser Wissenschaft. Ein besonderes Capitel ist betitelt: Methode der Tangenten. In diesem ist die Tangente an eine beliebige Curve definirt und dann die Anwendung hiervon auf die Kegelschnitte gegeben. Auch ist die Quadratur der Ellipse und der Parabel gezeigt. Ueberall sind ferner passende Aufgaben eingeflochten. Gegen Ende des Buches werden einige Curven höherer Grade mit Benutzung der Elemente der Differentialrechnung discutirt, wie die Cissoide u. a. m. Dann folgen einige transcendente Curven: Die logarithmische Linie, die Sinuslinie, die Cycloide. Erwähnt werden einige zur Cycloide gehörige Curven. Als Anhang sind ferner noch vermischte Aufgaben gegeben.

Mz.

Ad. Hochheim. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig. Teubner.

Von diesem Buche liegt das erste Heft vor, welches in zwei gesonderte Teile zerfällt, nämlich in Aufgaben und Auflösungen. Es werden die gerade Linie, der Punkt und der Kreis behandelt. Das Buch soll den Studirenden der Mathematik auf der Universität und der technischen Hochschule zur Einübung und weiteren Verarbeitung der analytischen Geometrie dienen, jedoch auch in seinen ersten Heften beim Unterrichte in der obersten Stufe der Realschule Verwendung finden können. Von den hier gegebenen 558 Aufgaben mögen nur einige erwähnt werden: Inhalt eines Polygons, Bestimmung des Winkels, den zwei Gerade einschliessen, Gleichungen höheren Grades, welchen Systeme von geraden Linien entsprechen, Strahlenbüschel, homogene Punktcoordinaten, involutorische Punktreihen, homogene Liniencoordinaten, Pol und Polare, Radical-Axe und Radical-Centrum,

Kreisbüschel, Tactionsproblem. Ferner ist zu beachten, dass sowohl numerische Rechnungen als auch analytische Operationen beständig in Anwendung kommen. Man darf wohl sagen, dass das Buch seinem Zweck vollkommen entspricht.

Mz.

R. A. Roberts. A collection of examples and problems on conics and some of the higher plane curves. Dublin. 1882. Darb. Bull. (2) VI. 264.

Von diesem Werk war dem Referenten selbst nur ein Referat zugänglich, und zwar im Bulletin von Darboux, wo es heisst, dass der Verfasser die meisten seiner Theoreme und Probleme durch die Lectüre der wohlbekannten Bücher von Salmon und ferner der Abhandlung von Casey und eines Werkes von Darboux. „Ueber eine besondere Art algebraischer Curven und Flächen" gewonnen hat. Mz.

X. Antomari. Relation entre les distances mutuelles 1° de quatre points situés sur un même cercle, 2° de cinq points situés sur une même sphère. Nouv. Ann. (3) I. 462-465.

Der Herr Verfasser erwähnt zuerst, dass die Herren Rouché und Comberousse in ihrem „Traité de géométrie" die in der Ueberschrift angegebenen Relationen mit Hülfe des Multiplicationssatzes von Determinanten nachweisen, und giebt dann einen andern Beweis. Sind $(x_1\, y_1) \ldots (x_4\, y_4)$ die rechtwinkligen Coordinaten von vier Punkten A, B, C, D eines Kreises, ferner a_1, b_1, c_1, d_1 die Abstände dieser Punkte von irgend einem Punkte O_1 der Ebene, so hat man vier Gleichungen:

$$a_1^2 + \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0,$$
$$b_1^2 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma = 0,$$
$$c_1^2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma = 0,$$
$$d_1^2 + \alpha x_4 + \beta y_4 + \gamma = 0,$$

woraus durch Elimination von α, β, γ die Gleichung

$$\Sigma \pm a_1^2 \,.\, x_2 \,.\, y_3 \,.\, 1 = 0$$

folgt. Wenn dann der Inhalt des Dreiecks *BCD* mit *A* bezeichnet wird, der von *CDA* mit *B* u. s. w., so ergiebt sich aus der letzten Gleichung:

$$Aa_1^2 - Bb_1^2 + Cc_1^2 - Dd_1^2 = 0.$$

Nimmt man ebenso drei andere beliebige Punkte der Ebene O_2, O_3, O_4 (wie vorher O_1) hinzu, so erhält man noch drei andere Gleichungen:

$$Aa_2^2 - Bb_2^2 + Cc_2^2 - Dd_2^2 = 0, \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt dann die Gleichung

$$\Sigma \pm a_1^2 b_2^2 c_3^2 d_4^2 = 0.$$

Lässt man dann O_1 mit *A*, O_2 mit *B*, etc. coincidiren, so erhält man die verlangte Relation. Ganz das analoge Verfahren lässt sich auf die Kugel anwenden; auch kann man in gleicher Weise die Relationen unter den gegenseitigen Entfernungen von fünf Punkten einer Ebene, sechs Punkten des Raumes aufstellen.

Mz.

A. Sykora. Enveloppe einer Geraden, welche zur Summe der Quadrate der Abstände von einer Anzahl von Punkten eine constante Grösse hat. Prag. Ber. 1881. 23-40.

In ausführlicher analytischer Rechnung, wobei ein Punkt durch seine Coordinaten (x, y) und eine Gerade durch ihre Coordinaten (u, v), die der Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ entnommen sind, bezeichnet werden, wird die fragliche Enveloppe durch eine Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten ausgedrückt; sie ist also ein Kegelschnitt. Bleiben die gegebenen Punkte dieselben, und verändert sich nur die constante Summe, so erhält man eine Reihe confocaler Kegelschnitte. Es wird nun die Construction eines solchen Kegelschnittes durchgeführt und gezeigt, wie man von n gegebenen Punkten zu $n+1$ solchen übergehen kann. Im Besondern wird nachher der Fall betrachtet, in welchem die n gegebenen Punkte gleichmässig auf der Peripherie eines Kreises

verteilt sind; der Kegelschnitt erweist sich dann, mit Ausnahme des Falles $n = 2$, als Kreis. Am Schlusse der Arbeit wird die Enveloppe noch in Punktcoordinaten behandelt, und schliesslich discutirt, wann sie Ellipse oder Hyperbel ist. Mz.

E. Hunyady. Zusatz zu einer Abhandlung in Borchardt's Journal LXXXIII. p. 76. Kronecker J. XCII. 307-311.

Die Abhandlung (siehe F. d. M. IX. 1877. 494), auf welche dieser Zusatz sich bezieht, war betitelt: „Ueber die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen", und hatte den Zweck die Theoreme von Pappus, Desargues, Newton, Pascal und Carnot durch Gleichungen auszudrücken. In dieser Arbeit wird ausschliesslich auf das Theorem von Pappus Bezug genommen, wonach bei sechs Punkten 123456 eines Kegelschnitts das Verhältnis der Producte der Abstände des Punktes 5 von je zwei Gegenseiten des Vierecks 1234 dasselbe bleibt, wenn statt des Punktes 5 der Punkt 6 genommen wird. Dieses Theorem wird hier aus der Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & x_6 z_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0$$

durch directe Umformung mit Hülfe von Determinantensätzen in die andere Gleichung

$$(136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245) = 0$$

gewonnen. Hierbei ist die Bezeichnung eingeführt:

$$\Sigma \pm x_i y_k z_l = (ikl).$$

Mz.

WOLSTENHOLME. Solution of a question (6446). Ed. Times XXXVI. 70-71.

Ist

$$u \equiv (a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts in rechtwinkligen Coordinaten, so sind die Directrices bestimmt durch die Gleichung

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4\lambda u,$$

wo λ die Wurzel der Gleichung

$$(2) \qquad \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = h^2$$

ist. Für schiefwinklige Coordinaten treten an Stelle der Gleichungen (1) und (2) die folgenden:

$$(1a) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega = 4\lambda u,$$

$$(2a) \qquad \lambda^2 - \lambda(a+b-2h\cos\omega) + (ab-h^2)\sin^2\omega = 0.$$

Wn.

C. DE POLIGNAC Solution of a question (6735). Ed. Times XXXVI. 93-94.

Ein ungeschlossenes Polygon sei einem Kegelschnitte einbeschrieben, einem andern umschrieben; es seien μ_1 und μ_2 zwei auf einander folgende, a_1 und a_2 zwei andere auf einander folgende Seiten, in derselben Reihenfolge genommen. a_1 schneide μ_2 in m_2, während m_1 der Schnittpunkt von a_2 mit μ_1 ist. Geht nun, während μ_1 und μ_2 fest bleiben, dagegen für a_1 und a_2 andere und andere Seitenpaare genommen werden, die Linie $m_1 m_2$ durch einen festen Punkt, so berühren beide Kegelschnitte einander doppelt. Wn.

R. W. GENESE. On linear syzygetic relations between the coefficients of ternary quadrics. Brit. Ass. Rep.

Die ternäre quadratische Form $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$ stellt verschiedene Curven oder Flächen dar, je nach der Wahl des

Coordinatensystems x, y, z. Betrachtet man z. B. x, y, z als trilineare Coordinaten eines Punktes, so stellt die Form einen Kegelschnitt dar. Findet zwischen den Coefficienten die Gleichung

$$la + mb + nc + pf + qg + rh = 0$$

statt, so hat der Kegelschnitt bekanntlich die Eigenschaft, dass sich in denselben Dreiecke einbeschreiben lassen, die in Bezug auf einen festen Kegelschnitt sich selbst conjugirt sind. Genügen dabei die Coefficienten l, m, n, p, q, r noch der Bedingung

$$\begin{vmatrix} l & r & q \\ r & m & p \\ q & p & n \end{vmatrix} = 0,$$

so liegt der Kegelschnitt so, dass zwei feste Punkte in Bezug auf denselben einander conjugirt sind.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der Fall behandelt, dass gleichzeitig zwei lineare Relationen zwischen den obigen Coefficienten stattfinden. Es ergiebt sich dadurch der folgende zuerst von Hesse gefundene Satz: „Kegelschnitte, welche zwei Diagonalen eines vollständigen Vierseits harmonisch teilen, teilen auch die dritte harmonisch.“

Finden ferner drei lineare Relationen statt, so giebt es unendlich viele Paare von conjugirten Punkten, die alle auf einer Curve dritten Grades liegen. Csy. (Wn.).

W. J. C. Sharp. Solution of a question (6242). Ed. Times XXXVI. 123-124.

In der Ebene dreier Kegelschnitte A, B, C giebt es drei Tripel von Punkten a, b, c von der Eigenschaft, dass A_b, B_c, C_a respective mit B_a, C_b, A_c identisch ist. Dabei ist unter P_q die Polare des Punktes q in Bezug auf den Kegelschnitt P zu verstehen. Von den drei Dreiecken, die durch die drei Punkte a, durch die drei Punkte b, durch die drei Punkte c gebildet werden, sind je zwei in perspectivischer Lage. Sind jene neun Punkte gegeben, so sind dadurch drei Kegelschnitte, zu denen

sie in der oben genannten Beziehung stehen sollen, eindeutig bestimmt. Wn.

M. Pasch. Bemerkungen zur Kegelschnittstheorie. Schlömilch Z. XXVII. 122-124.

Man kennt den folgenden Satz: „Sucht man auf den Seiten eines Dreiecks *abc* diejenigen Punkte $\alpha\beta\gamma$, welche in Bezug auf einen Kegelschnitt jedesmal der gegenüber liegenden Ecke conjugirt sind, so liegen $\alpha\beta\gamma$ auf einer Geraden D; zieht man durch die Ecken des Dreiecks diejenigen Strahlen, welche jedesmal der gegenüber liegenden Seite conjugirt sind, so erhält man drei Strahlen durch einen Punkt d, den Pol der Geraden D, (diese drei Strahlen sind die Polaren von $\alpha\beta\gamma$)." Vergl. Steiner-Schröter, Kegelschnitte, II. Abteilung § 31, p. 153 f., Reye, Geometrie der Lage, II. Aufl., I. Abteilung S. 191 f.

Vom Verfasser wird die Gleichung der Geraden D aufgestellt mit Hülfe der Identität

$$(abc)f(xy) = (bcx)f(ay) + (cax)f(by) + (abx)f(cy),$$

worin

$$f(xy) = \Sigma a_{ik}x_i x_k \text{ mit } a_{ik} = a_{ki};\quad i, k = 1,2,3$$
$$(abc) = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3,\ (bcx) = \Sigma \pm b_1 c_2 x_3 \text{ u. s. w.}$$

und $f(xx) = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts ist. D ist dann dargestellt durch

$$\frac{(bcx)}{f(bc)} + \frac{(cax)}{f(ca)} + \frac{(abx)}{f(ab)} = 0.$$

Die Linie D, welche die Seiten *abc* zu einem Polvierseit ergänzt, hat in Bezug auf das Dreieck *abc* (aufgefasst als Curve dritter Klasse) denselben Pol δ wie der Kegelschnitt. Der Punkt d, welcher mit *abc* ein Polviereck bildet, hat in Bezug auf das Dreieck *abc* (aufgefasst als Curve dritter Ordnung) dieselbe Polare Δ wie der Kegelschnitt. Rg.

Weill. De l'involution de plusieurs points sur une conique. Nouv. Ann. (3) I. 62-79.

Giebt man einen Kegelschnitt in der Form

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

so sind seine Coordinaten als Functionen eines Parameters t folgendermassen darstellbar:

$$x=z\frac{2t}{1+t^2},\quad y=z\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Drei Punkte auf diesem Kegelschnitt bilden eine Involution, wenn man zur Bestimmung der ihnen entsprechenden Werte von t die Gleichung hat:

$$t^3+\lambda t^2+(a\lambda+b)t+c\lambda+d=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt für je zwei Wurzeln t und t' derselben

$$\frac{t^2+bt+d}{t^2+at+c}=\frac{t'^2+bt'+d}{t'^2+at'+c}=\lambda,$$

oder:

$$t^2t'^2+att'(t+t')+c(t+t')^2-(c+b)tt'-d(t+t')+bc-ad=0.$$

Die hierdurch definirten variabeln Dreiecke werden jetzt in Beziehung zu andern Kegelschnitten gesetzt und auf diese Weise Sätze über Polygone, welche Kegelschnitten ein- und umbeschrieben sind, gewonnen. Wir führen folgende an: I. Gegeben seien die Kegelschnitte

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{(b+1)^2}-\frac{z^2}{(b-1)^2}=0.$$

1) Diese bilden ein allgemeines System von zwei Kegelschnitten, so dass ein dem ersten eingeschriebenes Dreieck dem zweiten umschrieben ist. Die Parameter der Scheitel genügen der Gleichung

$$t^3+\lambda t^2+bt+\frac{\lambda}{b}=0.$$

2) Die Verbindungslinien der Scheitel mit den Berührungspunkten ihrer Gegenseiten umhüllen die Curve

$$\left(\frac{x}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}.$$

3) Der Punkt, in dem diese drei Linien sich schneiden, beschreibt einen Kegelschnitt

$$\frac{y^2}{(b+3)^2(b-1)^2} - \frac{x^2}{(b+3)^2} - \frac{z^2}{(b+1)^2} = 0.$$

II. Betrachtet man die drei Kegelschnitte

$$x^2+y^2-z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{(b+1)^2} - \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{4b} + \frac{y^2}{3+2b-b^2} + \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0,$$

so bilden diese das allgemeine System dreier Kegelschnitte, so dass ein dem ersten eingeschriebenes Sechseck dem dritten umschrieben ist, und gleichzeitig die Diagonalen, mit Ausschluss der Hauptdiagonalen, den zweiten berühren.

III. Betrachtet man den Kegelschnitt

$$x^2+y^2-z^2 = 0$$

und die drei Geraden

$$y = tx, \quad y = t'x, \quad y = t''x,$$

deren Parameter t, t', t'' die Gleichung

$$t^3+\lambda t^2+bt+c\lambda = 0$$

befriedigen, während zwischen b und c die Relation

$$3c^2-4bc^2+6bc-4c-b^2 = 0$$

besteht, so sind diese Linien die Diagonalen eines mit λ veränderlichen Sechsecks, welches dem gegebenen Kegelschnitt einbeschrieben und einem andern umschrieben ist;

2) das Sechseck ist einem Kegelschnitt einbeschrieben, dessen Gleichung

$$\alpha x^2+\beta y^2-z^2 = 0$$

ist; die Geraden, welche die Scheitel abwechselnd verbinden, sind Tangenten des Kegelschnittes

$$\alpha' x^2+\beta' y^2-z^2 = 0,$$

wo ȣ α', β, β' den Gleichungen

$$\alpha^2+\alpha(b+c-2)+1-b-c+bc = 0,$$

$$\beta^2+\beta\frac{b+c-2bc}{bc} + \frac{1-b-c+bc}{bc} = 0$$

genügen. Die letzten Untersuchungen beziehen sich auf ähnliche Eigenschaften von Fünfecken. Rg.

X. ANTOMARI. Sur deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques. Nouv. Ann. (3) I. 102-110.

Der Herr Verfasser geht von der bekannten Definition der Brennpunkte eines Kegelschnitts aus, dass sie Centra eines Kreises mit dem Radius Null sind, der die Curve doppelt berührt, und gelangt hierdurch zu der Erklärung des Kegelschnitts als Ort von Punkten, deren Entfernungen von einem Kreise mit dem Radius Null und von einer festen Geraden ein constantes Verhältnis haben. Diese Erklärung wird nun verallgemeinert auf Grund einfacher analytisch-geometrischer Betrachtungen, und lautet dann: „Ein Kegelschnitt ist der Ort aller Punkte, deren normale Entfernungen von einem festen Kreise und einer festen Geraden ein constantes Verhältnis haben; das Centrum des Kreises ist ein Brennpunkt des Kegelschnitts, und die feste Gerade ist senkrecht zur Focalaxe und geht durch zwei Punkte, die dem Kegelschnitt und dem Kreise gemeinsam sind.“ Nachher gelangt der Herr Verfasser noch zu dem weiteren Satz: „Jede Curve zweiten Grades ist der Ort von Punkten, deren Entfernungen von einem festen Kreise (diese Entfernungen unter einem constanten Winkel gemessen) zu den Entfernungen von einer festen Geraden ein constantes Verhältnis haben.“ Am Schlusse findet sich noch eine elementare geometrische Betrachtung, aus welcher der vorige Satz hervorgeht. Mz.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte im Allgemeinen in analytischer Behandlung von TOWNSEND, E. W. SYMONS, G. F. WALKER, CH. LADD, R. E. RILEY, D. EDWARDES, W. J. C. SHARP, GENESE, MALET, G. HEPPEL, MATZ finden sich Ed. Times XXXVI. 56-57, 75, 76; XXXVII. 21-22, 92, 97-98. Wn.

E. W. Symons, R. Knowles. Solutions of a question (6577). Ed. Times XXXVI. 51.

Ist einer Parabel ein Dreieck PQR so einbeschrieben, dass PQ und PR die Normalen in Q und R sind, so liegt der Schwerpunkt des Dreiecks auf der Axe der Parabel, und die Seite QR geht durch einen festen Punkt der Axe. Wn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über die Parabel in analytischer Behandlung von E. W. Symons, T. R. Terry, E. Rutter, G. F. Hopkins, G. F. Walker, A. H. Curtis, S. Marks, J. S. Jenkins, R. Knowles, Wolstenholme finden sich Ed. Times XXXVI. 42; XXXVII. 37-38, 56-57, 114, 116. Wn.

J. Hammond, B. Easton. Solutions of a question (6117). Ed. Times XXXVII. 111.

Ist e die Excentricität einer Ellipse, deren grosse Axe $= 1$ ist, und ist E die Länge des Ellipsenquadranten, so ist

$$\int_0^a \frac{eEde}{(1-e^2)(a^2-e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi a}{2(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieser Satz wird durch einfache Transformationen eines Doppelintegrals nachgewiesen. Wn.

H. G. Dawson, E. Rutter. Solutions of a question (6759). Ed. Times XXXVII. 51.

Ist ϱ der Krümmungsradius einer Ellipse, ψ der Winkel der Tangente mit der grossen Axe, so ist die Gleichung der Ellipse

$$\varrho^{-\frac{2}{3}} = (ab)^{-\frac{4}{3}}\{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi\}.$$

Die Fläche zwischen dem Ellipsenquadranten, den Axen und der Evolute ist

$$\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{32ab}\pi.$$

Das letzte Resultat lässt sich auf die Curve ausdehnen, deren Gleichung in den obigen Coordinaten ist $\varrho = a\cos^n\psi$.

Wn.

E. J. Nanson. Note on the geometry of conics. Mess. (2) XII. 40-41.

Die bekannten Sätze, dass in der Ellipse die Summe, in der Hyperbel die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser constant ist, wird hier durch eine Methode abgeleitet, die auf beide Curven gleichzeitig anwendbar ist.

Glr. (Wn.).

P. H. Schoute. Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée. S. M. F. Bull. X. 222-223.

Diese Frage aus der Kegelschnittslehre beantwortet der Verfasser dahin, dass der zum Punkte A der Parabel bezüglich der Directrix symmetrische Punkt das Centrum der gleichseitigen Hyperbel des Verfassers ist. Der Verfasser glaubt, dass sich zwei Parabeln im Endlichen vierpunktig berühren können, was nicht richtig ist, z. B. weil man das unendlich kleine Viereck immer als unendlich kleines Vierseit ansehen kann, folglich etc. Demnach ist Satz e) falsch, Problem g) gegenstandslos. Kr.

Wolstenholme. Solution of a question (2706). Ed. Times XXXVI. 44-45.

Es giebt stets zwei gleichseitige Hyperbeln, welche die Seiten eines gegebenen stumpfwinkligen Dreiecks berühren und durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des Dreiecks gehen. Die Mittelpunkte dieser Hyperbeln sind die Schnittpunkte des Neunpunktekreises mit dem umschriebenen Kreise des Dreiecks.

Wn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Ellipse und Hyperbel in analytischer Behandlung von T. W. Openshaw, G. F. Walker, N. Sarkar, J. R. Wilson, R. Knowles, W. J. C. Sharp, C. Taylor, E. Haigh, A. L. Selby, E. Rutter, Wolstenholme, F. Budd, S. Tebay, Matz, J. O'Regan finden sich Ed. Times XXXVI 46-47, 48, 99 100, 102, 118-120; XXXVII. 30, 36-37, 70-71, 93-94, 118-119.

Wn.

D. Andere specielle Curven.

W. E. Story. Analytical proof of some properties of binodal quartics. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. C. p. 607.

H. Brocard. Interprétation de l'équation caractéristique de diverses courbes. Math. II. 25-30.

Es werden die Gleichungen der Kegelschnitte, der Kettenlinie, der Tractrix, der Cissoide, der Strophoide und der Evolute der Ellipse besprochen.

Mn. (Wn.).

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) I. 283-288.

Die Inflexionspunkte der Curve $x^3+y^3-3k\,xy+1=0$ sind die Durchschnitte der Coordinatenaxen mit der Curve. Zwei sind reell ($x, y = 0, -1;\ -1, 0$), die übrigen sind imaginär. Es wird sodann die Bedingung für das Zerfallen der Curve in drei Gerade aufgesucht.

O.

C. O. Boije of Gennas. On a remarkable property belonging to some cubics. Analyst IX. 108-110.

Der Verfasser untersucht die Fälle, in denen die symmetrische Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt

$$y^2 = x^2 \frac{Ax+B}{Cx+D}$$

die Eigenschaft hat, dass, wenn man von dem Doppelpunkte zwei Sehnen unter einem bestimmten Winkel zieht, die Verbindungslinie ihrer Endpunkte stets durch einen festen Punkt geht. Es findet dies in zwei Fällen statt, einmal, wenn der gegebene Winkel 60° (oder 120°) beträgt. Dann ist $B = 3D$, und der ist feste Punkt ist der Punkt

$$x = \frac{\gamma D}{C-3A}, \; y = 0.$$

Ein zweiter Fall ist der, in dem der Winkel 90° beträgt; dann $B = D$, und der feste Punkt ist

$$x = -\frac{B}{A}, \; y = 0.$$

Jn. (Wn.).

A. Mannheim. Théorèmes de géométrie. Mess. (2) XI. 190-191.

1) Ist c ein Punkt einer gegebenen Ellipse und m derjenige Punkt, in dem eine von c ausgehende Linie eine confocale Ellipse berührt, so ist der Ort für m eine Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkte in c, und die Tangenten der Curve in c stehen auf einander senkrecht. 2) Es sei A ein gegebener Kegelschnitt und c ein gegebener Punkt in derselben Ebene. Auf die von c ausgehenden Transversalen projicire man ihre respectiven Pole in Bezug auf A. Der Ort für diese Projectionen ist eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt und senkrechten Tangenten in c.

Glr. (Wn.)

M. Greiner. Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt. Hoppe Arch. LXVIII. 1-13.

Zunächst wird die Gleichung einer Curve dritter Ordnung

mit Rückkehrpunkt in der Form gewonnen:

$$F \equiv A^2C - mB^3 = 0,$$

wo A, B, C lineare Functionen von x, y, und m eine Constante. $A = 0$ gehört der Rückkehrtangente, $C = 0$ der Wendetangente, $B = 0$ der Geraden an, die den Rückkehrpunkt mit dem Wendepunkt verbindet. Ein Curvenpunkt p wird dann durch einen Parameter λ definirt, wobei $A:B:C = 1:\lambda:m\lambda^3$. Hierauf wird die gerade und die conische Polare eines Punktes (x_0, y_0), dann die Tangente in λ mit dem Tangentialpunkt besprochen. Es folgt die Beziehung $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ unter den Parametern dreier auf einer Geraden liegenden Curvenpunkte; die Begleiterin einer solchen Geraden u. s. w. Liegen sechs Curvenpunkte auf einem Kegelschnitte, so verschwindet die Summe ihrer Parameter, und ihre Tangentialpunkte liegen gleichfalls auf einem Kegelschnitt. In einfacher und übersichtlicher Darstellung werden noch mannigfache Sätze gegeben. Am Schlusse der Arbeit werden noch die Normalen der Curve besprochen. Durch einen beliebigen Punkt gehen im Allgemeinen sechs Normalen, durch den Rückkehrpunkt gehen vier Normalen der Curve. Mz.

E. DORLET. Solution d'une question de mathématiques spéciales. Nouv. Ann. (3) I. 256-265.

Auf einer gegebenen ebenen Curve dritten Grades mit dem Rückkehrpunkt O betrachtet der Herr Verfasser eine Reihe von Punkten

$$\dots A_{-n}, A_{-(n-1)}, \dots A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots,$$

so dass die Tangente der Curve in jedem derselben die Curve im darauf folgenden Punkte trifft, und löst die Aufgaben: 1) Wenn die Coordinaten des Punktes A_0 gegeben sind, so sollen die Coordinaten der Punkte A_n, A_{-n} gefunden und die Grenzlagen angegeben werden, gegen welche sich diese Punkte hinneigen, während der Index n in's Unendliche wächst. 2) Es soll die Curve gefunden werden, welche die Grenzlage von A_{-n} durchläuft, während die ursprüngliche Curve sich so verändert, dass ihr Rückkehrpunkt mit der Tangente in ihm und drei bestimmte

Curvenpunkte P, Q, R erhalten bleiben. 3) Es soll untersucht werden, wie sich die Durchschnittspunkte, welche die unter 2) gesuchte Ortscurve mit den Seiten des Dreiecks PQR hat, verändern, wenn die Ecken dieses Dreiecks auf Geraden, die durch den Punkt O gehen, beweglich angenommen werden.

Mz.

M. Greiner. Ueber den Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar oder eines Büschels. Hoppe Arch. LXIX. 30-44.

Nach der Methode der analytischen Geometrie, wobei ein Fundamentaldreieck angenommen wird, dessen Seiten die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ haben, wird bewiesen, dass der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die von einem gegebenen Punkte p an die Kegelschnitte einer Schaar gezogen werden können, eine Curve U von der dritten Ordnung ist, welche die sechs Schnittpunkte der vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnittschaar enthält und den Punkt p zum Doppelpunkt hat. Hierauf wird die Wendepunktslinie construirt und noch weiteres über die Curve U angegeben. Nachher wird bewiesen, dass der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die von einem gegebenen Punkte p an die Kegelschnitte eines Büschels gelegt werden können, eine Curve U von der dritten Ordnung ist, welche die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und den Punkt p enthält. Auch diese andere Curve U wird näher betrachtet; sie enthält ausser den fünf genannten Punkten noch die Centra von Geradenpaaren des Kegelschnittbüschels und den Punkt p', der zu p harmonisch in Bezug auf das Büschel zugeordnet ist. Die nun angegebenen neun Punkte bestimmen aber die Curve U noch nicht; man muss noch eine Angabe hinzunehmen, z. B. dass p' der Tangentialpunkt von p ist, d. h. dass pp' Tangente von U in p ist.

Mz.

BARBARIN. Sur la droite de Simson. Math. II. 106-109, 122-127.

Sätze über Curven dritter Ordnung. Mn. (Wn.).

W. J. C. SHARP, W. J. C. MILLER. Solutions of a question (6287). Ed. Times XXXVI. 35-38

Ist von einem Dreieck eine Seite c der Grösse und Lage nach, eine zweite Seite b der Grösse nach gegeben, so ist der Ort für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises die Curve

$$(b+c-x)y^2 = x(x-b)(x-c),$$

wobei c längs der x-Axe liegt, während der Anfangspunkt der Coordinaten der Schnittpunkt der Seiten b und c ist. Aehnliche Gleichungen gelten für die Orte der Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise. Wenn der Flächeninhalt des einbeschriebenen Kreises ein Maximum ist, so ist sein Radius das Doppelte des Abstandes der dritten Dreiecksseite vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Wn.

A. McINTOSH. Solution of a question (6745). Ed. Times XXXVI. 38-39

Construirt man in einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt, deren Doppelpunktstangenten auf einander senkrecht stehen, rechtwinklige Dreiecke, so dass der Scheitel des rechten Winkels jedesmal im Doppelpunkte liegt, so gehen alle Hypotenusen durch einen festen Punkt der Curve. Für das Folium des Cartesius ist der feste Punkt der Scheitel des Blattes. Wn.

Weitere Aufgaben und Sätze über Curven dritter Ordnung von R. A. ROBERTS, G. F. WALKER, MATZ, W. J. C. SHARP, J. L. McKENZIE, A. McINTOSH, T. WOODCOCK finden sich Ed. Times XXXVI. 43, 84, 88-89; XXXVII. 54-55. Wn.

A. H. Curtis. Geometrical proof that the caustic by reflexion of a cardioid produced by rays proceeding from its cusp is an epicycloid. Mess. (2) XII. 33-34.

Einfacher geometrischer Beweis des im Titel bezeichneten Satzes. Glr. (Wn.).

J. Pleyl. Zur Cardioide. Hoppe Arch. LXVIII. 166-180.

Der Herr Verfasser giebt zuerst die Cardioide als geometrischen Ort von Punkten, die nach einem bestimmten Gesetz aus den Punkten eines Kreises abgeleitet werden; hierauf gewinnt er ihre Gleichung und ermittelt aus analytischen Betrachtungen ihre Gestalt. Ist a Radius des Kreises, so hat jede durch den Rückkehrpunkt der Cardioide gehende Gerade mit dieser Curve noch zwei fernere Punkte P und S gemein, deren Abstand $4a$ beträgt; die Tangenten der Cardioide in P und S sind zu einander senkrecht und mögen sich in Q treffen; die Normalen der Cardioide in denselben Punkten sollen sich in R schneiden; dann ist $PQRS$ ein Rechteck. Auf die Veränderlichkeit dieses Rechtecks, während P und S die Cardioide durchlaufen, gründet der Herr Verfasser eine mechanische Construction dieser Curve.

Mz.

P. A. MacMahon. The cassinian. Mess. (2) XII. 118-120.

Im Messenger für 1877 (cf. F. d. M. IX. 1877. 504) hat Herr Hart die Rectification der Cassinischen Curve für den Fall behandelt, dass dieselbe aus zwei Ovalen besteht. In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode auf den Fall ausgedehnt, dass die Cassinoide eine geschlossene Curve bildet.

Glr. (Wn.).

Townsend, J. J. Walker. Solutions of a question (6891). Ed. Times XXXVII. 72-73.

Sind A, B, C die Foci eines Cartesischen Ovals, O der dreifache Focus, N die Länge des von einem Punkte G auf die Axe gefällten Lotes, so ist

$$N^2 = \frac{AG.BG.CG}{OG}.$$

Wn.

H. G. Zeuthen. Om mekanisk Konstruktion af Descartes' Ovaler ved Hjälp af Snore. Zeuthen T. (4) VI. 145-154.

Für die sogenannten Descartes'schen Ovale gilt bekanntlich die Relation $df_1 + ef_2 = b$, wo d, e, f Constanten, f_1 und f_2 die Entfernungen eines Punktes der Curve von zwei Brennpunkten bezeichnen. Zufolge dieser Eigenschaft können solche Curven mittels Fäden auf ähnliche Weise wie eine Ellipse construirt werden, falls d und e commensurabel sind. Es giebt aber auch andere Fälle, wo dieses gemacht werden kann, und Descartes hat schon ein solches Beispiel genannt. Wie Chasles gezeigt hat, haben diese Curven nämlich einen dritten Brennpunkt, dessen Existenz sich durch elementar analytische Betrachtung sofort ergiebt. Der Verfasser zeigt, dass die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} rf_2 - qf_3 &= p(a_3 - a_2), \\ pf_3 - rf_1 &= q(a_3 - a_1), \\ qf_1 - pf_2 &= r(a_1 - a_2), \end{aligned}$$

wo p, q, r Constanten, a_1, a_2, a_3 die Abscissen der Brennpunkte bedeuten, das nämliche Oval darstellen werden. Aus diesen folgt die neue Relation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 = c,$$

indem zugleich $lp + mq + nr = 0$. Aus dieser wird ersichtlich, dass durch gleichzeitige Benutzung aller drei Brennpunkte eine Construction durch Fäden möglich wird, sobald unter p, q, r eine homogene Gleichung der Geraden mit ganzen Coefficienten besteht. Der Verfasser knüpft hieran die Bemerkungen, dass die erwähnte Construction sofort die Bestimmung der Tangenten leistet, und dass die mechanische Construction immer möglich

ist, sogar durch zwei Brennpunkte, wenn man den einen ausserhalb der Ebene der Curve wählt. Gm.

Wolstenholme. Complete determination of the real foci and of the vector equation of the pedal of a given ellipse with respect to any proposed point. Lond., M. S. Proc. XIII. 70-76.

Der Inhalt der Arbeit ist im Titel bereits angegeben; es sei nur in der Kürze der Gang derselben skizzirt. Die Fusspunktcurve der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ in Bezug auf den Pol O, dessen Coordinaten X, Y sind, hat die Gleichung

$$(x^2+y^2-xX-yY)^2=a^2(x-X)^2+b^2(y-Y)^2.$$

Verlegt man den Coordinatenanfang nach O, so wird dieselbe

$$(x^2+y^2+xX+yY)^2=a^2x^2+b^2y^2.$$

O ist ein Doppelbrennpunkt dieser Curve; um die einfachen Foci zu finden, bestimmt der Herr Verfasser die Constante p so, dass die Gerade $x+iy=p$ die Curve berührt. Man hat für $\frac{y}{x}$ die Gleichung

$$(p(x-iy)+xX+yY)^2=a^2x^2+b^2y^2,$$

und diese muss gleiche Wurzeln haben; daraus ergiebt sich eine Bedingungsgleichung, welche durch Trennung des Reellen und Imaginären in zwei Gleichungen zerfällt. Wenn dann wieder der Ellipsenmittelpunkt Coordinatenanfang ist, so hat man für die Coordinaten (xy) der gesuchten Foci die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(x-X)^2}{b^2}-\frac{(y-Y)^2}{a^2}=1,$$

$$\frac{x(y-Y)}{a^2}=\frac{y(x-X)}{b^2},$$

wodurch zwei reelle Brennpunkte F_1, F_2 und zwei imaginäre bestimmt werden. Sucht man λ aus der Gleichung

$$\frac{X^2}{a^2-\lambda}+\frac{Y^2}{b^2-\lambda}=1$$

und hierauf k aus der Gleichung

$$k^2(a^2+b^2-\lambda)-2ka^2b^2+\lambda a^2b^2 = 0,$$

so kommt

$$x = \frac{X}{1-\frac{k}{a^2}}, \quad y = \frac{Y}{1-\frac{k}{b^2}}.$$

Es werden nun die Brennpunkte geometrisch bestimmt. Hierauf geht der Herr Verfasser zur Vectorgleichung der Fusspunktcurve über. Die Abstände eines Curvenpunktes von O, F_1, F_2 werden resp. mit r, r_1, r_2 bezeichnet, und schliesslich erhält man eine Gleichung $lr_1+mr_2 = r$, wo l und m Constanten.

Mz.

Wolstenholme. Determination of the foci of the pedal of a given parabola with respect to any proposed point, and investigation of different forms of the vector equation of the pedal. Lond., M. S. Proc. XIII. 77-79.

Es wird hier das Entsprechende für die Parabel, was in der vorangehenden Arbeit für die Ellipse geleistet wurde, gemacht. Die Fusspunktcurve (Pedale) einer Parabel $y^2 = 4ax$ in Bezug auf einen Pol O mit den Coordinaten X, Y hat die Gleichung

$$a(y-Y)^2+(x-X)(x^2+y^2-xX-yY) = 0.$$

Es wird nun wieder p so bestimmt, dass die Gerade $x+iy = p$ die Pedale berührt; dies führt auf folgende zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten (x, y) der gesuchten Brennpunkte:

$$(x-X)^2 = y^2-4ax; \quad (x-X)y+2a(y-Y) = 0.$$

Bestimmt man b aus der Gleichung

$$Y^2 = 4b(X+b-a),$$

und hierauf k aus der Gleichung

$$b = a(1+k)^2,$$

so ist

$$x = X+2ak, \quad y = \frac{Y}{1+k}.$$

Es folgt nun die geometrische Construction der Brennpunkte; dann wird die Vectorgleichung (wie in der vorigen Arbeit) hergeleitet. Mz.

H. HART. On the linear vectorial equation of the central pedal of a conic. Mess. (2) XII. 33.

Einfache Methode zur Ableitung der Gleichung der Fusspunktcurve in der oben genannten Form.

Glr. (Wn.).

H. M. JEFFERY. On certain quartic curves having a tacnode at infinity at which the line at infinity is the multiple tangent. Lond., M. S. Proc. XIII. 86-96.

Die hier betrachteten Curven vierter Ordnung sind in der Gleichung enthalten:

$$k\alpha^4 = u_2$$

und zerfallen in drei Arten, je nachdem der Satellitkegelschnitt ($u_2 = 0$), welcher stets die Curve vierter Ordnung an zwei Stellen dreifach berührt, eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist. Weitere Abarten treten auf, wenn die vierfache Asymptote ($\alpha = 0$) durch das Centrum dieses Kegelschnitts geht oder einer seiner Asymtoten parallel ist. Da nun ein Berührungsknotenpunkt im Unendlichen, nämlich der unendlich entfernte Punkt der vierfachen Asymptote ($\alpha = 0$) vorhanden ist, in welchem die unendlich entfernte Gerade mehrfache Tangente ist, so ist die Klasse der Curve vierten Grades höchstens die achte, kann aber auch die sechste, fünfte und vierte werden. Es wird nun eine genauere Discussion der fraglichen Curven vorgenommen, die Tangentialgleichung derselben aufgesucht und auch die Beziehungen unter den Constanten aufgestellt, welche statthaben, wenn zu den genannten Singularitäten noch weitere hinzutreten.

Mz.

E. MAHLER. Ueber eine Curve vierter Ordnung.
Hoppe Arch. LXVIII. 440-442.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen geht der Herr Verfasser zur Betrachtung derjenigen Curve über, die durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$x^2+y^2-u^2 = 0, \quad y-ux = 0$$

hervorgeht; diese Curve ist vierter Ordnung und hat die Gleichung

$$x^4+y^2x^2-y^2 = 0.$$

Es wird dann ihre sehr einfache Construction gegeben; ferner gesagt, dass sie symmetrisch gegen die Coordinatenaxen läuft und zwei der Y-Axe parallele Asymptoten hat, nämlich die Tangenten des Kreises

$$x^2+y^2 = 1$$

in seinen Durchschnitten mit der X-Axe. Der Coordinatenanfang ist Rückkehrpunkt und Wendepunkt zugleich. Die von einem der vier Curvenzweige, der x-Axe und anliegenden Asymptote eingeschlossene Fläche ist gegeben durch

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Der Krümmungsradius der Curve im Coordinatenanfang ist von der Grösse $\frac{1}{2}$.

Mz.

STAMMER. Geometrischer Ort der Punkte, von welchen aus zwei feste Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen. Hoppe Arch. LXVIII. 18-37.

Die beiden Strecken sollen in einer Ebene liegen. Dann ist der fragliche Ort im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung, bestehend aus der unendlich fernen Geraden und einer Curve dritter Ordnung, was evident, wenn man beachtet, dass die gesuchte Curve durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel er-

zeugt wird, welche die Kreispunkte und bez. die Endpunkte der beiden Strecken zu Basispunkten haben.

Der Verfasser behandelt, analytisch, nun die Fälle, in denen die C_3 in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfallen ist, und gelangt, neben evidenten, zu folgenden Ergebnissen: 1) Sind die Strecken parallel, so müssen sie gleiche Länge haben, und der Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die Endpunkte der Strecken geht. 2) Die Strecken sind ungleich, aber so gelegen, dass die Verbindungslinien ihrer Endpunkte auf einander senkrecht stehen und die eine derselben von der andern halbirt wird. Dann erhält man als Ort die Verbindungslinie derjenigen Endpunkte, welche die andere halbirt, und den Kreis durch die beiden andern Endpunkte und den Schnittpunkt der Strecken selbst. Rg.

RUSCH. Ein Beitrag zur Trisection. Hoppe Arch. LXVIII. 444-448.

Der Herr Verfasser erwähnt zuerst die Dreiteilung des Winkels auf mechanischem Wege; hierauf erklärt er die von Nikomedes zum Zweck der Trisection erfundene Conchoide und giebt dann eine andere Curve an, durch welche die Trisection gleichfalls vollzogen werden kann. Dies wird dann durch die Methode der analytischen Geometrie verificirt.

Mz.

W. HILLHOUSE. On a new curve for the trisection of an angle. Analyst IX. 181-184.

Der Verfasser teilt eine Methode mit zur mechanischen Beschreibung der Curve

$$x^2 = \frac{(2a^2-y^2)^2}{4a^2-y^2}$$

und wendet diese Curve zur Trisection eines Winkels an.

Jn. (Wn.).

P. V. Jensen. Elementär analytisk Fremstilling af Kurver beskrevne ved en bevägelig Trestangsforbindelse. Zeuthen T. (4) VI. 154-163.

In dem Viereck *ABCD* sind die Punkte *A* und *D* fest. Die Seiten $AB = CD = a$ können sich bezw. um *A* und *D* drehen, es wird der Ort des Mittelpunktes *M* der dritten Seite *BC*, dessen Länge $2b$ ist, gesucht. Legt man das Coordinatensystem so, dass die Punkte *A* und *D* die Coordinaten $(-c, 0)$ und $(c, 0)$ erhalten, so ergiebt sich die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten u. A. in der Form

$$y^2(x^2+y^2+b^2+c^2-a^2)^2+x^2(x^2+y^2+b^2-c^2-a^2)^2 = 4b^2c^2y^2.$$

An diese Gleichung knüpft der Verfasser eine elementare Untersuchung der Form und Lage der Curve, ihrer Tangenten und Singularitäten und erläutert dieselbe durch Beispiele und zahlreiche Figuren. Gm.

H. Hart. On the evolute of the symmetrical bicircular quartics. Quart. J. XVIII. 382-384.

Die hier behandelte Curve vierter Ordnung entsteht, wenn man vom Mittelpunkt *O* eines Kegelschnittes Normalen *OT* auf die Tangenten desselben fällt und auf jeder Normalen zwei gleichweit vom Fusspunkte *T* entfernte Punkte P, P' so annimmt, dass $OP \cdot OP' =$ const. Aus der leicht zu ermittelnden Polargleichung der Curve wird dann die Enveloppe ihrer Normalen gefunden. V.

A. Cayley. Solution of a question (6766). Ed. Times XXXVI. 64. Wn.

Townsend. On the atriphthaloid and atriphthalid of Dr. Haughton. Ed. Times XXXVII. 102-108.

Eingehende Discussion der Curve, deren Gleichung in Polar-

Coordinaten

$$r^2(r-h)+k^2\sec^2\omega = 0$$

ist, wo h und k positive Constanten bezeichnen. Diese, Atriphthalide genannte, Curve ist die einfachste Form der Meridiancurve derjenigen Fläche, welche die Oberfläche des Meeres bei ihren regelmässigen oscillatorischen Bewegungen um den Gleichgewichtszustand annehmen kann (ohne Berücksichtigung der Reibung). Auch das Volumen des durch Rotation obiger Curve entstehenden Körpers wird berechnet. Wn.

R. Tucker. The radial of an ellipse. Quart. J. XVIII. 311-313.

Wenn von einem Punkte gerade Linien ausgehen, welche gleich und parallel zu den Krümmungsradien einer gegebenen Curve sind, so heisst der Ort der Endpunkte dieser geraden Linien: Radiale der gegebenen Curve. Hier wird nun eine Ellipse $\alpha^2y^2+\beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ betrachtet und ihre Radiale in Bezug auf den Mittelpunkt gesucht; die Polargleichung dieser Radiale ist

$$r^2(\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi)^3 = \alpha^4\beta^4.$$

Mit Benutzung des Princips, dass die Radiale immer dieselbe bleiben muss, auf was für rechtwinklige Axen die gegebene Curve auch bezogen wird, erhält der Verfasser das Entsprechende für die allgemeine Gleichung der Ellipse

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c = 0,$$

wobei auch die andern Kegelschnitte mit einbegriffen sein können.

Mz.

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) I. 114-117.

Die allgemeine Gleichung der Tangenten an die Curve $27y^2 = 4x^3$ ist $y = mx-m^3$. An den Nachweis hierfür knüpfen sich Bestimmungen über geometrische Oerter. So wird nach dem Ort der Punkte gefragt, von denen man zwei Tangenten an die

Curve ziehen kann, welche zwei conjugirten Durchmessern eines Kegelschnitts parallel sind. Es ergiebt sich eine Parabel. O.

E. W. Symons, C. H. Swift. Solutions of a question (6431). Ed. Times XXXVI. 75-76.

Der Ort eines Punktes von der Beschaffenheit, dass die von ihm an eine gegebene Ellipse gezogenen Normalen ein harmonisches Büschel bilden, ist die Curve

$$(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3+54a^2b^2c^4x^2y^2 = 0; \quad (c^2 = a^2-b^2).$$

Wn.

E. W. Symons, G. F. Walker. Solution of a question (6395). Ed. Times XXXXI. 77-78.

Sind von einem Punkte der Evolute einer Ellipse die drei Normalen an die Ellipse gezogen, so ist der Ort für den Mittelpunkt des durch die Fusspunkte gehenden Kreises

$$4(a^2x^2+b^2y^2)^3 = a^2b^2(a^2-b^2)^2x^2y^2.$$

Eine der gemeinsamen Sehnen des Kreises und der Ellipse geht ferner durch den Mittelpunkt der Ellipse. Wn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über geometrische Oerter von E. Anthony, C. Morgan, J. Young, E. W. Symons, H. Hayash, E. Rutter, G. F. Walker, J. H. Turrell, Wolstenholme, Genese, T. Woodcock, R. Knowles, W. B. Grove, Ch. Ladd, W. J. C. Miller, D. Edwardes, G. M. Reeves, Townsend, Nash, A. H. Curtis finden sich Ed. Times XXXVI. 49, 91, 92-93, 100, 109-110, 111-113, 113-114; XXXVII. 53.

Wn.

H. Résal. Sur quelques applications du théorème de Savary, relatif aux enveloppes des courbes planes. Nouv. Ann. (3) I. 7-15.

Das Theorem von Savary ist folgendes: Rollt in einer Ebene eine Curve S auf einer festen S'; ist A der augenblickliche Berührungspunkt, R der Krümmungsradius von S, R' derjenige von S' in A, ma irgend eine in der Ebene von S gezogene Curve, Am die Länge der von A auf ma gezogenen Normale, φ der Winkel, den die Richtung von Am mit derjenigen von R bildet, ϱ der Krümmungsradius von ma im Punkte m und endlich ϱ' der Krümmungsradius der Enveloppe von ma im gleichen Punkte m, so besteht die Relation

$$\left(\frac{1}{\varrho'-p}+\frac{1}{\varrho+p}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}.$$

Hier ist p gleich der Länge der Normale Am, und ausserdem ist vorausgesetzt, dass die Curven S und S' ihre Convexitäten einander gegenüber setzen; im andern Falle würde beim grössten der beiden R, R' in vorstehender Formel das Minuszeichen stehen.

Aus diesem Theorem werden nun verschiedene Aufschlüsse über Enveloppen gewonnen. Zuerst seien S und S' zwei Kreise; dann handelt es sich um die Enveloppe einer Hypocycloide oder Epicycloide. Darauf wird die Enveloppe der Evolvente eines mit S concentrischen Kreises gesucht u. a. m. Die Resultate sind in der Arbeit selbst nachzusehen. Mz.

C. B. S. Cavallin. Ett geometriskt medalvärde. Zeuthen T. (4) VI. 95-96.

Beweis der folgenden Sätze: 1) Wenn ein bewegliches Vieleck, welches einer geschlossenen convexen Linie umgeschrieben ist, um dieselbe eine ganze Umdrehung macht, bis es in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, indem während der ganzen Bewegung die Winkel constante bleiben, so wird der Mittelwert des Perimeters gleich dem Perimeter eines gleichwinkligen Polygons sein, welches einem Kreise mit dem nämlichen Umkreis, wie die gegebene Curve, umgeschrieben ist. 2) Wenn eine geschlossene convexe Curve auf zwei festen Geraden rollend eine ganze Umdrehung macht, so ist der Mittelpunkt des zwischen

den Berührungspunkten liegenden Bogens immer der nämliche für alle Curven mit gleichem Umfange. Gm.

E. Habich. Sur les roulettes. Math. II. 145-148.

Rollt eine ebene Curve A auf einer Geraden D, und beschreibt dabei ein mit A fest verbundener Punkt m die Curve C, so beschreibt m, wenn die Fusspunktcurve von A in Bezug auf m auf der Curve C rollt, die Gerade D. Die Steiner'schen Sätze über Flächeninhalt und Bogenlänge von Rollcurven ergeben sich aus obigem Satze. Mn. (Wn.).

H. M. Jeffery. On a tangential property of regular hypocycloids and epicycloids. Lond, R. S Proc. XXXIII. 105.

Cly.

H. M. Jeffery. On the rectifiable spherical epicycloid or involute of a small circle. Brit. Ass. Rep. 1882.

Csy.

Minchin. Solution of a question (6892). Ed. Times XXXVII. 44-45

Wn.

D. V. Wood. Solution of a problem. Analyst IX. 60.

Diejenige Curve, bei der die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, der Bogenlänge proportional ist, ist die Kettenlinie. (Bekannt).

Jn. (Wn.).

E. Césaro. Sur la tractrice. Math. II. 217-219.

Es wird eine gewisse Dualität zwischen der Tractrix und der logarithmischen Spirale abgeleitet. Mn. (Wn.).

E. W. SYMONS, HAMMOND. Solution of a question (6583). Ed. Times XXXVI. 54.

Die Gleichung

$$\left(\frac{1+p^2}{q}\frac{d}{dx}\right)^n \cdot \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = 0$$

stellt diejenige Curve dar, deren $(n-1)^{te}$ Evolute ein Kreis ist.

Wn.

W. H. BESANT. Solution of a question (6253). Ed. Times XXXVI. 63.

Wn.

Lösungen weiterer Aufgaben über transcendente Curven von W. J. C. SHARP, C. MORGAN, D. EDWARDES finden sich Ed. Times XXXVI. 67-68, 107.

Wn.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

TH. CRAIG. On certain metrical properties of surfaces. Sylv, Am. J. IV. 297-320.

Fläche in einem Raume von $n+1$ Dimensionen wird die durch eine Gleichung zwischen $n+1$ Coordinaten x beschränkte Mannigfaltigkeit genannt. Die x sind als orthogonal aufgefasst; sie werden zur Bestimmung der Fläche als Functionen von n Parametern u ausgedrückt, dann die Grundformeln entwickelt, das Linienelement und das Flächenelement in den Parametern dargestellt. Mit der Fläche S wird eine andere Fläche Σ in Verbindung gebracht, deren Coordinaten y gegebene Functionen

der x sind. Der Quotient der zwei Flächenelemente für gleiche Grenzen der Parameter wird durch eine Determinante dargestellt, deren Elemente die partiellen Differentialquotienten der y nach den x und die Richtungscosinus der Normalen beider Flächen sind, ein Resultat, welches für drei Dimensionen ohne Beweis von Neumann aufgestellt sein soll. Substituirt man den y die Richtungscosinus der Normale von S, so geht Σ in die sogenannte Einheitskugel, $d\Sigma : dS$ in das Krümmungsmass von S über. Letzteres wird in der Form ausgedrückt $V' : V^{n+2}$ in einfachster Analogie mit dem Gauss'schen Ausdruck für $n = 2$. Hier ist V bestimmt durch $dS = V du_1\, du_2 \dots du_n$, ausserdem wird V^2 durch die Determinante n^{ten} Grades von den n^2 Coefficienten der Producte der du in der Entwickelung des Quadrats des Linienelements, d. i. von den n^2 Fundamentalgrössen erster Ordnung ausgedrückt. Setzt man für letztere die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung im Gauss'schen Sinne, so geht V in V' über. Die Gleichung, deren Wurzeln die Hauptkrümmungsradien ϱ sind, ist die Determinante von $E'_{ik}\varrho - E_{ik}V$ gleich Null gesetzt, wo E_{ik}, E'_{ik} die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung bezeichnen. Hieraus folgt leicht das Product der Hauptkrümmungen als Krümmungsmass und die Summe der Radien, die Null gesetzt, die Minimalfläche bedingt. Es werden noch einige Relationen an drei Dimensionen entwickelt und auf n Dimensionen angewandt, die indes nicht einfach genug zur Wiedergabe sind. Dann wendet sich der Verfasser zu den Curven und bestimmt das osculirende „k-flat“ (lineares Gebilde von k Dimensionen), welches sich leicht durch Elimination der Coefficienten zwischen den linearen Gleichungen ergiebt, welche den Durchgang des k-flats durch consecutive Curvenpunkte bedingen. H.

TH. CRAIG. Note on areas of corresponding surfaces.
J. Hopkins Circ. 1882. 209-210.

Das Verhältnis zweier correspondirender Flächenelemente wird mittels einfacher Determinantenumformung als vierreihige

Determinante dargestellt. Wie der Herr Verfasser nachträglich bemerkt hat, findet sich die bez. Formel bereits, wenn auch ohne Beweis, bei C. Neumann, Clebsch Ann. XI. p. 306.

My.

A. PICART. Note sur les paraboloïdes du second ordre osculateurs aux surfaces. Nouv. Ann. (3) I. 163-171.

Ist $Z = f(X,Y)$ die Gleichung einer Fläche, x,y,z ein Punkt derselben, und setzt man $X = x+(X-x)$; $Y = y+(Y-y)$ ein, so folgt, die Entwickelbarkeit nach Taylor vorausgesetzt, bekanntlich:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)+\frac{1}{2}[r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2]+\dots$$

Bricht man die Entwickelung nach den hingeschriebenen Gliedern ab, so hat man die Gleichung eines die Fläche im Punkte x,y,z osculirenden Paraboloides. Es werden zunächst mehrere Beziehungen zwischen diesem Paraboloide und der Fläche besprochen, und dann wird die Enveloppe einer Schaar solcher Paraboloide untersucht, deren Osculationspunkte auf einer gegebenen Curve der Fläche liegen, besonders unter der Annahme, dass diese Curve eine asymptotische Linie der Fläche ist. Da die Axen der betrachteten Paraboloide der Z-Axe parallel sind, dieselben also von der zufälligen Wahl des Coordinatensystems abhängen, so vermag der Referent diesen Paraboloiden und den sich daran anschliessenden Untersuchungen eine besondere Bedeutung für die Geometrie nicht beizulegen. A.

C. SEIDELIN. Om Konstruktion af Tangenter til Róringskurven mellem en Omdrejningsflade og en omskreven Kegle eller Cylinder. Zeuthen T. (4) VI. 33-35.

Neue Construction der Tangente der Berührungscurve einer Umdrehungsfläche mit einem umgeschriebenen Kegel oder Cylinder mit Hülfe der osculirenden Kegelschnittsfläche. Gm.

P. Mansion. Principe fondamental relatif au contact de deux surfaces qui ont une génératrice commune. Belg., Bull. (3) III. 753-760.

E. Catalan. Rapport. Belg., Bull. (3) III. 716-717.

Zwei Flächen, die durch eine beliebig gegebene Curve erzeugt werden und deren Gleichungen $(n+1)$ Parameter enthalten, haben eine Berührung k^{ter} Ordnung in allen Punkten einer gemeinsamen erzeugenden Curve, wenn sie diese Eigenschaft in n Punkten jener gemeinsamen Erzeugenden haben.

Mn. (Wn.).

S. Lie. Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten. Lie Arch. VII. 179-193.

Eine continuirliche Gruppe von Transformationen zwischen $x_1, \dots, x_n$ mit r Parametern enthält (Gött. Nachr. 1874. siehe F. d. M. VI. 1874. 93) r infinitesimale Transformationen

$$A_k f = X_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

welche paarweise in der Beziehung $(A_i A_k) = \Sigma c_{iks} A_s$ stehen. Soll nun eine Function $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ (oder eine Gleichung $\varphi = 0$) diese Gruppe gestatten, so ist das gleichzeitige Bestehen der Relationen

$$A_1 \varphi = 0, \dots, A_r \varphi = 0$$

erforderlich und hinreichend (Clebsch Ann. XI. p. 535. s. F. d. M. IX. 1877. 261), so dass φ eine arbiträre Function von r unabhängigen Lösungen unseres vollständigen Systems bezeichnet, dabei vorausgesetzt, dass man von singulären Lösungen absieht. Wünscht man andererseits alle Functionen φ, die eine in der Gruppe enthaltene Untergruppe gestatten, so bestimmt man zunächst durch algebraische Operationen (Lie Arch. I. s. F. d. M. VIII. 1876. 212) alle in der Gruppe enthaltenen Untergruppen und verfährt sodann nach den soeben angegebenen Regeln. Diese schon früher vom Verfasser entwickelte Theorie wird in der vorliegenden Note für einen speciellen Fall im Detail durch-

geführt, nämlich für drei Variable x, y, z und für die allgemeine projectivische Gruppe. Es handelt sich also um die allgemeine Bestimmung aller Flächen, die eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe gestatten. Zusammen mit Klein behandelte der Verfasser schon 1870 dieses Problem unter der speciellen Voraussetzung, dass die Transformationen der Untergruppe permutabel sind. Neuerdings beschäftigte sich Poincaré beiläufig mit demselben Problem, in dem er jedoch einige Beschränkungen einführte. Die vorliegende Note bezweckt eine erschöpfende Erledigung der Aufgabe. Unter den erhaltenen Resultaten mögen die folgenden hervorgehoben werden. Gestattet eine Fläche mehr als zwei infinitesimale und lineare Transformationen, so ist sie entweder ein Kegel oder eine Developpable einer Curve dritter Ordnung, oder eine Fläche zweiten Grades. Nimmt eine Figur (Fläche oder Curve) durch Ausführung aller Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen ∞^4 Lagen an, so ist sie eine Kugel oder Gerade. Daher hat die Plücker'sche Liniengeometrie und die vom Verfasser begründete Kugelgeometrie eine ausgezeichnete Stellung unter allen möglichen geometrischen Interpretationen einer vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. L.

S. Lie. Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. Lie Arch. VII. 155-176.

Der Verfasser beschäftigte sich schon in mehreren früheren Abhandlungen gelegentlich (Christiania Forh. 1872. Lie Arch. IV., siehe F. d. M. XI. 1879. 528; Clebsch Ann. XIV. s. F. d. M. XI. 1879. 587) mit Flächen, die durch Translationsbewegung einer Raumcurve c erzeugt werden, welche somit durch Gleichungen der Form

$$x = f_1(c)+\varphi_1(k),\quad y = f_2(c)+\varphi_2(k),\quad z = f_3(c)+\varphi_3(k)$$

darstellbar sind. Eine erste evidente Eigenschaft dieser Flächen, denen Voss (Klein Ann. XIX. 1-27, s. F. d. M. XIII. 1881. 562) den Namen Translationsflächen beigelegt hat, ist, dass sie ausser der schon besprochenen Erzeugung immer eine zweite derartige

Erzeugung durch Translation einer Curve (k) gestatten. Die vorliegende Note erledigt die schwierige Frage nach allen Flächen, die in mehr als zwei Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden können. Dieses Problem ist deswegen bemerkenswert, weil es einen überraschenden Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie der algebraischen ebenen Curven (Kegel) vierter Ordnung darbietet. Gestattet nämlich eine Fläche nicht allein Translationserzeugungen durch zwei Curven c_1 und k_1, sondern zugleich derartige Erzeugungen durch zwei weitere Curven c_2 und k_2, so befriedigen die Tangenten dieser vier Raumcurven immer eine gemeinsame algebraische Relation vierten Grades

$$F_4\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

und dabei kann F_4 eine beliebige irreductible oder reductible ganze Function vierter Ordnung von zwei Argumenten bezeichnen. Wählt man die in F_4 eingehenden arbiträren Constanten in bestimmter Weise, und zwar so, dass $F_4 = 0$ entweder eine irreductible Relation darstellt oder in eine Gleichung dritten Grades und eine ersten Grades zerfällt, so giebt es immer eine ganz bestimmte transcendente Fläche, die unserer Wahl entspricht. Zerfällt $F_4 = 0$ in zwei irreductible Gleichungen zweiten Grades, so giebt es zwei zugehörige Flächen; die eine entspricht der Annahme, dass c_1 und c_2 die eine Gleichung, k_1 und k_2 die zweite erfüllen; die zweite Fläche entspricht der Annahme, dass c_1 und k_1 die eine, c_2 und k_2 die zweite Gleichung erfüllen. Dieser letzte Unterfall liefert die von Scherk (Crelle XIII. 185) entdeckte Minimalfläche mit ∞^1 Translationserzeugungen zusammen mit ihren projectivischen Verallgemeinerungen und Ausartungen. L.

Chomé. Sur une propriété des surfaces gauches.
Math. II. 82-85.

Analytischer Beweis des Satzes von Hachette.

Mn. (Wn.).

O. Böklen. Ueber die Krümmung der Flächen.
Schlömilch Z. XXVII. 369-374.

Es wird zuerst ein confocales System dreier Flächen zweiten Grades nebst einem Kegel, dessen Axen die Normalen der drei Flächen im Scheitelpunkte sind, und eine den Kegel berührende weitere confocale Fläche betrachtet, die Kegelwinkel in seinen Axenebenen, die Winkel zwischen den Focallinien und denselben im besondern Falle, die Hauptkrümmungsradien der drei Flächen und die Abstände des Mittelpunktes von den drei Berührungsebenen im Durchschnitt analytisch ausgedrückt. Mit Anwendung auf eine Fläche zweiten Grades A, welche eine beliebige Fläche F berührt, ergeben sich folgende Sätze. Die Focallinien aller Flächen A, welche F in einem Punkte S berühren, liegen auf Kegeln, deren gemeinsame Axe die Normale von F ist. Berühren sich ausserdem die Krümmungslinien von A und F, so liegen die Focallinien von A auf coaxialen Kegeln. Sämmtliche Flächen zweiten Grades A, welche mit einer beliebigen Fläche F in einem Punkte S eine Berührung zweiter Ordnung haben, sofern die Verhältnisse der Hauptkrümmungsradien von A und F gleich sind, sind dadurch charakterisirt, dass ihre Focallinien auf einem System von confocalen Kegeln liegen. Gehen die Ebenen der Focallinien der Flächen zweiten Grades, welche mit einer Fläche in einem Punkte eine Berührung zweiter Ordnung haben, durch einen Punkt der Normale, so liegen sie zugleich auf einem Kegel, und umgekehrt. Durch jeden Punkt einer beliebigen Fläche gehen zwei Gerade, auf welchen die Brennpunkte aller Rotationsflächen liegen, die mit der Fläche eine Berührung zweiter Ordnung haben; diese Rotationsflächen sind durch Drehung eines Kegelschnittes um die Axe der Brennpunkte entstanden. Ihre Axen gehen durch den Mittelpunkt des kleinen Hauptkrümmungskreises der Fläche. Berührt ein Ellipsoid eine Fläche in zweiter Ordnung, so schneidet die Ebene der Focalellipse die Normale zwischen dem Berührungspunkte und dem Mittelpunkte des kleineren Hauptkrümmungskreises, die Ebene der Focalhyperbel schneidet zwischen beiden Mittelpunkten und diejenige der ima-

ginären Ellipse jenseits vom Mittelpunkte des grösseren Hauptkrümmungskreises. Die Focalellipsen liegen auf Kegeln, welche die Focallinien des Berührungspunktes einschliessen, die Focalhyperbeln auf Kegeln, welche sie trennen. H.

De Salvert. Mémoire sur les ombilics coniques. Brux. S. sc. VII. 143-248.

C. Jordan. Rapport sur ce mémoire. Brux., S. sc. VII. A. 49-50.

Die vorliegende Arbeit, welche die Fortsetzung einer früher besprochenen Arbeit desselben Verfassers bildet (cf. F. d. M. XIII. 1881. 567-572), behandelt die Krümmung in singulären Punkten von krummen Flächen. Die in der früheren Arbeit bewährte Methode, die darin besteht, stets die drei Variabeln x, y, z gleichmässig zu behandeln, ist hier absolut notwendig; denn es ist unmöglich, die gestellte Frage mittels der gewöhnlich benutzten Derivirten $p, q, r, s, t\dots$ zu lösen, da diese Grössen für singuläre Punkte sämmtlich unbestimmt werden.

Der Verfasser untersucht die Krümmungen der verschiedenen ebenen Schnitte, welche man durch einen singulären Punkt einer Fläche legen kann. Er nennt diese Punkte Nabelpunkte (ombilics) in weiterem Sinne, eine Bezeichnung, die völlig gerechtfertigt ist wegen der vollkommenen Analogie der Krümmungsverhältnisse dieser Punkte mit denen der Nabelpunkte in gewöhnlichem Sinne. Eine analoge Rolle, wie die Flächennormale bei der Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der nicht singulären Punkte, spielt in der vorliegenden Frage eine andere Linie, die Axe des in dem singulären Punkte an die Fläche gelegten Tangentenkegels. Dasselbe Verfahren, das in der früheren Arbeit die Krümmung eines Normalschnitts ergiebt, führt hier auf die Krümmung eines durch die Kegelaxe gelegten ebenen Schnitts. Um den Ausdruck für diese Krümmung zu bilden, muss man, da die Zahl der vorkommenden Terme eine sehr grosse ist, eine abgekürzte Bezeichnung gebrauchen, die der Verfasser bereits in seiner früheren Arbeit benutzt hat; dieselbe besteht darin, dass

überall im Zähler und Nenner der Differentialquotienten das Zeichen d fortgelassen wird, so dass im Zähler nur die zu differentiirende Function steht, im Nenner die Variable, nach der differentiirt wird. Ausserdem wird von der häufig benutzten Bezeichnung höherer Differentialquotienten mittels symbolischer Potenzen Gebrauch gemacht; und diese Symbole werden, zum Unterschiede von gewöhnlichen Potenzen, durch doppelte Parenthesen kenntlich gemacht.

Es seien nun x', y', z' neue den ursprünglichen parallele Coordinaten, deren Anfangspunkt der betrachtete singuläre Punkt x, y, z ist. Dass der Punkt ein singulärer ist, wird durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$(1) \qquad \varphi(x,y,z) = 0, \quad \frac{\varphi}{x} = 0, \quad \frac{\varphi}{y} = 0, \quad \frac{\varphi}{z} = 0.$$

Die Gleichung des Tangentenkegels ist ferner, wie bekannt:

$$\left(\left(x' \cdot \frac{\varphi}{x} + y' \cdot \frac{\varphi}{y} + z' \cdot \frac{\varphi}{z}\right)\right)^2 = 0, \quad \text{oder} \quad F(x',y',z') = 0.$$

Die Richtungscosinus p, q, r der Kegelaxe sind dann durch die Gleichungen bestimmt:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1,$$

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}}{p} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q}}{q} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial r}}{r},$$

wobei p, q und r die Argumente von F sind. Durch die Kegelaxe und diejenige Erzeugende des Kegels (Tangente im singulären Punkte), welche die Richtungscosinus a, b, c hat, sei nun ein ebener Schnitt gelegt. Dann ist der Krümmungsradius desselben durch die Formel bestimmt

$$R = \pm \frac{3}{2} \frac{a\frac{\partial F}{\partial p} + b\frac{\partial F}{\partial q} + c\frac{\partial F}{\partial r}}{\left(\left(a\frac{\varphi}{x} + b\frac{\varphi}{y} + c\frac{\varphi}{z}\right)\right)^3 \sqrt{(qc-rb)^2 + (ra-pc)^2 + (pb-qa)^2}},$$

eine Formel, die der in der früheren Arbeit für einen Normalschnitt in einem gewöhnlichen Punkte der Fläche abgeleiteten

Gleichung

$$R = \frac{\pm \Delta_1 \varphi}{\left(\left(a\frac{\varphi}{x} + b\frac{\varphi}{y} + c\frac{\varphi}{z}\right)\right)^2}$$

ganz analog ist.

Nachdem der Verfasser die eben genannte Formel auf die vier Doppelpunkte der Fresnel'schen Wellenfläche angewandt hat, untersucht er weiter die Bedingungen dafür, dass der betrachtete singuläre Punkt ein conischer Nabelpunkt (ombilic conique) sei, d. h. dass 1) der Tangentenkegel ein Rotationskegel sei, 2) die durch die verschiedenen Erzeugenden des Kegels gelegten Schnitte dieselbe Krümmung haben. Die erste dieser Bedingungen erfordert, dass

$$(2) \qquad \frac{\varphi^2}{x^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{zx}\,\frac{\varphi^2}{xy}}{\frac{\varphi^2}{yz}} = \frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{xy}\,\frac{\varphi^2}{yz}}{\frac{\varphi^2}{zx}} = \frac{\varphi^2}{z^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{yz}\,\frac{\varphi^2}{zx}}{\frac{\varphi^2}{xy}}$$

ist. Zum Ausdruck für die zweite Bedingung gelangt der Verfasser auf genau demselben Wege, auf dem er in der früheren Arbeit die sphärischen (d. h. gewöhnlichen) Nabelpunkte bestimmt hatte, die bisher von allen Autoren allein in Betracht gezogen sind. Nur ist das frühere Verfahren hier auf höhere Differentialquotienten, resp. auf Terme von höherer Ordnung anzuwenden. Das Charakteristische der Ableitung besteht in einer Ausdehnung der berühmten Lagrange'schen Methode der Multiplicatoren, die man gewöhnlich als nur auf lineare Gleichungen anwendbar ansieht, auf nicht lineare Gleichungen. So gelangt der Verfasser mit einer in Anbetracht der scheinbaren Complication der Formeln bemerkenswerten Leichtigkeit zur Bestimmung der Coordinaten eines conischen Nabelpunktes, sowie der Grösse seines Krümmungsradius R. Die Resultate, die ganz analog den früheren in Bezug auf sphärische Nabelpunkte sind, sind in folgenden acht gleichen Verhältnissen, oder um zu addiren in sieben völlig symmetrischen Gleichungen enthalten:

(3)

$$\frac{\frac{\varphi^2}{z^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\cdot\frac{\varphi^4}{y^4}+\frac{\varphi^2}{y^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi^2}{y^2}\right)\cdot\frac{\varphi^4}{z^4}-3\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\left(\frac{\varphi^3}{yz^2}+\frac{\varphi^3}{y^2z}\right)}{\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^3\left[\frac{\varphi^2}{z^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\left(\frac{\varphi^2}{yx}\right)^3+\frac{\varphi^2}{y^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi^2}{y^2}\right)\left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^3-3\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\left(\frac{\varphi^2}{yx}+\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right]}$$

und zwei analoge, welche durch Circular-Permutationen der x, y, z daraus hervorgehen

$$=\frac{\frac{\varphi^2}{z^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\cdot\frac{\varphi^3}{y^3}-\frac{\varphi^2}{y^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)\cdot\frac{\varphi^3}{z^3}+3\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\left(\frac{\varphi^3}{yz^2}+\frac{\varphi^3}{y^2z}\right)}{\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^3\left[\frac{\varphi^2}{z^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\left(\frac{\varphi^2}{yx}\right)^3-\frac{\varphi^2}{y^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)\left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^3+3\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\left(\frac{\varphi^2}{yx}+\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right]}$$

und zwei analoge, endlich:

$$=\frac{\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yz}\cdot\frac{\varphi^3}{x^3}+\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{zx}\cdot\frac{\varphi^3}{y^3}+\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{xy}\cdot\frac{\varphi^3}{z^3}-3\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^3}{xyz}}{\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy}\left[\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2+\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}\left(\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2+\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2-3\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy}\right]}$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy}}\;\frac{\sqrt{\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\left(2\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}+\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{yz}\right)+\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}\left(2\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}+\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{zx}\right)+\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}\left(2\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{xy}\right)}}{\left[\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}-\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{yz}\right)+\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}\left(\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}-\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{zx}\right)+\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{xy}\right)\right]}.$$

In einem Schlussparagraphen giebt der Verfasser Anwendungen der von ihm abgeleiteten Formeln auf einige Beispiele, die zugleich zur Prüfung der Richtigkeit der Formeln dienen. Er wählt zu dem Zwecke drei einfache Fälle derart aus, dass man sich von der Richtigkeit der für diese Fälle durch die obige Theorie gegebenen Formeln auch a priori, oder wenigstens durch Betrachtungen, die von jener Theorie unabhängig sind, leicht überzeugen kann. Um eine Idee von dieser Art der Bestätigung zu geben, genügt es, das letzte Beispiel anzuführen. Dasselbe betrifft die Fläche dritter Ordnung

$$(4)\qquad x+y+z=\frac{m(x^2+y^2+z^2+2\lambda yz+2\mu zx+2\nu xy)}{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\delta yz+2\varepsilon zx+2\eta xy},$$

deren Gleichung neun unbestimmte Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \mu, \nu$ enthält, während m ein gegebener linearer Parameter ist. Der Verfasser ist auf dies Beispiel durch die Ueberlegung geführt, dass die Coordinaten jedes einzelnen conischen Nabelpunktes zwölf Gleichungen genügen müssen, nämlich den obigen mit (1), (2) und (3) bezeichneten Gleichungen; dass also, nach Elimination der Coordinaten, noch neun Bedingungsgleichungen für die in der Flächengleichung enthaltenen Coefficienten übrig bleiben. Die Aufgabe ist nun, in der Fläche (4) die unbestimmten Constanten so zu bestimmen, dass die Fläche wenigstens einen conischen Nabelpunkt besitzt. Die Gleichungen (2) und (3) führen auf die Relationen

$$(5)\qquad \alpha=\beta=\gamma=g,\quad \delta=\varepsilon=\eta=h,\quad \lambda=\mu=\nu=k;$$

für diese Werte der Constanten hat die Fläche (4) einen conischen Nabelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten, welche Werte man auch den Grössen g, h, k beilegen mag. Der Krümmungsradius für alle ebenen Schnitte, die durch den Nabelpunkt gelegt sind, hat nach der letzten Gleichung (3) den Wert

$$(6)\qquad R=m\,\frac{k^{\frac{3}{2}}(1+2k)^{\frac{1}{2}}}{gk-h}.$$

Die Richtigkeit dieses Resultats aber kann man sehr leicht direct nachweisen. Denn mit Benutzung von (5) kann man die Glei-

chung der Fläche folgendermassen schreiben:

$$x+y+z=\frac{m[(l-k)(x^2+y^2+z^2)+k(x+y+z)^2]}{(g-h)(x^2+y^2+z^2)+h(x+y+z)^2}.$$

Aus dieser Form aber erkennt man sofort, dass die Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Rotationsaxe diejenige durch den Anfangspunkt gehende Linie ist, welche mit den positiven Axen gleiche Winkel bildet. Daraus ist klar, dass der Anfangspunkt ein singulärer Punkt ist und allen Bedingungen eines conischen Nabelpunktes genügt. Bestimmt man ferner die Meridiancurve der Rotationsfläche und berechnet mit Hülfe derselben direct den Krümmungsradius im Anfangspunkt, so gelangt man unabhängig von der allgemeinen Theorie auf den Wert (6).

Die allgemeine Theorie giebt somit, mit Ausschluss jedes Zweifels und jeder Unsicherheit, die Grundlagen zur Bestimmung bemerkenswerter Punkte, die als conische Nabelpunkte bezeichnet werden und eine Singularität höherer Art darstellen. Trotzdem können dieselben nach dem Obigen bei jeder Oberfläche auftreten, deren Gleichung wenigstens neun unbestimmte Constanten enthält. Mn. (Wn.).

R. Lipschitz. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften. Berl. Ber. 1882. 1077-1087.

Die Untersuchung wird durchweg für eine n-fache Mannigfaltigkeit geführt, auf welche sich überall die Raumbegriffe leicht verständlich erweitern lassen. Fläche heisst die durch die Gleichung $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) =$ const. zwischen den orthogonalen Coordinaten auf $(n-1)$ Unabhängige beschränkte Mannigfaltigkeit. Mögen hier die Summen Σ und Σ' sich beziehungsweise auf die Zeigerwerte 1 bis n und 1 bis $n-1$ erstrecken. Durch die Fläche ist die Krümmung eines Normalschnitts

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\Sigma \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} dx_\beta\, dx_\gamma}{\sqrt{N}\Sigma \partial x^2}; \quad N=\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$$

bestimmt, ein Ausdruck, der, wenn man die Richtungscosinus der Normale

$$\xi_\beta = N^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta}$$

einführt, übergeht in

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\Sigma d\xi dx}{\Sigma dx^2}.$$

Zur Bestimmung der Maxima und Minima, also der Hauptkrümmungen, dienen, wie der Verfasser früher nachgewiesen, die n Gleichungen:

$$d\xi_\beta - \frac{1}{\varrho} dx_\beta = 0,$$

woraus nach Elimination der dx_β:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\varrho}, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{1}{\varrho}, & \ldots, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} - \frac{1}{\varrho} \end{vmatrix} = 0.$$

Der von $\frac{1}{\varrho}$ freie Term, d. i. die Functionaldeterminante, drückt daher das Product der Hauptkrümmungen aus. Setzt man

$$\xi_\beta = \nu_\beta \xi_n,$$

so lässt sich der Zähler in (4) in doppelter Weise transformiren:

$$(19) \qquad \begin{cases} \Sigma d\xi dx = \xi_n \Sigma' d\nu dx = \xi_n \sum_\alpha' \sum_\beta' \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta \\ \qquad = \xi_n \sum_\alpha' \sum_\beta' \frac{\partial x_\alpha}{\partial \nu_\beta} d\nu_\alpha d\nu_\beta. \end{cases}$$

Es wird nun gesetzt:

$$(16) \qquad \xi_n^{-2} \Sigma dx^2 = \sum_\alpha' (\sum_\beta' P_{\alpha\beta} d\nu_\beta)^2,$$

$$(17) \qquad \frac{1}{\xi_n} \sum_\alpha' \sum_\beta' \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta = \sum_\alpha' \left[\frac{1}{\varrho_\alpha} (\sum_\beta' P_{\alpha\beta} d\nu_\beta)^2 \right].$$

Die Möglichkeit erhellt aus der Bestimmung der P. Betrachtet

man die $d\nu$ als unabhängige Grössen, setzt für die Linke in (17) die Form (19) und differentiirt partiell, so ergiebt sich

$$(20)\qquad \frac{dx_\gamma}{\xi_n} = \sum_\alpha{}'\left(\frac{P_{\alpha\gamma}}{\varrho_\alpha}\sum_\beta{}' P_{\alpha\beta}\, d\nu_\beta\right),$$

auch gültig für $\gamma = n$, indem

$$P_{\alpha n} = -\sum_\beta{}' P_{\alpha\beta}\nu_\beta$$

sein muss. Führt man die Werte der dx in (16) ein und setzt

$$A_{\alpha\beta} = \frac{P_{\alpha\beta}}{\varrho_\alpha};\quad A_{n\beta} = \xi_\beta,$$

so erhält man

$$\sum_\gamma A^2_{\alpha\gamma} = 1;\quad \sum_\gamma A_{\alpha\gamma} A_{\beta\gamma} = 0\ (\alpha \gtrless \beta;\quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

Demnach sind die A die Richtungscosinus eines beliebigen Systems orthogonaler Geraden, deren letzte als Normale der Fläche allein gegeben ist, und es folgt auch

$$\sum_\gamma A^2_{\gamma\alpha} = 1;\quad \sum_\gamma A_{\gamma\alpha} A_{\gamma\beta} = 0.$$

Sind nun statt der Fläche die ϱ und A als Functionen der ξ gegeben, so gehen aus den Gleichungen (20), die nun lauten:

$$(27)\qquad dx_\gamma = \sum_\alpha{}'(\varrho_\alpha A_{\alpha\gamma} \sum_\beta A_{\alpha\beta}\, d\xi_\beta),$$

zunächst die Bedingungen hervor, unter denen eine Fläche existirt, nämlich die Relationen, welche die rechte Seite von (27) zu einem Differential machen, dann, wenn diese erfüllt sind, die Werte der x durch Integration. Diese Bedingungen stellt der Verfasser in der Form zusammen:

$$\delta \sum_\alpha{}'(\varrho_\alpha A_{\alpha\gamma} \sum_\beta A_{\alpha\beta}\, d\xi_\beta) = d \sum_\alpha{}'(\varrho_\alpha A_{\alpha\gamma} \sum_\beta A_{\alpha\beta}\, \delta\xi_\beta),$$

wo δ und d zwei willkürliche Differentiationsweisen bezeichnen, und die Relation $\sum \xi^2 = 1$ ausserdem zu berücksichtigen bleibt, die durch Ausdruck der ξ in $(n-1)$ Unabhängigen zu erfüllen ist.

H.

L. Bianchi. Sulle superficie a curvatura costante positiva. Batt. G. XX. 287-292.

Das Gegenwärtige schliesst sich an den Aufsatz im selben Journal XVII. 9. (s. F. d. M. XI. 1879. 546) an und behandelt die gleichen Fragen speciell für Flächen constanter Krümmung, zunächst positiver. Eine solche Fläche S ist als erste Mittelpunktsfläche gegeben, auf ihr ein System von einem Punkte ausgehender Kürzester angenommen. Die Tangenten derselben werden dann von einer Fläche Σ normal geschnitten, deren Mittelpunktsflächen S und ihre complementäre S' sind. Es wird bewiesen, dass der Meridian der Rotationsfläche, auf welcher S' abwickelbar ist, sich als Meridianschnitt („Profil") der Tangentenfläche einer Schraubenlinie („Helikoid") darstellt. Aus der auf der Kugel abwickelbaren Rotationsfläche S kann man so eine Klasse auf gewissen andern Rotationsflächen abwickelbarer Flächen gewinnen. Bezeichnet $z = \varphi(r)$ den Meridian dieser Rotationsfläche, so ist das Linienelement auf dem Helikoid ausgedrückt durch

$$ds^2 = \left\{1 + \frac{r^2\varphi'^2(r)}{r^2+m^2}\right\}dr^2 + \lambda^2(r^2+m^2)dv_1^2,$$

wo $2\pi m$ die Steigung der Schraubenlinie, λ willkürlich constant ist. Der zur Axe normale ebene Schnitt des Helikoids ist eine Kreisevolvente. Die Meridianprofile des Helikoids erzeugen bei Rotation um die Axe eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. Die Gleichungen der Rotationsfläche und der auf ihr abwickelbaren Flächen werden dargestellt in der Form

$$x = a\,\mathrm{sn}\,w\cos\vartheta, \qquad x_1 = \frac{1}{\mathrm{sn}\,w}\left(a\cos\vartheta + R\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\,\frac{a\vartheta}{R}\right),$$

$$y = a\,\mathrm{sn}\,w\sin\vartheta, \qquad y_1 = \frac{1}{\mathrm{sn}\,w}\left(a\sin\vartheta - R\,\mathrm{sos}\,\vartheta\,\mathrm{tg}\,\frac{a\vartheta}{R}\right),$$

$$z = \sqrt{R^2-a^2}\,\mathrm{E}(w), \quad z_1 = a\sqrt{R^2-a^2}\,\frac{\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,w} + \sqrt{R^2-a^2}\,\mathrm{E}(w),$$

wo R^{-2} das constante Krümmungsmass der Fläche S bezeichnet.

H.

R. Hoppe. Bestimmung einer Fläche durch die eine ihrer zwei Mittelpunktsflächen. Hoppe Arch. LXVIII. 256-273.

Diese Arbeit und die des Referenten „Ueber Flächen mit gegebener Mittelpunktsfläche und über Krümmungsverwandtschaft“ (Referat siehe Seite 656 dieses Bandes) sind in Folge einer im Gespräch erhaltenen Anregung von beiden Verfassern gleichzeitig ohne Verabredung ausgeführt worden. Die ursprünglich gestellte Aufgabe ist beiden gemein, im weiteren Verlauf bewegten sich indessen die Untersuchungen nach verschiedenen Richtungen. Herr Hoppe stellt zunächst die Coordinaten eines Punktes x, y, z, einer gegebenen Mittelpunktsfläche Ω durch zwei beliebige Parameter dar und kommt zur Lösung des Problems auf folgende Gleichungen: Ist für die Fläche Ω das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \quad \text{ist } t^2 = eg - f^2,$$

und sind p, q, r die Richtungscosinus der Normale, werden die entsprechenden Grössen für die gesuchte Fläche Ω', die die gegebene Ω zur einen Mittelpunktsfläche hat, durch Accente bezeichnet, bezeichnet ferner ϱ den zugehörigen Hauptkrümmungsradius der Fläche Ω', so hat man

$$t^2 p' = \frac{\partial\varrho}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}g - \frac{\partial x}{\partial v}f\right) - \frac{\partial\varrho}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}f - \frac{\partial x}{\partial v}g\right)$$

und die analogen Gleichungen und daraus durch Quadriren und Addiren:

$$t^2 = g\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2 - 2f\frac{\partial\varrho}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial v} + e\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)^2.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für ϱ, mit deren Integration das Problem gelöst ist. Man übersieht schon hieraus, dass man statt ϱ stets setzen darf $\varrho +$ const., also dass, wenn eine Fläche Ω' die verlangte Eigenschaft hat, alle ihr parallelen Flächen dieselbe Eigenschaft haben, was von vornherein evident ist; zweitens, dass das allgemeine Integral eine willkürliche Function enthält. Weil endlich nur die Fundamentalgrössen erster Ordnung vorkommen, ist das Problem für alle auf einander abwickelbaren Flächen Ω gelöst, wenn es für eine gelöst ist. Dieser Ausspruch lässt sich, wie Referent in seiner Arbeit gezeigt hat, noch etwas erweitern. Man kann die gegebene Fläche Ω, nachdem man sie gebogen hat, noch einer

gewissen Dehnung aussetzen, ohne dass die Lösung des Problems und gewisse Beziehungen zwischen den gegebenen Flächen alterirt werden. Im weiteren Verlauf entwickelt nun der Herr Verfasser eine Reihe von Formeln, durch die er zur Darstellung der Hauptkrümmungen von Ω', der zweiten Mittelpunktsfläche Ω_1, der Krümmungslinie von Ω und der Curve constanter erster Hauptkrümmung kommt. Durch diese Betrachtungen wird er auf den Gesichtspunkt geführt, den Referent in der citirten Arbeit von seinem Ausgangspunkt gleich Anfangs gewinnen musste.

Es entsprechen nämlich der ersten Schaar der Krümmungslinie und der Schaar der Curve constanter erster Hauptkrümmung auf Ω' eine Schaar geodätischer Linien auf Ω und die Schaar der Orthogonalen. Wählt man diese Linien zu Parameterlinien, so ist $e = 1$, $f = 0$, $g = t^2$. Dann ergiebt sich $\varrho = -u$, und die Coordinaten der gesuchten Fläche werden

$$x' = x - u\frac{\partial x}{\partial u} \text{ etc.}$$

Die Coordinaten der zweiten Mittelpunktsfläche Ω_1 werden

$$x_1 = x - \frac{t}{\frac{\partial t}{\partial u}}\frac{\partial x}{\partial u} \text{ etc},$$

Resultate, die bis auf einen formellen Unterschied mit denen des Referenten übereinstimmen. Hierdurch ist das vorliegende Problem vollständig darauf zurückgeführt, auf der gegebenen Fläche ein beliebiges orthogonal-geodätisches System zu suchen. Zuletzt beschäftigt sich der Verfasser mit der Integration für specielle Fälle, indem er bei orthogonal-geodätischen Parametern setzt: $t = UV$, und $t = uV + V_1$, die bei Rotationsflächen und bei abwickelbaren Flächen zutreffen; auch für Flächen zweiten Grades ist das Problem als vollständig gelöst zu betrachten.

Uebrigens möge dem Referenten gestattet sein, hier auf folgende Druckfehler in seiner Arbeit aufmerksam zu machen. Auf Seite 322 in der Formel XIII muss es dreimal heissen $\frac{\partial t_1}{\partial u}$, statt $\frac{\partial t_1}{\partial v}$; auf Seite 324 Zeile 5 v. u. ist in der Formel hinzu-

zufügen das Glied $-t_1\frac{\partial t_1}{\partial u}$; Seite 325 Zeile 5 v. u. muss stehen t_1 statt t_1^2. Endlich sei darauf hingewiesen, dass Herr Bianchi in der Arbeit Ricerche sulle superficie elicoidali (Batt. G. XVII. 9-40, s. F. d. M. XI. 1879. 546.) die Lösung des Problems der Aufsuchung der Fläche aus gegebener Mittelpunktsfläche bereits mitteilt und auf bestimmte Fälle anwendet. A.

F. August. Ueber Flächen mit gegebener Mittelpunktsfläche und über Krümmungsverwandtschaft. Hoppe Arch. LXVIII. 315-352.

Eine mit zwei Parametern u, v variirende Tangente einer gegebenen Fläche M_1 ist nur dann Normale einer constanten Fläche P, wenn sie mit dem einen Parameter u längs einer Kürzesten als deren Tangente variirt. Dann aber ist stets M_1 Mittelpunktsfläche von P, letztere schneidet also auf der Tangente eine Strecke gleich dem einen ihrer Hauptkrümmungsradien ϱ_1 ab, und der Endpunkt beschreibt bei Variation von u eine Krümmungslinie. Die Grösse ϱ_1 ist durch den Ausdruck

$$\varrho_1 = -\int(\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1)$$

für Variation längs der Fläche M_1, oder in u, v durch

$$\varrho_1 = -\int\left(\sqrt{e_1}\,du + \frac{f_1}{\sqrt{e_1}}\,dv\right)$$

anfänglich bekannt, wo α, β, γ Richtungscosinus jener Tangente an die Kürzeste sind und

$$e_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \cdots;\ f_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \cdots$$

ist, und, da ϱ_1 einen willkürlichen constanten Addenden hat, so gehört zu jeder Schaar Kürzester eine Schaar paralleler Flächen P, mithin ist die Aufgabe, zu einer gegebenen Mittelpunktsfläche die Urflächen zu finden, in gleicher Allgemeinheit gelöst durch die, auf ersterer eine Schaar Kürzester zu construiren.

Es wird nun die zweite Mittelpunktsfläche M_2 in Betracht

gezogen, und zwar direct aus der ersten hergeleitet als Ort des Coincidenzpunktes der Tangenten, welche nicht blos mit u variiren. Es ergiebt sich, dass ein Coincidenzpunkt, ausser für $\partial v = 0$, nur bei Variation in conjugirter Richtung mit dieser stattfindet, bestimmt durch

$$\text{(IX)} \qquad E_1 du + F_1 dv = 0,$$

wo

$$E_1 = p_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + \cdots; \quad F_1 = p_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} + \cdots$$

$p_1, \ldots$ Richtungscosinus der Normale sind, und die u längs den Kürzesten variiren. Die Linien (IX) sind es dann, welchen die zweite Schaar Krümmungslinien auf P entspricht. Für die Strecke auf der Tangente bis zur zweiten Mittelpunktsfläche M_2 wird der Wert gefunden:

$$\varrho_0 = \varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2\sqrt{e_1}\, t_1^2}{f_1 \frac{\partial e_1}{\partial v} - e_1 \frac{\partial g_1}{\partial u}}, \quad (t_1^2 = e_1 g_1 - f_1^2).$$

Hat man also auf M_1 ein System sich in conjugirten Richtungen schneidender Curven, dessen eine Schaar Kürzeste sind, so entspricht ihm auf M_2 ein eben solches System, wo die andere Schaar Kürzeste sind, und auf P das System der Krümmungslinien. Hierauf werden die Fundamentalgrössen der Flächen P und M_2 entwickelt dargestellt unter Annahme orthogonal geodätischer Parameter auf M_1.

Krümmungsverwandt nennt der Verfasser Flächen P, P', die in entsprechenden Punkten in beiden Hauptkrümmungen beziehungsweise übereinstimmen, und bei denen mindestens ein System von Krümmungslinien der einen Fläche einem solchen der anderen entspricht. Dieselbe ist im Allgemeinen unsymmetrisch oder einseitig. Entsprechen sich aber beide Systeme von Krümmungslinien, so heisst die Krümmungsverwandtschaft symmetrisch oder vollkommen. Auf einseitig krümmungsverwandte Flächen kommt man durch jede Deformation von M_1 in M_1', wobei $e_1' = 1$, $f_1' = 0$; $t_1' = t_1 V$ wird. Dieser Bedingung entspricht eine Biegung, zu welcher aber noch eine Dehnung hinzutreten

kann. Die Krümmungsverwandtschaft ist vollkommen, wenn ausserdem

$$E_1 F'_1 - E'_1 F_1 = 0.$$

Bei einfacher Krümmungsverwandtschaft bewahren die Linien

$$(E'_1 du + F'_1 dv) \pm (E_1 du + F_1 dv) = 0$$

auf P und auf M_2 ihre Längen. Es wird nun die Aufgabe der Abbildung nach einseitiger Krümmungsverwandtschaft unter Annahme orthogonaler geodätischer Parameter auf M_1 allgemein gelöst, dann die Anwendung auf abwickelbare und Canalflächen gemacht. Ist M_1 abwickelbar, und lässt man eine Ebene mit einem System Gerader und orthogonaler Trajectorien auf ihr rollen, so bildet sich das System als ein orthogonal-geodätisches System ab, und die Trajectorien erzeugen die Fläche P. Sie sind dann die normalen Querschnitte der Canalfläche P. Man kann daher die Aufgabe, alle Urflächen zur abwickelbaren Mittelpunktsfläche zu finden, als identisch betrachten mit der, alle in dem genannten Sinne zugehörigen Canalflächen zu bilden. Da nun alle Abwickelbaren durch Biegung aus einander hervorgehen, so sind alle Canalflächen einseitig krümmungsverwandt. Die Biegung von M_1 kann man bestimmt denken durch Biegung ihrer Gratlinie. Aendert man blos deren Torsion, so bleibt sich die Canalfläche vollkommen krümmungsverwandt, und zwar sind hierin alle vollkommen krümmungsverwandten Flächen einer Canalfläche enthalten. Alle bisher behandelten Fragen werden nun besonders untersucht für den Fall, in dem M_1 in eine Linie, Mittelpunktslinie, degenerirt. Einer solchen entspricht als Fläche P die Enveloppe einer Schaar von Kugeln, und die zugehörigen Krümmungslinien sind Kreise. Die allgemeinste Fläche, die einer Fläche mit einer Mittelpunktslinie M_1 derart einseitig krümmungsverwandt ist, dass den cyklischen Krümmungslinien Krümmungslinien entsprechen, ist gleichfalls eine Fläche mit einer Mittelpunktslinie M'_1, welche, von gewissen Singularitäten abgesehen, ganz beliebig sein darf. Bei vollkommener Krümmungsverwandtschaft sind M_1 und M'_1 gleichzeitig doppelt gekrümmt, und es giebt eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von P' zu P; gleichzeitig eben, und die Mannigfaltigkeit der P' ist grösser;

gleichzeitig gerade, hier sind die P Rotationsflächen, mithin auch alle P'. Schliesslich werden die Rotationsflächen nach der damit verbundenen Vereinfachung besonders behandelt. H.

R. Hoppe. Nachtrag zur Flächentheorie. Hoppe Arch. LXVIII. 439-440.

Der Nachtrag schliesst sich an den § 27 der Flächentheorie des Herrn Verfassers an (s. auch Grunert Arch. LIX. 262, s. F. d. M. VIII. 1876. 479); es werden in ihm folgende Sätze bewiesen:

1) Die orthogonalen Trajectorien derjenigen Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche, welche einer Schaar von Krümmungslinien auf der Urfläche entsprechen, entsprechen den Curven constanter zugehöriger Hauptkrümmung auf der Urfläche. 2) Den zwei Hauptkrümmungsrichtungen auf der Urfläche entsprechen conjugirte Richtungen auf jeder der beiden Mittelpunktsflächen.

A.

R. Hoppe. Ueber das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugirten Tangenten auf positiv gekrümmter Fläche. Hoppe Arch. LXIX. 19-30.

Ist das Quadrat des Linienelementes, dargestellt in den beliebigen Parametern u, v,

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2;$$

sind p, q, r die Richtungscosinus der Normale, und ist

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \cdots;\quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \cdots,\quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \cdots,$$

$$P = Ge + 2Ff + Eg;\quad Q = EG - F^2,$$

so sind die beiden Werte von $\frac{dv}{du} = k$, welche den charakterisirten Richtungen entsprechen, die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\text{(I)}\qquad (GP - 2gQ)k^2 + 2(FP - 2fQ)k + (EP - 2eQ) = 0.$$

Der Krümmungsradius jedes der beiden durch diese Richtungen gelegten Normalschnittes ist

$$\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2};$$

und der Minimal-Winkel ϑ ist, wenn $\varrho_2 > \varrho_1$, bestimmt durch die Gleichung

$$\cos\vartheta = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 + \varrho_1}.$$

Geht man von einem Flächenpunkte in einer der eben charakterisirten Richtungen zum Nachbarpunkte, und so fort, so erhält man eine durch die Differentialgleichung (I) charakterisirte Curve, deren also durch jeden Punkt zwei hindurch gehen, welche einen Winkel bilden, der durch die Krümmungslinien halbirt wird. Dieses Curvensystem nennt der Herr Verfasser ein conjugirtes Minimalsystem. Sollen die Parameterlinien dasselbe bilden, so muss

$$\frac{E}{e} = \frac{G}{g} \quad \text{und} \quad F = 0 \text{ sein.}$$

Geht man von Krümmungsparametern aus, d. h. sind die Krümmungslinien die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, so wird die Gleichung der conjugirten Minimalcurven

$$E du^2 - F dv^2 = 0.$$

Die Integration der Differentialgleichung der conjugirten Minimalcurven gelingt u. A. bei Rotationsflächen. Ist die Rotationsfläche gegeben durch die Gleichungen

$$x = t\cos v; \quad y = t\sin v,$$

während z und t so als Functionen von u gegeben sind, dass

$$\frac{dt}{du} = \cos\tau, \quad \frac{dz}{du} = \sin\tau \text{ ist,}$$

so sind die Curven dargestellt durch

$$\pm v = \int \frac{\sqrt{d\tau \cdot du}}{t\sin\tau}.$$

Ferner gelingt die Integration für die Flächen zweiten Grades, bei welchen man auf elliptische Functionen geführt wird. Das Ellipsoid z. B. ist in Krümmungsparametern dargestellt

$$x^2 = \frac{a^2(c^2-b^2)}{d}(u-a^2)(v-a^2),$$

$$y^2 = \frac{b^2(a^2-c^2)}{d}(u-b^2)(v-b^2),$$

$$z^2 = \frac{c^2(b^2-a^2)}{d}(u-c^2)(v-c^2),$$

wo

$$d = (b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$

ist. Die Differentialgleichung der Curven wird

$$\frac{du}{\sqrt{(u-a^2)(u-b^2)(u-c^2)}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{(v-a^2)(v-b^2)(v-c^2)}}.$$

Aehnlich ist die Gleichung beim zweischaligen Hyperboloid. Bei dem elliptischen Hyperboloid kommt man auf niedere Transscendenten. A.

J. Weingarten. Ueber die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen. Berl. Ber. 1882. 453-456.

Verschiebung im Sinne dieses Aufsatzes ist eine solche ohne Lineardehnung, die jedoch auch Biegung zulässt. Ferner ist zur Deutlichkeit zu bemerken, dass die geodätischen Dreiecke nur als specielle Vertreter beliebiger Flächenstücke auftreten. Die Untersuchung beginnt mit der Verschiebung unendlich kleiner Dreiecke und benutzt den von Gauss gegebenen Ausdruck der Differenz eines Dreieckwinkels auf der Fläche und des Winkels im ebenen Dreieck von gleichen Seiten:

$$A - A^0 = \frac{1}{12}\sigma^0(2\alpha+\beta+\gamma),$$

wo σ^0 den Inhalt des ebenen Dreiecks, α, β, γ die Flächenkrümmungen in den Eckpunkten bezeichnen. Hieraus folgt sofort bei Anwendung auf alle drei Winkel, dass α, β, γ bei Verschiebung ihre Werte behalten müssen. Ein unendlich kleines Dreieck kann sich also nur so verschieben, dass seine Ecken auf Linien constanten Krümmungsmasses fortrücken, und wenn die Bahn eines Eckpunktes beliebig sein soll, so muss die Fläche selbst

constantes Krümmungsmass haben, die Möglichkeit des erstern Falles zusammentreffend nach Christoffel's Einteilung der Flächen in vier Klassen mit der zweiten, der letztere Fall mit der dritten und vierten Klasse. Als notwendige Bedingungen gelten für beide Fälle die angeführten offenbar auch für endliche Flächenstücke. Dass sie ausreichend sind, ergiebt eine leichte Betrachtung einer Rotationsfläche, sobald folgender Satz bewiesen ist: Jede Fläche von nicht constantem Krümmungsmass, welche Linien constanter Krümmung hat, ist auf einer Rotationsfläche abwickelbar. Der Beweis wird in folgender Weise geführt. Wird ein Flächenstück auf irgend einem Wege verschoben, so müssen die Biegungsinvarianten (Grössen, die bei Biegung unverändert bleiben) jedes Punktes längs seiner Bahn constant sein. Zu diesen gehören auch die von Beltrami so genannten zwei Differentialparameter h, h_1. Wendet man nun Parameter an, deren einer den Linien constanter Krümmung, der andere den rechtwinkligen Trajectorien entspricht, so müssen h, h_1 reine Functionen der letzteren sein, und es zeigt sich, dass der Ausdruck des Linienelementes in den für Rotationsflächen übergeht. Die Resultate werden in der Form aufgestellt: Wenn zwischen den Seiten und Winkeln geodätischer Dreiecke eine, bezw. drei Gleichungen bestehen, so ist die Fläche auf einer Rotationsfläche von nicht constanter Krümmung abwickelbar, bezw. von constanter Krümmung. Zwei Gleichungen allein finden nie statt. H.

G. Darboux. Sur la représentation sphérique des surfaces. C. R. XCIV. 120-122, 158-160, 1290-1293, 1343-1345.

Die vorliegenden Noten behandeln die von Bonnet u. A. untersuchte Abbildung einer Fläche auf eine Kugel, bei welcher die Tangentialebenen, also auch die Normalen in entsprechenden Punkten parallel sind. Auch Herr Darboux selbst hat sich bereits früher mit diesem Gegenstande beschäftigt und in den Jahren 1868 und 1869 Noten darüber in den C. R. LXVII. und LXVIII, (siehe F. d. M. II. 1870. 550) veröffentlicht. Die damals mitgeteilten Resultate werden jetzt vervollständigt und erweitert.

Der Grundgedanke der Entwickelung ist folgender: Wir betrachten eine Ebene mit der Gleichung

$$W = ux + vy + wz + p = 0,$$

in welcher u, v, w, p Functionen zweier Parameter ϱ und ϱ_1 sind; die Enveloppe dieser Ebene ist eine gewisse Fläche, und zwar wird durch jedes Paar von Parameterwerten ϱ und ϱ_1 ein Punkt dieser Fläche bestimmt, und die Bedingung dafür, dass die Parameterlinien $\varrho = \text{const.}$ und $\varrho_1 = \text{const.}$ conjugirt sind, ist, dass gleichzeitig $W, \frac{\partial W}{\partial \varrho}, \frac{\partial W}{\partial \varrho_1}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial \varrho \partial \varrho_1}$ verschwinden, woraus ohne Weiteres folgt, dass die vier Functionen u, v, w, p einer Differentialgleichung von der Form

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho \partial \varrho_1} + A \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} + B \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + C = 0$$

genügen. Kennt man umgekehrt fünf Lösungen dieser Gleichung, u, v, w, p, p', so sind die Flächen S und S', welche eingehüllt werden von den Ebenen

$$ux + vy + wz + p = 0$$

und

$$ux + vy + wz + p' = 0,$$

durch die Parameter ϱ und ϱ_1 aufeinander abgebildet, und die Parameterlinien sind in beiden Flächen conjugirt; auch sind entsprechende Richtungen auf beiden Flächen parallel. Ist nun weiter eine dieser beiden Flächen eine Kugel, so werden die Parameterlinien auf dieser orthogonal, also auch auf der nicht sphärischen Fläche; folglich sind auf der letzteren die Parameterlinien die Krümmungslinien. Man wird also zu dem Resultat geführt: Ist eine Differentialgleichung von der Form (1) gegeben, und sind u, v, w, p vier Integrale derselben von der Art, dass

$$(2) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = p^2$$

ist, so definiren die Gleichungen

$$x = \frac{u}{p}, \quad y = \frac{v}{p}, \quad z = \frac{w}{p}$$

für constantes ϱ oder ϱ_1 zwei Schaaren von orthogonalen Linien auf der Kugel; und die allgemeinste Fläche, deren Krümmungs-

linien jenes Orthogonalsystem zum sphärischen Bilde haben, ist die Enveloppe der Ebene

$$ux + vy + wz + P = 0,$$

wo P das allgemeine Integral von (1) ist. Hiermit ist der Gang für die allgemeinste Behandlung des Problems aufgefunden. Man geht z. B. von der Gleichung aus:

$$(3) \qquad 2(\varrho-\varrho_1)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varrho\,\partial\varrho_1}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho}-\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_1}=0.$$

Dieselbe wird befriedigt durch einen Ausdruck von der Form

$$\sum_1^4 A_i\sqrt{(\varrho+a_i)(\varrho_1+a_i)}.$$

Nun lassen sich vier derartige Ausdrücke bilden, indem statt der Constanten A_i die Constanten B_i, C_i, D_i gesetzt werden. Diese vier Ausdrücke mögen der Reihe nach gleich u, v, w, p gesetzt werden; dann können die Constanten A_i, B_i, C_i, D_i so bestimmt werden, dass die Gleichung (2) erfüllt wird. Man kommt so auf die allgemeine Lösung der Aufgabe, alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien zur sphärischen Abbildung ein System confocaler sphärischer Kegelschnitte haben. Dies hatte der Verfasser früher auf andere Weise entwickelt. Auch Bonnet hatte bereits mit Hülfe eines bekannten Satzes von Joachimsthal bewiesen, dass sich jede ebene Krümmungslinie sphärisch als ein Kreis abbilden muss, woraus sich weiter ergiebt, dass die Aufsuchung der Flächen mit zwei Systemen ebener Krümmungslinien auf die Untersuchung derjenigen Flächen hinauskommt, deren Krümmungslinien sich sphärisch in zwei orthogonale Kreisschaaren abbilden.

Das ist der Inhalt der ersten Note. Die zweite bespricht, wie man aus gegebenen Lösungen des Problems ohne neue Integration durch eine beliebige Inversion andere Lösungen herleiten kann. Hervorzuheben ist eine Verallgemeinerung des Problems der sphärischen Abbildung, welches darin besteht, dass man eine Fläche Σ auf eine Kugel S so abbildet, dass beide Flächen in entsprechenden Punkten von einer veränderlichen Kugel berührt werden. Aus dieser Abbildung kann leicht die frühere als

specieller Fall hergeleitet werden; da sie aber selbst die bemerkenswerte Eigenschaft hat, dass den Krümmungslinien auf Σ orthogonale Liniensysteme auf S entsprechen, und da sich diese Eigenschaft bei der Transformation durch reciproke Radien erhält, so ist sie in vieler Beziehung interessant. Auch lässt sich hierbei die Bildfläche S, welche im Allgemeinen eine Kugel ist, durch eine Ebene ersetzen, und diese Art der Abbildung einer Fläche auf eine Ebene führt ebenfalls zu bemerkenswerten Beziehungen, von denen einige besprochen werden. Die beiden letzten Noten enthalten noch eine Reihe von Bemerkungen über die Integration der Gleichung (3). Wie der Herr Verfasser bereits früher bewiesen hat, lässt sich die oben aufgestellte Bedingung (2) immer dann erfüllen, wenn man vier particuläre Integrale der Gleichung (3) kennt, welche durch eine homogene Gleichung zweiten Grades verbunden sind. Dies kann nun auf einen speciellen Fall der Gleichung (3) angewendet werden. Ist nämlich $A = 0$ und $B = 0$, dagegen

$$C = i[f(\varrho + i\varrho_1) - \varphi(\varrho - i\varrho_1)],$$

so wird die Gleichung (3):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\,\partial\varrho_1} = i[f(\varrho + i\varrho_1) - \varphi(\varrho - i\varrho_1)]z.$$

Bildet man nun die Differentialgleichungen

$$(4)\qquad P'' = P[f(x) + m];$$

$$(5)\qquad Q'' = Q[\varphi(x_1) + m],$$

wo m eine Constante bedeutet, und nennt P_1 und P_2 zwei particuläre Integrale der ersten Gleichung, in welchen für x gesetzt ist $(\alpha+\beta i)$, nennt man analog Q_1 und Q_2 zwei Integrale der zweiten, wo für x_1 gesetzt ist $(\alpha-\beta i)$, so erhält man die vier Lösungen der Gleichung (3)

$$u = P_1Q_2 + P_2Q_1,\quad w = P_1Q_1 - P_2Q_2,$$
$$v = i(P_2Q_1 - P_1Q_2),\quad p = P_1Q_1 + P_2Q_2,$$

welche die Relation (2) erfüllen. Wenn die Functionen f und φ conjugirt sind, und Q_1 und Q_2 bezüglich zu P_1 und P_2 conjugirt sind, dann wird das so definirte sphärische System reell, und zwar isothermisch. Dies System ist durch die Function f und die

Constante m definirt. Ersetzt man P_1 und P_2 durch zwei andere particuläre Integrale der Gleichung (4), so erhält man Systeme, welche aus dem ersten durch Inversion hervorgehen. Alle diese Systeme, welche als äquivalent gelten können, nennt der Verfasser „correspondirend“ der Gleichung

$$y'' = y[f(x)+m].$$

Auf die Form (3) lässt sich auch eine aus der Geometrie und der mathematischen Physik bekannte Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\varrho_1} = -\frac{m(m+1)}{(\varrho-\varrho_1)^2}z$$

zurückführen. Es wird angedeutet, dass man auf diese Weise alle Flächen finden kann, welche zur sphärischen Darstellung der Krümmungslinien die Isothermensysteme haben, welche den drei Gleichungen genügen:

$$y' = y\left[\frac{m(m+1)}{x^2} - h^2\right],$$

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{\sin^2 x} - h^2\right],$$

$$y''' = y[m(m+1)k^2\sin^2 x+h].$$

Hierin sind alle bekannten Fälle enthalten. Man findet so unendlich viele algebraische Flächen mit algebraischen Krümmungslinien. Endlich wird noch (in der letzten Note) gezeigt, wie man aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta} = i[f(\alpha+i\beta)-\varphi(\alpha-i\beta)]z$$

eine unbegrenzte Zahl von Gleichungen derselben Form herleiten kann, welche alle integrabel sind, wenn die Ausgangsgleichung es ist. A.

H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Résal J. (3) VIII. 251-296.

Dieser Artikel ist die Fortsetzung der Abhandlung, welche T. VII. 375 beginnt (s. F. d. M. XIII. 1881. 591). Der nächste Gegenstand ist die Theorie der „Conséquents.“ Die Discussion

der Curvenformen schliesst sich an die Schnitte der Curven mit einem festen Bogen an. Es wird gefragt, ob eine in einem Schnittpunkte beginnende Halbcharakteristik, ohne vorher einen Knoten gebildet zu haben, den Bogen zum zweitenmal und öfter schneidet; der zweite heisst dann der „Conséquent“. Dagegen werden die Doppelpunkte, in denen Berührung stattfindet, nicht als Endpunkte, wie die Knoten, sondern als Verzweigungspunkte betrachtet, so dass ihnen zwei Conséquents nachfolgen können. Es werden viele Sätze über den Curvengang bewiesen, die jedoch nur im Zusammenhang Bedeutung haben. Es folgt die Theorie der Grenzcykel, dann Beispiele, dann die Untersuchung der Cykel ohne Berührung und Beispiele.

H.

Th. Craig. A geometrical theorem. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Der Verfasser stellt ohne Beweis den Satz auf: „Zieht man parallel allen Hauptnormalen einer geschlossenen Curve im Raume vom Mittelpunkte einer Kugel Radien, so teilt die Curve der Endpunkte die Oberfläche in zwei gleiche Teile.“ Dieser Satz ist jedoch nicht ohne Einschränkung richtig. Stetigkeit der Urcurve bis auf die zweite Ordnung muss zunächst vorausgesetzt werden, damit die sphärische Curve überhaupt Teile der Kugelfläche begrenzen kann. Letztere wird dann unter Umständen in mehr als zwei Teile geteilt. Aber auch wenn es nur zwei sind, können sie jedes beliebige rationale Verhältnis haben. Fügt man hingegen die Bedingung hinzu, dass die sphärische Curve keine Doppelpunkte habe, so gilt der Satz ohne Ausnahme.

H.

S. A. Christensen. Vindskjäve Kurvers Polarflade og Evoluter. Zeuthen T. (4) VI. 17-19.

Zusammenstellung einiger Sätze über Polarflächen und Evoluten windschiefer Curven. Gm.

S. Lie. Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind. Christiania Verh. 1882. No. 10. p. 1-6.

Die Aufgabe, alle Raumcurven zu bestimmen, deren Krümmungsradius ϱ und Torsionsradius r gegebene Functionen von der Bogenlänge s sind, verlangt nach Hoppe die Integration einer Riccati'schen Gleichung erster Ordnung. Aus seinen Untersuchungen folgt leicht, obgleich er es kaum explicite ausgesprochen hat, dass man alle Raumcurven angeben kann, die eine gegebene Relation der Form

$$\Omega\left(s, \int\frac{ds}{\varrho}, \int\frac{ds}{r}\right) = 0$$

erfüllen. Die vorliegende Note giebt die allgemeine Bestimmung aller Raumcurven, die eine beliebig gegebene Relation der Form

$$W(s, \varrho, r) = 0$$

befriedigen. Hierbei ist indess zu bemerken, dass die Formeln, welche dieses bemerkenswerte Resultat bieten, mit Imaginärem behaftet sind, welches im allgemeinen Falle kaum weggeschafft werden kann. Die angewandte Methode beruht auf der allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten. L.

A. H. Curtis. Solution of a question (6807). Ed. Times XXXVI. 104-105.

Wenn in einer Curve die Differenz zwischen den Radien der absoluten und der sphärischen Krümmung constant ist, so haben die Orte der Mittelpunkte der absoluten und sphärischen Krümmung zwischen entsprechenden Punkten gleiche Bogenlängen. Wn.

A. J. C. Allen. Notes on solid geometry. Mess. (2) XII. 26-28.

Beweise bekannter Sätze 1) über Regelflächen, 2) über

Raumcurven von constanter Krümmung und Torsion, 3) über solche Raumcurven, bei denen Krümmungs- und Torsionsradius in constantem Verhältnis stehen. Glr. (Wn.).

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

A. Cayley. Determination of the order of a surface. Mess. (2) XII. 29-32.

Eine Ebene OBC und eine fest mit derselben verbundene Linie OA mögen um den Punkt O rotiren; eine variable Ebene, die durch einen festen Punkt w geht, möge OA in A und die Ebene OBC in BC schneiden. Beschreibt dann BC eine Regelfläche von der Ordnung n, so beschreibt der Punkt A eine Fläche von der Ordnung $4n$. Dieser Satz, dessen Beweis hier mitgeteilt wird, ist eine Erweiterung von Newton's organischer Construction von Curven. Der Satz wurde zuerst von Herrn C. Taylor in seiner „Introduction to the geometry of conics" (1881) aufgestellt, während die Bestimmung der Ordnungszahl der Flächen von Herrn Cayley herrührt. Glr. (Wn.).

W. L. Tanner, Ch. Ladd. Solution of a question (6998). Ed. Times XXXVII. 91.

Entwickelung der Bedingungen dafür, dass eine gegebene Linie auf einer Fläche n^{ter} Ordnung liegt. Wn.

M. Nöther. Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven. Kronecker J. XCIII. 271-318.

Diese Abhandlung bildet einen Auszug aus der in den Abhandlungen der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1883 erschienenen Arbeit von Nöther. Zu

gleicher Zeit ist eine Arbeit von Halphen in dem Journal de l'école polytechnique vol. XXXIII. p. 1-200 erschienen, welche ganz ähnliche Resultate, wie die Arbeit von Nöther, gewinnt. Es ist hierin ein ganz bedeutender Schritt in der allgemeinen Theorie der Raumcurven vorwärts getan, und zwar basiren die Untersuchungen auf der Anwendung algebraisch-functionentheoretischer Sätze, wie solche Sätze bei den ebenen Curven ja eine so hervorragende Rolle spielen. Die gewonnenen Resultate werden dann zur Aufstellung der verschiedenen Species aller Curven bis zur siebzehnten Ordnung hin verwendet; auch noch einige allgemeine Beispiele sind angegeben. Die ganze Abhandlung zerfällt in drei Teile.

Der erste Teil beginnt mit dem Restsatz, dem Specialgruppensatz und dem Riemann-Roch'schen Satz für ebene Curven, und stellt im Anschluss daran einen Restsatz für Flächen, einen Restsatz für Raumcurven und einen Specialgruppensatz für dieselben auf. An Stelle der adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bei ebenen Curven λ^{ter} Ordnung treten hier adjungirte Flächen $(\mu+\gamma-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn die Raumcurve den teilweisen Schnitt zweier Flächen μ^{ter}, resp. ν^{ter} Ordnung bildet. Dann wird die Raumcurve m^{ter} Ordnung als Schnitt eines Kegels m^{ter} Ordnung mit einem Monoide n^{ter} Ordnung dargestellt (welche sich ausserdem nur noch in Geraden schneiden) und die Ungleichung $n \geqq \frac{m}{2}$ gefolgert. Aus dieser Darstellung ergeben sich ferner die drei Sätze:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine ebene Curve die Projection einer Raumcurve von der Ordnung m und dem Geschlechte p sei, ist für $p \geqq m-2$ die, dass alle adjungirten Curven $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $h-1$ Doppelpunkte der ebenen Curve passiren, auch durch den h^{ten} Doppelpunkt hindurch gehen. Für $p < m-2$ herrscht keine Bedingung. (Die Doppelpunkte der ebenen Curve entsprechen scheinbaren Punkten der Raumcurve, da letztere immer ohne wirkliche Doppelpunkte vorausgesetzt wird.)

II. Kann man durch $h-\frac{i}{2}(i+1)$ Doppelpunkte der Projectionscurve eine adjungirte Curve $m-i-3$ legen; wenn $m-i-3 \gtreqless \frac{m-1}{2}$, so geht dieselbe auch durch die übrigen $\frac{i}{2}(i+1)$ Doppelpunkte.

III. Sei

$p > mi - \frac{1}{6}(i+1)(i+2)(i+3)+1+k$, wo $k = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots$,

sein kann. Stellen dann die h Doppelpunkte der ebenen Curve für die ajungirten Curven $(m-i-3)^{\text{ter}}$ Ordnung mehr als $h-\frac{1}{6}i(i+1)(i+2)+k$ lineare Bedingungen dar, so liegt die Raumcurve auf wenigstens ∞^k Flächen i^{ter} Ordnung.

Durch eine beliebige eindeutige Transformation der Raumcurven in ebene Curven findet der Verfasser noch den Satz: Die Constantenzahl der Gesammtheit aller Raumcurven von der Ordnung m und dem Geschlecht p ist $= 4m$ für $m \geqq \frac{3}{4}(p+4)$, dagegen $\geqq 4m$ für $m < \frac{3}{4}(p+4)$.

Der zweite Teil stellt zunächst für ebene Curven den Satz auf: Soll auf einer ebenen Curve f_μ von der Ordnung μ und ohne vielfache Punkte die Gruppe $G_{\alpha\mu-\beta}$ $(0 \leqq \beta < \mu)$ von $(\alpha\mu-\beta)$ Punkten derart sein, dass unter Berücksichtigung von $f_\mu = 0$ möglichst viele Curven von jeder beliebigen Ordnung $\nu \geqq \alpha$ hindurch gehen, so ist notwendig und genügend, dass $G_{\alpha\mu-\beta}$ eine auf einer Geraden liegende Gruppe von β Punkten zum Rest hat.

Dieser Satz wird dann auf Flächen übertragen und lautet dann: Die Raumcurven m^{ter} Ordnung, welche auf einer Fläche μ^{ter} Ordnung liegen sollen und das grösstmögliche Geschlecht π haben, müssen eine ebene Restcurve besitzen. Und zwar ist

$$\pi = \frac{1}{2}(\beta-1)(\beta-2) + \frac{1}{2}(\alpha\mu-2\beta), \quad (\mu+\alpha-4),$$

wenn die Ordnung der Restcurve β und die Ordnung der Fläche,

welche die Raumcurve m^{ter} Ordnung und die Restcurve ausschneidet, gleich α ist.

Nun wird die Frage aufgestellt, wann durch eine Raumcurve m^{ter} Ordnung vom Geschlecht p eine Fläche μ^{ter} Ordnung hindurch geht, und das Resultat gefunden, dass es noch eine lineare ∞^{λ}-Schaar von Flächen μ^{ter} Ordnung giebt, wo λ die grösste Zahl bedeutet, welche den Ungleichungen

$$\mu m < 2(N_\mu - \lambda) \quad \text{und} \quad p > \mu m - (N_\mu - \lambda),$$
$$N\mu = \frac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3) - 1$$

genügt. (Giebt es keine positive Zahl λ, so giebt es auch keine Flächen μ^{ter} Ordnung). Speciell giebt es eine Fläche μ^{ter} Ordnung durch die Raumcurve von der Ordnung m und dem Geschlechte p, wenn $\mu m < 2N_\mu$ und $p \geqq \mu m - N_\mu + 1$, oder wenn $\mu m \leqq 2N_\mu$ und $p > \mu m - N_\mu + 1$ ist.

Die vorige Fragestellung führt dann unmittelbar zu der neuen: Wann geht durch eine Raumcurve m^{ter} Ordnung vom Geschlecht p, welche bereits auf einer Fläche μ^{ter} Ordnung liegt, eine Fläche ν^{ter} Ordnung ($\nu \geqq \mu - 3$)? Auch hier ist die Antwort, dass es noch eine lineare ∞^{λ}-Schaar von Flächen ν^{ter} Ordnung und im Allgemeinen keine weitere giebt, welche durch die Raumcurve m^{ter} Ordnung hindurch geht, wo λ die grösste Zahl ist, die den Ungleichungen

$$\nu m < 2(W_{\nu,\mu} - \lambda) \quad \text{und} \quad p > \nu m - W_{\nu,\mu} + \lambda$$

genügt. Dabei bedeutet $W_{\nu,\mu}$ die Mannigfaltigkeit aller Curven $\mu - \nu^{ter}$ Ordnung, welche auf der gegebenen Fläche μ^{ter} Ordnung von allen Flächen ν^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden; es ist also

$$W_{\nu,\mu} = N_\nu - N_{\nu-\mu} - 1 = \frac{1}{6}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) + \frac{1}{2}\mu\nu(\nu-\mu+4).$$

Es giebt speciell eine Fläche ν^{ter} Ordnung durch unsere Curve, wenn

$$\nu m < 2\,W_{\nu,\mu} \quad \text{und} \quad p > \nu m - W_{\nu,\mu}$$

ist. Ist die letzte Ungleichung erfüllt, aber $\nu\mu \gtreqless 2W_{\nu,\mu}$, so giebt es durch die auf der Fläche μ^{ter} Ordnung gelegene Raumcurve

m^{ter} Ordnung entweder noch eine Fläche ν^{ter} Ordnung, oder die Flächen ν^{ter} Ordnung schneiden die Raumcurve in Specialpunktgruppen. Aus $\nu m \geqq 2 W_{\nu,\mu}$ ergiebt sich auch eine obere Grenze für ν.

Wie schon gesagt wurde, giebt es für $\nu m \geqq 2 W_{\nu,\mu}$ noch zwei Möglichkeiten, und so wird weiter untersucht, wann die eine oder andere eintritt, wann also noch eine Fläche ν^{ter} Ordnung durch die Curve m^{ter} Ordnung, welche sich auf einer gegebenen μ^{ter} Ordnung befindet, hindurch geht, und wann nicht. Dazu kann entweder die Restmethode benutzt werden, welche die Frage für die gegebene Curve auf eine solche für eine corresiduale Curve überführt, oder die Methode des ebenen Schnittes, welche mit Hülfe des zu Anfang des zweiten Teiles gegebenen Satzes für ebene Curven die Frage entscheiden lehrt.

Der Verfasser setzt nun aus einander, wie man alle irreductiblen Raumcurven m^{ter} Ordnung vom Geschlechte p erhalten kann. Man nimmt zunächst an, dass die Curve auf einer Fläche μ^{ter} Ordnung liegt, und dass diese Fläche die Fläche niedrigster Ordnung ist, welche durch die Raumcurve hindurchgeht. Dann wird es noch eine Fläche ν^{ter} Ordnung geben, welche die Raumcurve m^{ter} Ordnung ebenfalls enthält, und welche noch eine Restcurve von der Ordnung $m' = \mu\nu - m$ ausschneidet. Construirt man also umgekehrt solche Restcurven von der Ordnung m', welche aus der Fläche μ^{ter} Ordnung durch eine Fläche ν^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden, so erhält man die gesuchten Raumcurven m^{ter} Ordnung als Restcurven dieser Curven. Die Aufstellung solcher Restcurven m'^{ter} Ordnung erledigt sich aber nach den vorhergehenden Sätzen. Bei angenommenem μ sind für ν noch verschiedene Werte zu setzen, die Grenzen für ν bestimmen sich den früheren Ungleichungen gemäss. Um alle Raumcurven m^{ter} Ordnung und vom Geschlecht p zu erhalten, muss man dem μ nach einander die Werte $2, 3, \ldots,$ beilegen. Der höchste Wert, den μ annehmen kann, ist der kleinste Wert, welcher den beiden Ungleichungen

$$2N_\mu - m\mu > 0 \quad \text{und} \quad N_\mu - m\mu + p > 0$$

zugleich Genüge leistet.

Der Schluss des zweiten Teiles wird noch dazu benutzt, die Zahl der Constanten einer Raumcurve m^{ter} Ordnung vom Geschlechte p genau zu geben, oder doch für dieselbe eine genauere untere Grenze als die am Ende des vorigen Teiles gegebene Zahl $4m$ zu finden. Dazu werden folgende Grössen definirt. A_μ, resp. A_ν sei für eine Fläche μ^{ter} Ordnung, resp. ν^{ter} Ordnung die Zahl der Bedingungen, um durch eine gegebene Raumcurve m^{ter} Ordnung und vom Geschlechte p hindurch zu gehen. Ferner sei $S_{\mu,\nu}$ die Zahl der wirklichen Doppelpunkte, welche der vollständige Durchschnitt zweier Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung aufweist, dessen einer Teil eine solche Raumcurve μ^{ter} Ordnung vom Geschlecht p ist. Endlich sei $\sigma_{\mu,\nu}$ die Zahl der Bedingungen, damit der vollständige Durchschnitt zweier Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung in zwei Curven mit $S_{\mu,\nu}$ Schnittpunkten zerfalle. Dann ist

$$\sigma_{\mu,\nu} \overline{\gtrless} S_{\mu,\nu}$$

und

$$u = A_\mu + A_\nu - \sigma_{\mu,\nu}.$$

Der dritte Teil giebt eine Einteilung der Curven und eine Aufzählung aller Curven bis zur siebzehnten Ordnung nach diesem Einteilungsprincip. Das Gesammtgebiet der Raumcurven von gegebener Ordnung m und gegebenem Geschlecht p bildet eine algebraische im Allgemeinen reducible Mannigfaltigkeit. Die Raumcurven, welche demselben irreductiblen Gebiete angehören, bilden eine Curvenfamilie. Ein anderes Einteilungsprincip giebt uns die Ordnungszahlen der Flächen niedrigster Ordnung, auf denen die Curven liegen können; demnach unterscheidet der Verfasser Curvenspecies. Die Species sind Unterabteilungen der Familien. Es werden dann die Aufzählung der Raumcurven bis zur siebzehnten Ordnung vorgenommen, indem bei jeder Ordnung zunächst nach den Geschlechtszahlen und dann weiter nach den Species vorgegangen wird. Zugleich wird, so weit möglich, die Zusammengehörigkeit der Species zu Familien angegeben. Rn.

WEILL. Sur des polygones dont les côtés sont tangents à une courbe et dont tous les sommets sont sur la courbe. S. M. F. Bull. X. 127-131.

Auf einer unicursalen Curve m^{ten} Grades werden die Punkte durch die Werte eines Parameters t ausgedrückt; und es wird dann durch einfache analytische Betrachtungen das Theorem bewiesen: Zieht man in einem Punkte t einer unicursalen Curve m^{ten} Grades eine Tangente, welche die Curve in den Punkten $T_1, T_2, \ldots, T_{m-2}$ schneidet, und ist die Gleichung, aus welcher $T_1, T_2, \ldots, T_{m-2}$ als Function von t gefunden wird, also $f(T,t) = 0$, homogen für T und t, so treffen sich die Tangenten, die die Curve in den Punkten T_1, $T_2, \ldots$ hat, paarweise in Punkten B, welche gleichfalls auf der Curve liegen; die Tangenten, welche die Curve in den B hat, treffen sich zu dreien in Punkten C der Curve, u. s. w. Wenn man ferner von einem Punkte einer solchen Curve an dieselbe Tangenten zieht, so liegen deren Berührungspunkte paarweise auf je einer Curventangente, die Berührungspunkte dieser letzteren Tangente zu dreien wieder auf Curventangenten, u. s. w. Der Herr Verfasser betrachtet dann im Besondern Curven von der Gleichung

$$\alpha^m - \beta^p \gamma^{m-p} = 0,$$

wo α, β, γ drei lineare Functionen bezeichnen. Nachher wird eine Raumcurve betrachtet, welche die Gleichungen

$$x = t^p, \quad y = t^q, \quad z = t^r$$

hat; construirt man in einem Punkt dieser Curve die Schmiegungsebene, welche die Curve in Punkten T trifft, so ist die Gleichung zwischen t und T homogen; die Schmiegungsebenen, welche die Curve in den Punkten T hat, bilden ein Polyeder, dessen Kanten die Curven treffen; construirt man weiter in diesen Treffpunkten an die Curve die Schmiegungsebenen, so treffen diese sich zu dreien wieder auf der Curve u. s. w. Die Gleichung für $\frac{T}{t}$ lautet hier:

$$(z^p-1)qr(q-r)+(z^q-1)rp(r-p)+(z^r-1)pq(p-q)=0,$$

wo $\frac{T}{t}=z$ gesetzt ist.

Mz.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

Ch. Brisse. Application des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en S. Nouv. Ann. (3) I. 193-207.

Sind λ, μ, ν die Winkel, welche die drei positiven Coordinatenaxen eines beliebigen Parallelcoordinatensystems mit einander bilden, so ist der Ausdruck

$$\sigma = x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu,$$

welcher bekanntlich das Quadrat der Entfernung des Punktes x, y, z vom Anfangspunkt ausdrückt, gleich einer Summe von drei positiven und verschiedenen Quadraten, welche für keine reellen Werte von x, y, z verschwindet, ausser für

$$x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Ist ferner

$$\varphi = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$

eine homogene Function zweiten Grades mit reellen Coefficienten, so fragt es sich, für welche Werte des Parameters S der Ausdruck

$$\varphi - S\sigma$$

in ein Product von zwei linearen Factoren zerfällt. Hierzu ist notwendig und hinreichend, dass S der folgenden Gleichung dritten Grades genüge:

$$\text{(I)}\qquad \varDelta(S) = \begin{vmatrix} A-S, & B''-S\cos\nu, & B'-S\cos\mu \\ B''-S\cos\nu, & A'-S, & B-S\cos\lambda \\ B'-S\cos\mu, & B-S\cos\lambda, & A''-S \end{vmatrix} \doteq 0.$$

Diese Gleichung (I) ist es, mit deren Discussion sich die Arbeit beschäftigt. Als Anwendung knüpft sich daran die Classification der Flächen zweiter Ordnung, die Aufsuchung ihrer Kreisschnitte, die Aufstellung der Bedingung für die Umdrehungs-

flächen für beliebige, also im allgemeinen schiefwinklige Parallelcoordinaten. Die Methode der Untersuchung ist etwa folgende.

1. Die Gleichung (I) hat nur reelle Wurzeln; denn, wäre eine Wurzel gleich $S = u+iv$, so wäre

$$\varphi - S\sigma = \varphi - u\sigma - iv\sigma = (P+iQ)R.$$

Wählt man x, y, z von Null verschieden, so dass $P=0, Q=0$, so muss $v\sigma = 0$ sein; σ ist nicht Null, also muss die Constante v gleich Null sein.

2. Zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (I) geben für $(\varphi - S\sigma)$ zwei Zerlegungen von verschiedenem Charakter, wobei folgende Charaktere unterschieden werden:

$$P^2+Q^2, P^2-Q^2, -P^2-Q^2, P^2, -Q^2, 0,$$

von denen aber der vierte als specieller Fall im ersten und zweiten, der fünfte als specieller Fall im zweiten und dritten, der sechste endlich in allen vorhergehenden enthalten ist. Sind etwa S und S' zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (I) und ist $S' > S$, so kann nicht gleichzeitig sein:

$$\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2,$$
$$\varphi - S'\sigma = P'^2 + Q'^2;$$

denn sonst wäre

$$(S'-S)\sigma = P^2 + Q^2 - P'^2 - Q'^2;$$

dies ist unmöglich, da die linke Seite stets positiv ist, ausser für $x=0$, $y=0$, $z=0$, die rechte aber negativ wird, wenn $P=0$, $Q=0$, aber nicht $x=0$, $y=0$, $z=0$.

In derselben Art lassen sich auch die übrigen Teile der Behauptung beweisen.

3) Sind nun die drei Wurzeln der Gleichung (I) verschieden, und ist

$$S < S' < S'',$$

so ergiebt sich leicht, dass

$$\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2,$$
$$\varphi - S'\sigma = P'^2 - Q'^2,$$
$$\varphi - S''\sigma = -P''^2 - Q''^2,$$

und zwar mit Ausschluss der Charaktere 4, 5 oder 6. Die Fälle, in welchen zwei oder drei Wurzeln einander gleich sind, ergeben sich hieraus leicht durch Grenzbetrachtungen; nämlich, wenn

$$S = S' < S'',$$

so ist

$$Q = Q' = 0,\ P = P';$$

also

$$\varphi - S\sigma = P^2;\ \varphi - S''\sigma = -P''^2 - Q''^2.$$

Wenn

$$S < S' = S'',$$

so ist

$$P' = P'' = 0;\ Q' = Q'';$$

also

$$\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2;\ \varphi - S''\sigma = -Q''^2.$$

Wenn

$$S = S' = S'',$$

so müssen alle Ausdrücke Null sein, also

$$\varphi - S\sigma = 0.$$

4) Ist eine und nur eine der drei Wurzeln von (I) gleich Null, so ist φ selbst in ein Product zerfällbar, also von einer der drei Formen

$$P^2 + Q^2,\ P^2 - Q^2, -P^2 - Q^2.$$

Sind zwei der drei Wurzeln von (I) gleich Null, die dritte nicht, so ist φ von einer der beiden Formen P'^2 oder $-Q'^2$. Wenn die drei Wurzeln der Gleichung (I) Null wären, so wäre φ identisch Null. Diese drei Behauptungen lassen sich auch umkehren.

5) Aus diesen Betrachtungen kann man nun Schlüsse über die Form der Function φ machen, die sich folgendermassen kurz zusammenfassen lassen: Bezeichnen ε, ε', ε'' die Werte $+1, -1, 0$, je nachdem die Wurzeln S, S', S'' positiv, negativ oder Null sind, und bezeichnen X, Y, Z reelle homogene Functionen ersten Grades von x, y, z, so lässt sich φ stets in die Form bringen:

$$\varphi = \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 + \varepsilon'' Z^2.$$

6) Die Anwendung auf die Discussion der Fläche zweiter

Ordnung mit der allgemeinsten Gleichung

$$f = \varphi+2Cx+2C'y+2C''z+D = 0,$$

wofür man schreiben kann:

$$\varepsilon X^2+\varepsilon' Y^2+\varepsilon'' Z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D = 0,$$

hat nun keine Schwierigkeit. Hat die Gleichung (I) kein Mal die Wurzel Null, so ergeben sich die Flächen mit einem einzigen Mittelpunkt, im Ganzen sechs Typen. Hat sie einmal die Wurzel Null, so ergeben sich die Paraboloide, die elliptischen und hyperbolischen Cylinder und die imaginären oder zwei sich schneidende reelle oder imaginäre Ebenen; im Ganzen sieben Typen. Hat sie zweimal die Wurzel Null, so ergeben sich die parabolischen Cylinder oder zwei parallele Ebenen reell, zusammenfallend oder conjugirt, im Ganzen vier Typen.

7) Aufsuchung der Kreisschnitte. Wenn die Gleichung (I) lauter verschiedene und von Null verschiedene Wurzeln hat, so kann φ, wie oben gezeigt ist, in folgende drei Formen gebracht werden:

$$\varphi = P^2+Q^2+S\sigma,$$
$$\varphi = P'^2-Q'^2+S'\sigma,$$
$$\varphi = P''^2-Q''^2+S''\sigma.$$

Bei Benutzung der zweiten Form ergiebt sich demnach leicht

$$f=(P'-Q')(P'+Q')+S'\left(\sigma+\frac{2C}{S'}x+\frac{2C'}{S'}y+\frac{2C''}{S'}z+\frac{D}{S'}\right)=0.$$

Hieraus folgt, dass alle Ebenen parallel den Ebenen $P'\mp Q' = 0$ die Fläche in Kreisen schneiden. Ausser diesen beiden Kreisschaaren, die in reellen Ebenen liegen, giebt es entsprechend der ersten und dritten Form noch zwei Kreisschaaren, deren Ebenen parallel sind den Ebenen $P\pm iQ = 0$, und zwei solche, deren Ebenen parallel sind den Ebenen $P''\pm iQ'' = 0$. Dieser Fall kann eintreten bei den ersten der oben betrachteten Typen. Hat die Gleichung (I) lauter verschiedene Wurzeln, deren eine Null ist, so folgt, wenn etwa die mittlere Wurzel S' Null ist,

$$\varphi = P'^2-Q'^2,$$

also:

$$f = (P'-Q')(P'+Q')+2Cx+2C'y+2C''z+D.$$

Jede Ebene parallel den Ebenen $P'\mp Q' = 0$ schneidet die Fläche

in einer reellen Geraden, welche als Kreis mit unendlich fernem Mittelpunkt betrachtet werden kann. Die vier anderen Kreisschaaren, welche paarweise Wurzeln S und S'' entsprechen, bleiben bestehen und liegen, wie oben, in imaginären Ebenen. Dieser Fall kann eintreten beim hyperbolischen Paraboloid, dem hyperbolischen Cylinder und bei zwei sich schneidenden reellen Ebenen. Ist nicht die mittlere Wurzel Null, sondern eine andere, so ergeben sich statt zweier Kreisschaaren zwei Schaaren imaginärer Gerader, zwei andere Kreisschaaren werden reell, und die beiden letzten werden imaginär. Dieser Fall kann eintreten beim elliptischen Paraboloid, dem elliptischen Cylinder, dem imaginären Cylinder und zwei sich schneidenden imaginären Ebenen. Sind zwei Wurzeln der Gleichung (I) gleich, aber von Null verschieden, so ergeben sich, wie man sofort erkennt, Umdrehungsflächen der sechs ersten Typen. Sind zwei Wurzeln gleich Null, so ergeben sich Flächen, welche man ansehen kann als gewisse Grenzgestalten von Umdrehungsflächen; dieser Fall tritt ein bei den vier letzten Typen. Zum Schluss ist der kurze Nachweis zugefügt, dass ausser den durch (I) gefundenen Kreisschaaren keine anderen auf der Fläche existiren. A.

Ch. Brisse. Réduction de l'équation générale des surfaces du second ordre en coordonnées obliques. Nouv Ann. (3) I. 207-217.

In dieser Arbeit wird die Reduction der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiter Ordnung in schiefwinkligen Coordinaten von einem anderen Ausgangspunkte vorgenommen, als in der vorigen, nämlich durch Aufsuchung der Hauptrichtungen. Unter Zugrundelegung desselben Coordinatensystems, wie in der vorigen Arbeit, wird zunächst die Einführung neuer Axen (x', y', z') besprochen. Schneiden dieselben eine Kugel mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt in den Punkten a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', so wird

$$\begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z', \\ y &= bx' + b'y' + b''z', \\ z &= cx' + c'y' + c''z', \end{aligned}$$

und die Axe der x' bildet mit den ursprünglichen Axen die Winkel α, β, γ, wo

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= a \quad + b\cos\nu + c\cos\mu, \\ \cos\beta &= a\cos\beta + b \quad + c\cos\lambda, \\ \cos\gamma &= a\cos\mu + b\cos\lambda + c \quad , \text{ etc.} \end{aligned}$$

Der Winkel, den die Richtungen a, b, c und a', b', c' mit einander bilden, ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned} \cos V = (aa' + bb' + cc') + (bc' + b'c)\cos\lambda \\ + (ca' + a'c)\cos\mu + (ab' + a'b)\cos\nu \end{aligned}$$

Diejenige Ebene, welche conjugirt ist zu den Geraden, deren Richtung bestimmt ist durch

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

ist parallel zu der Ebene:

$$(Aa + B''b + B'c)x + (B''a + A'b + Bc)y + (B'a + Bb + A''c)z = 0,$$

wenn die Coefficienten der Gleichung der Fläche $f = 0$ wie in der vorigen Arbeit bezeichnet werden. Sollen jene Geraden auf der conjugirten Ebene lotrecht stehen, so müssen die Coefficienten der Gleichung der Ebene den Cosinus der drei Winkel proportional sein, welche die Gerade mit den drei Axen bildet, also:

$$\begin{aligned} A\,a + B''b + B'\,c &= S(a + b\cos\nu + c\cos\mu), \\ B''a + A'b + B\,c &= S(a\cos\nu + b + c\cos\lambda), \\ B'a + B\,b + A''c &= S(a\cos\mu + b\cos\lambda + c) \end{aligned}$$

oder

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} (A-S)a + (B''-S\cos\nu)b + (B'-S\cos\mu)c &= 0. \\ (B''-S\cos\nu)a + (A'-S)b + (B-S\cos\lambda)c &= 0. \\ (B'-S\cos\mu)a + (B-S\cos\lambda)b + (A'-S)c &= 0. \end{aligned} \right.$$

Da nicht zugleich $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ sein kann, führt die Elimination von a, b, c wieder auf die Gleichung

$$\Delta(S) = 0$$

der vorigen Arbeit, woran nun die weiteren Folgerungen leicht geknüpft werden. Namentlich zeigt sich, dass eine einfache Wurzel der Gleichung in S eine bestimmte Hauptrichtung ergiebt; eine doppelte Wurzel dagegen ergiebt unzählig viele Hauptrichtungen, welche sämmtlich einer Ebene parallel sind. (Rotations-

flächen). Eine dreifache Wurzel giebt für die Hauptrichtung jede beliebige Richtung. (Kugeln).

Sehr einfach findet man auch den Nachweis, dass zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung in S zwei auf einander senkrechte Hauptrichtungen ergeben, wenn man die beiden Wurzeln S und S' in die drei Gleichungen (II) einsetzt, sie das eine Mal mit a', b', c', das andere Mal mit $-a$, $-b$, $-c$ multiplicirt und dann addirt. Ebenso ergiebt sich leicht der Zusammenhang zwischen den drei Hauptrichtungen und den Stellungen der Ebenen der Kreisschnitte. Nach diesen Vorbereitungen wird nun die Reduction der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in schiefwinkligen Parallelcoordinaten durchgeführt; indem die Gleichung erst auf drei beliebige conjugirte Richtungen als Axen transformirt wird, dann specieller auf die drei Hauptrichtungen.

Das Interesse, welches die Arbeit, ebenso wie die vorige, beansprucht, liegt wohl wesentlich darin, dass durch sie gezeigt ist, wie auch bei schiefwinkligen Coordinaten sich die Discussion der Flächen zweiten Grades nicht wesentlich complicirter gestaltet, als bei rechtwinkligen. A.

A. J. C. Allen. On the general equation of the second degree referred to tetrahedral coordinates. Lond., M. S. Proc. XIII. 165-172.

Die Arbeit enthält eine kurze und sehr elegante Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in tetraedrischen Coordinaten, ein Problem, mit welchem sich fast gleichzeitig auch, wie der Herr Verfasser bemerkt, Herr Hart (Lond., M. S. Proc. XII. p. 135, siehe F. d. M. XIII. 1881. 522) beschäftigt hat, indessen unter Anwendung einer anderen Methode. Sind a, b, c drei in einer Seitenfläche liegende Kanten des Coordinatentetraeders, a', b', c' die drei ihnen bezüglich gegenüberstehenden Kanten, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Coordinaten eines Punktes P, nämlich die Volumina der Tetraeder mit der Spitze P und den Grundflächen $a'bc$, $ab'c$, abc', abc, jedes dividirt durch das Volumen des Coordinaten-

tetraeders, ebenso $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ die Coordinaten eines Punktes P_0 etc., und ist $P_0 P = r$, so ist

$$r^2 = a^2(\beta-\beta_0)(\gamma_0-\gamma)+b^2(\alpha-\alpha_0)(\gamma_0-\gamma)+c^2(\alpha-\alpha_0)(\beta_0-\beta)$$
$$+c'^2(\gamma_0-\gamma)(\delta-\delta_0)+b'^2(\beta_0-\beta)(\delta-\delta_0)+a'^2(\alpha_0-\alpha)(\delta-\delta_0)$$

und

$$(\alpha-\alpha_0)+(\beta-\beta_0)+(\gamma-\gamma_0)+(\delta-\delta_0)=0.$$

Ist dann

$$\frac{\alpha-\alpha_0}{\lambda}=\frac{\beta-\beta_0}{\mu}=\frac{\gamma-\gamma_0}{\nu}=\frac{\delta-\delta_0}{\varrho}=r$$

die Gleichung einer Geraden, so ist

$$\lambda+\mu+\nu+\varrho=0$$

und

$$a^2\mu\nu+b^2\nu\lambda+c^2\lambda\mu+a'^2\lambda\varrho+b'^2\mu\varrho+c'^2\nu\varrho=1.$$

Nun sei

$$u_{1,1}\alpha^2+u_{2,2}\beta^2+u_{3,3}\gamma^2+u_{4,4}\delta^2+2u_{1,2}\alpha\beta+\cdots=\varphi(\alpha\beta\gamma\delta)=0$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ ihr Mittelpunkt, r ein Halbmesser, welcher zur Richtung $\lambda\mu\nu\varrho$ gehört, dann ist

$$r^2=-\frac{\varphi(\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0)}{\varphi(\lambda,\mu,\nu,\varrho)}.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial\delta_0},$$

und die Bedingung, dass r^2 ein Maximum oder Minimum werde, kommt darauf hinaus, dass $\varphi(\lambda\mu\nu\varrho)$ ein Minimum, resp. Maximum werde. Hieraus leitet der Verfasser die Gleichung ab:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2}+\frac{c^2\varphi}{2}, & u_{1,3}+\frac{b^2\varphi}{2}, & u_{1,4}+\frac{a'^2\varphi}{2}, & 1 \\ u_{1,2}+\frac{c^2\varphi}{2}, & u_{2,2}, & u_{2,3}+\frac{a^2\varphi}{2}, & u_{2,4}+\frac{b'^2\varphi}{2}, & 1 \\ u_{1,3}+\frac{b^2\varphi}{2}, & u_{2,3}+\frac{a^2\varphi}{2}, & u_{3,3}, & u_{3,4}+\frac{c'^2\varphi}{2}, & 1 \\ u_{1,4}+\frac{a'^2\varphi}{2}, & u_{2,4}+\frac{b'^2\varphi}{2}, & u_{3,4}+\frac{c'^2\varphi}{2}, & u_{4,4}, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Dies ist eine cubische Gleichung für $\varphi=\varphi(\lambda,\mu,\nu,\varrho)$; die entsprechenden Werte von r sind dann die Quadrate der Halbaxen,

deren Richtungen alsdann auch leicht bestimmt werden können. In ähnlicher Weise werden die Axen eines Schnittes mit einer Durchmesserebene bestimmt. Es wird φ zu einem Maximum oder Minimum gemacht, indem zu den übrigen Bedingungen tritt:

$$l\lambda + m\mu + n\nu + p\varrho = 0,$$

wobei

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0$$

die Gleichung der Durchmesserebene ist.

Hieraus wird in einfacher Weise zur Bestimmung von φ die quadratische Gleichung abgeleitet:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} , & u_{1,2}+\frac{c'\varphi}{2}, & u_{1,3}+\frac{b'\varphi}{2}, & u_{1,4}+\frac{a''\varphi}{2}, & 1, & l \\ u_{1,2}+\frac{c'\varphi}{2}, & u_{2,2} , & u_{2,3}+\frac{a'\varphi}{2}, & u_{2,4}+\frac{b''\varphi}{2}, & 1, & m \\ u_{1,3}+\frac{b'\varphi}{2}, & u_{2,3}+\frac{a'\varphi}{a}, & u_{3,3}+ , & u_{3,4}+\frac{c''\varphi}{2}, & 1, & n \\ u_{1,4}+\frac{a''\varphi}{2}, & u_{2,4}+\frac{b''\varphi}{2}, & u_{3,4}+\frac{c''\varphi}{2}, & u_{4,4} , & 1, & p \\ 1 , & 1 , & 1 , & 1 , & 0, & 0 \\ l , & m , & n , & p , & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine andere Aufgabe ist die Aufsuchung des Kegels, welcher die Fläche längs eines Kegelschnittes berührt, dessen Ebene die Gleichung hat

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0.$$

Die Gleichung desselben ist

$$\varphi(\alpha\beta\gamma\delta) + k(l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta)^2 = 0,$$

wo k bestimmt ist durch die Gleichung ersten Grades:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1}+kl^2 , & u_{1,2}+klm , & u_{1,3}+kln , & u_{1,4}+klp , \\ u_{1,2}+klm , & u_{2,2}+km^2, & u_{2,3}+kmn , & u_{2,4}+kmp \\ u_{1,3}+kln , & u_{2,3}+kmn, & u_{3,3}+kn^2 , & u_{3,4}+knp \\ u_{1,4}+klp , & u_{2,4}+kmp, & u_{3,4}+knp , & u_{4,4}+kp^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es werden ausserdem noch manche Aufgaben gelöst, die hier nicht besprochen werden können. Nur das letzte Resultat möge noch Platz finden. Ist die Gleichung eines Ellipsoides

$$u_{1,1}\alpha^2 + u_{2,2}\beta^2 + u_{3,3}\gamma^2 + u_{4,4}\delta^2 = 0,$$

ist also das Coordinatentetraeder demselben conjugirt, so ist das Volumen des Ellipsoids

$$8\pi V\cdot\frac{\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2},$$

wo α, β, γ, δ, die Coordinaten des Centrums sind, also

$$u_{1,1}\alpha = u_{2,2}\beta = u_{3,3}\gamma = u_{4,4}\delta,$$

und V das Tetraedervolumen bedeutet.

Demnach ist der Ort der Centra aller Ellipsoide, welche dem Coordinatentetraeder conjugirt sind und constantes Volumen haben, bestimmt durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha\beta\gamma\delta = \lambda(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^4,$$

wo λ eine Constante bedeutet. A.

G. F. Walker, Ch. Ladd. Solutions of a question (6601). Ed. Times XXXVI. 25-26.

Eine Fläche zweiten Grades $u = 0$ ist ihre eigene reciproke Polare in Bezug auf eine Fläche, deren Gleichung ist

$$2uu_0 = \left(x_0\frac{du}{dx}+y_0\frac{du}{dy}+z_0\frac{du}{dz}+w_0\frac{du}{dw}\right)^2,$$

wo u eine homogene Function von x,y,z,w und u_0 dieselbe Function von x_0,y_0,z_0,w_0 ist. O.

A. Mannheim. Sur les surfaces homofocales du second ordre. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 322-331.

Ist ein Ellipsoid O gegeben, und legt man durch einen gegebenen Punkt des Raumes die drei zu dem Ellipsoid confocalen Flächen zweiter Ordnung, so existiren zwischen O und jenen drei Flächen gewisse geometrische Beziehungen, die in der vorliegenden Arbeit entwickelt werden. Dieselben führen zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien der confocalen Flächen. Den Schluss der Arbeit bildet ein vom Verfasser gefundener Satz, der sich auf einen einem Ellipsoid umschriebenen

Winkel von gegebener Grösse bezieht (cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 627). Cly. (Wn.).

A. Mannheim. Sur les centres de courbure principaux des surfaces homofocales du second ordre. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 421-425.

Diese Fortsetzung der obigen Arbeit enthält geometrische Beziehungen zwischen den sechs Hauptkrümmungsmittelpunkten dreier confocaler Flächen, die durch einen gegebenen Punkt gehen. Cly. (Wn.).

O. Staude. Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides. Klein Ann. XX. 147-185.

O. Staude. Ueber geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid. Klein Ann. XX. 185-186.

Der Verfasser beginnt mit einer Aufzählung der zahlreichen Untersuchungen, welche die Uebertragung von Focaleigenschaften der Kegelschnitte auf Flächen zweiten Grades zum Ziel haben, und welche sich an die Namen Jacobi, Joachimsthal, Darboux, Chasles, Plücker, MacCullagh, Amiot knüpfen. Diesen Untersuchungen, deren analytische Hülfsmittel wesentlich algebraischer Natur sind, stehen Untersuchungen gegenüber, welche an Ellipsen-Constructionen wie die Graves'sche aus einer confocalen Ellipse mittels eines geschlossenen Fadens anknüpfen, und welche ebenso wie diese Construction, die ja ihrer Natur nach mit der Längenbestimmung des Ellipsenbogens operirt, transcendenten Charakter haben. Bekannt ist die Chasles'sche Construction der Krümmungscurve auf dem Ellipsoid aus einer andern Krümmungscurve derselben Art durch einen geschlossenen Faden, sowie die ebenfalls von Chasles herrührende Construction der Krümmungscurve auf einer von zwei gegebenen confocalen Flächen zweiten Grades mittels eines Fadens, dessen Enden auf der andern befestigt sind. An diese transcendenten Constructionen schliesst

sich auch die in der vorliegenden Abhandlung untersuchte Fadenconstruction des Ellipsoides aus zwei gegebenen confocalen Flächen an. Die bei der analytischen Behandlung auftretenden Transcendenten sind hyperelliptische Integrale vom Geschlecht $p = 2$. Die ersten Paragraphen besprechen die zur Ableitung der gesuchten Construction nötigen Hülfsmittel, namentlich die elliptischen Coordinaten, Sätze über Krümmungscurven und geodätische Linien auf den Flächen zweiten Grades, sowie über die gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen. Diese Hülfsmittel führen den Verfasser dann zu folgender Construction: Man schlinge einen geschlossenen Faden um die Combination zweier confocaler Flächen, eines Ellipsoids und eines einschaligen Hyperboloids, und spanne den Faden durch einen beweglichen Punkt P derart, dass er beständig jedes der beiden durch das Ellipsoid getrennten Stücke des Hyperboloids berührt. Dann beschreibt P ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid und die Halbirungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Fadenstücke ist die Normale des Ellipsoids. Hieran schliesst der Verfasser die Angabe der Relation, die zwischen der Länge des Fadens und dem Parameter des construirten Ellipsoids besteht. Aus diesem Resultate wird dann die Chasles'sche Fadenconstruction der Krümmungscurve auf einer von zwei gegebenen confocalen Flächen, sowie die oben erwähnte Graves'sche Construction abgeleitet. Dann werden noch die Fadenconstruction des Ellipsoids aus einem confocalen Ellipsoid und seiner Focalhyperbel und aus einem confocalen einschaligen Hyperboloid und seiner Focalellipse besonders und ausführlich behandelt, weil diese Specialfälle der allgemeinen Construction noch besondere Eigentümlichkeiten bieten. Den Schluss der ersten Abhandlung bildet eine Uebersicht über diejenigen Focaleigenschaften der drei centrischen Flächen zweiten Grades, auf welche die Fadenconstruction des Ellipsoids aus seinen Focalcurven unmittelbar überleitet.

In der zweiten Abhandlung wird aus der allgemeinen Fadenconstruction des Ellipsoids ein Satz abgeleitet, der sich auf Längendifferenzen geodätischer Linienstücke auf dem Ellipsoid be-

zieht und eine Verallgemeinerung des folgenden bekannten Satzes ist. Betrachtet man zwei confocale Ellipsen in der Ebene, und zieht von zwei beliebigen Punkten der äusseren Ellipse die Tangentenpaare an die innere, so ist die Differenz der von diesen Tangentenpaaren überspannten Bögen der inneren Ellipse algebraisch ausdrückbar, nämlich gleich dem Ueberschuss der Summe der Tangentenlängen des einen Paares über die Summe der Tangentenlängen des andern Paares. Scht.

A. McMurchy, Ch. Ladd, J. Hammond, Matz. Solutions of questions (6537, 5099). Ed. Times XXXVII. 53-54, 122-123.

Bezeichnet r den Abstand eines Ellipsoidpunktes vom Mittelpunkte, p das vom Anfangspunkt auf die Tangentialebene gefällte Lot, n die Länge des Stücks der Normale, welches innerhalb des Ellipsoides liegt, φ den Winkel zwischen den Tangentialebenen in den Endpunkten jenes Normalenstücks, so ist

$$np = \frac{2a^2b^2c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-p^2(a^2+b^2+c^2-r^2)},$$

$$2a^2b^2c^2\operatorname{tg}^2\varphi = n^2p^2(2p\ n)-(2a^2-np)(2b^2-np)(2c^2-np).$$

Wn.

Moret Blanc. Solution d'une question (1369). Nouv. Ann. (3) I. 422-423.

Durch den Mittelpunkt eines Ellipsoides ziehe man rechtwinklige Ebenen A, B, C. Sind dann α, β, γ die Winkel, welche diese Ebenen mit einer festen Diametralebene P bilden, a und b die Axen des Schnittes der Oberfläche mit der Ebene P, a_1, b_1, c_1 endlich die halben Durchmesser dieses Schnittes in den Geraden (A, P), (B, P), (C, P), so ist

$$\frac{\sin^2\alpha}{a_1^2}+\frac{\sin^2\beta}{b_1^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c_1^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

O.

G. Pfeiffer. Formeln für den Inhalt der Kegelfläche. Pr. Berlin.

Der Herr Verfasser specialisirt zuerst die allgemeine Flächenformel für die Kegelflächen überhaupt, dann für diejenigen mit elliptischer Basis, wenn der Fusspunkt der Höhe des Kegels zunächst noch ein beliebiger Punkt in der Basisebene ist, und dann weiter, wenn dieser Höhenfusspunkt in einer der beiden Axen der Basis gelegen ist. Dies führt auf ein Integral von der Form:

$$\int \sqrt{A+B\cos\varphi+C\cos^2\varphi}\,.\,d\varphi,$$

welches mit aller erforderlichen Sorgfalt, wobei die Lehre von den elliptischen Integralen und Functionen volle Anwendung findet, ausgewertet wird. Auch wird gelegentlich auf den Kegel mit Kreisbasis und auf anderweitige Berechnungsweisen hingedeutet. Mz.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Flächen zweiter Ordnung von W. J. C. Sharp, M. S. Meyer, W. H. Blythe, Curtis, J. Hammond finden sich Ed. Times XXXVI. 124; XXXVII. 86-87, 108, 124.

Wn.

A. v. Braunmühl. Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades. Klein Ann. XX. 557-587.

Der Herr Verfasser leitet zunächst die Weierstrass'schen Formeln für eine geodätische Linie ab und bringt dieselben, namentlich auch die dabei auftretenden Constanten, in eine für die Berechnung möglichst bequeme Form. Alsdann teilt er die Resultate einer solchen numerischen Berechnung mit, um ein wirklich durchgeführtes Zahlenbeispiel für die Rechnung mit hyperelliptischen Functionen zu haben. Daran schliessen sich Formeln, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer geodätischen Linie, welche von einem Nabelpunkte aus-

gehen, durch einen Parameter darstellen. Der folgende Teil der Arbeit schliesst sich eng an eine frühere Arbeit des Verfassers (Clebsch Ann. XIV. 557, s. F. d. M. XI. 1879. 589) und an eine Arbeit des Herrn von Mangoldt (Kronecker J. XCI. 23-54, siehe F. d. M. XIII. 1881. 578) an. Um festzustellen, bis zu welchem Punkte hin eine geodätische Linie, die von einem gegebenen Punkte ausgeht, die Eigenschaft hat, wirklich Kürzeste zu sein, werden die Enveloppen der geodätischen Linie für das dreiaxige Ellipsoid untersucht, ihre Integralgleichungen angegeben und Grenzen bestimmt, zwischen denen der Berührungspunkt einer geodätischen Linie mit ihrer Enveloppe liegt. Zum Zweck dieser Untersuchungen wird der Begriff der halben Perioden eingeführt und die Gestalt der Enveloppen discutirt. Nach einer Betrachtung der Hauptschnitte wird die analytische Darstellung der Enveloppen durch hyperelliptische Functionen durchgeführt. Die letzten Teile der Arbeit beschäftigen sich im Wesentlichen mit demselben Gegenstand, den die citirte Arbeit des Herrn von Mangoldt behandelt. Es handelt sich um die Untersuchung des dreiaxigen zweischaligen Hyperboloids und namentlich der Grenzcurve, welche die Punkte erster und zweiter Art nach der Definition des Herrn von Mangoldt trennt. (Punkte erster Art sind solche, für welche die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, Kürzeste zu sein.) Der Herr Verfasser vervollständigt die einschlägigen Betrachtungen in mehrfacher Beziehung besonders dadurch, dass er jene Grenzcurve wirklich analytisch darstellt. Dies ist der in der Einleitung vom Herrn Verfasser selbst im Wesentlichen dargestellte Gedankengang der Arbeit. Die geometrischen Resultate sind durch mehrere Figuren erläutert.

Eine Mitteilung des Formel-Apparates ist in diesem Referate untunlich. Es genüge die Bemerkung, dass die Rechnung ihren Ausgangspunkt von Krümmungslinienparametern in einer von Liouville gewählten Form nimmt, und dass unter Benutzung der Methode von Weierstrass zur Anwendung des Jacobi'schen Umkehr-Problems auf die Summe der beiden Abel'schen Integrale ($p = 2$) und der Rosenhain'schen Formeln die Darstellung durch

ϑ-Functionen erreicht wird. Die Darstellung ist in hohem Grade durch Klarheit und Eleganz ausgezeichnet. A.

BATTAGLINI e CREMONA. Sulla memoria del prof. R. de Paolis: „Sopra alcune principali forme invariative della superficie di 3° ordine". Rom., Acc. L. (3) VI. 12.

Eine ganz kurze Inhaltsangabe, an deren Schluss gesagt ist, dass die Arbeit viele interessante neue Resultate enthalte, sowohl in geometrischer als in algebraischer Beziehung, und deshalb der Akademie zur Einreihung in die Atti dell' Accademia empfohlen wird. A.

D. Andere specielle Raumgebilde.

L. BRILL. Nachtrag zum Catalog mathematischer Modelle. Darmstadt. L. Brill.

In diesem Nachtrag wird Mitteilung von neueren Modellen gemacht, welche in dem Institut des Herrn L. Brill verfertigt und käuflich zu beziehen sind. Es sind dies

1) Elf Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen mittels Seifenlösung.

2) Zwei Modelle für Fadenconstructionen des Ellipsoids (aus Focalcurven und confocalen Flächen) von Herrn STAUDE.

3) Dreiaxiges Ellipsoid aus Gyps, längs eines Kreisschnittes zerlegbar.

4) Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden von Herrn FINSTERWALDER.

5) Einige Dupin'sche Cycliden; von demselben.

6) Flächenstreifen mit constanter positiver Krümmung, biegsam aus dünnem Messingblech.

7) Zwei die Wellenfläche betreffende Modelle.

8) Catenoid aus biegsamem Messingblech, in eine Schraubenfläche zu biegen. A.

E. Hunyady. Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades. Kronecker J. XCII. 304-306.

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist von Cayley (C. R. 1861. I. p. 1216) folgendermassen aufgestellt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2, & y_1^2, & z_1^2, & p_1^2, & x_1 y_1, & x_1 z_1, & x_1 p_1, & y_1 z_1, & y_1 p_1, & z_1 p_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ x_6^2, & y_6^2, & z_6^2, & p_6^2, & x_6 y_6, & x_6 z_6, & x_6 p_6, & y_6 z_6, & y_6 p_6, & z_6 p_6 \\ 2x, & 0, & 0, & 0, & y, & z, & p, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 2y, & 0, & 0, & x, & 0, & 0, & z, & p, & 0 \\ 0, & 0, & 2z, & 0, & 0, & x, & 0, & y, & 0, & p \\ 0, & 0, & 0, & 2p, & 0, & 0, & x, & 0, & y, & z \end{vmatrix} = 0,$$

wo x, y, z, p die Coordinaten der Kegelspitzen, $x_1, y_1, z_1, p_1, \dots, x_6, y_6, z_6, p_6$, die der sechs gegebenen Punkte bezeichnen. Die Gleichung desselben Ortes hat Hierholzer (Clebsch Ann. II. 582, s. F. d. M. II. 1870. 570) in einer anderen Form gegeben. In der Note ist der algebraische Zusammenhang beider Formen aufgedeckt. Der sich anschliessende Zusatz enthält weitere, dasselbe Problem betreffende Ausführungen und Vereinfachungen einiger Rechnungen, welche der Herr Verfasser früher (Borch. J. LXXXIII. p. 76, s. F. d. M. IX. 1877. 494) über diesen Gegenstand veröffentlicht hat. A.

J. Vályi. Die Flächen, deren sämmtliche Normalen eine Kugelfläche berühren. Hoppe Arch. LXVIII. 217-219.

Dieser specielle Fall des allgemeinen Problems, eine Fläche zu suchen, welche eine gegebene Fläche zur Mittelpunktsfläche hat, ist bereits mehrfach gelöst, wie auch der Herr Verfasser an-

giebt. U. A. findet sich eine Lösung in Monge's „Application d'analyse à la géométrie", eine andere hat Herr Enneper (Gött. Nachr. 1872, s. F. d. M. IV. 373) veröffentlicht. Der Verfasser benutzt eine von Cauchy herrührende Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichung, auf welche die Lösung des Problems hinauskommt. A.

Th. Craig. The counter-pedal surface of the ellipsoid. Sylv., Am. J. IV. 358-379.

Th. Craig. Note on the counter-pedal surface of an ellipsoid. Sylv., Am J. V. 76-79.

Unter der Contra-Pedale (counter-pedal) einer Fläche in Bezug auf einen Pol versteht der Herr Verfasser den Ort des Schnittpunktes einer veränderlichen Normale der Fläche mit einer Ebene durch den Pol, welcher der Tangentialebene parallel, also zur Normale selbst lotrecht ist. Die Contra-Pedale des Ellipsoids für den Mittelpunkt als Pol wird untersucht, und zwar wird zunächst die Coordinaten-Gleichung der Fläche ohne Parameter aufgestellt, was eine umständliche Elimination erfordert. Die Durchführung dieser Elimination, sowie einige andere Resultate verdankt der Verfasser, wie er selbst hervorhebt, Herrn Cayley. Die Gleichung der bezeichneten Fläche ist vom zehnten. Grade. Dieselbe wird benutzt, um einige Gestaltsverhältnisse der Fläche zu untersuchen. Im weiteren Fortgang der Arbeit werden die Coordinaten eines beliebigen Punktes des gegebenen Ellipsoids, sowie diejenigen des entsprechenden Punktes der Contra-Pedale durch die Krümmungsparameter des Ellipsoids dargestellt und die Fundamentalgrössen erster Ordnung der zu untersuchenden Fläche in Bezug auf diese Parameter aufgestellt, wobei sich noch mancherlei Eigenschaften der Fläche ergeben.

In der Note weist der Verfasser auf folgende Beziehung hin: Construirt man zu einem Punkte der Hauptfläche in Bezug auf den Pol den entsprechenden Punkt der Fusspunktfläche und in beiden Flächen in diesen Punkten die Normalen, so schneiden sich dieselben, und zwar in dem entsprechenden Punkte der

Contra-Pedale. Am Schlusse der Note macht der Herr Verfasser noch auf eine Klasse von Flächen aufmerksam, die er „Contra-Centrenfläche“ nennt und folgendermassen definirt: Zieht man von einem festen Punkte aus Strecken parallel den Normalen und gleich den Hauptkrümmungsradien-Strecken, so liegen deren Endpunkte auf der Contra-Centrenfläche der gegebenen Fläche. Indessen ist ausser der Aufstellung dieser Definition nichts über diese Flächen mitgeteilt. A.

TH. CRAIG. On the parallel surface to the ellipsoid. Kronecker J. XCIII. 251-270.

Die Arbeit enthält nach einigen historischen Notizen über die Vorarbeiten von Cayley, Roberts, Clebsch und Salmon eine Discussion der Parallelflächen des Ellipsoids. Die Fläche ist vom zwölften Grade und hat eine Cuspidallinie vierundzwanzigsten Grades. Nachdem die Coordinatengleichung aufgestellt ist, wird die Fläche in Krümmungsparametern dargestellt, wobei sich, wie leicht zu erkennen ist, die Coordinaten wie folgt, darstellen:

$$x = \sqrt{\frac{a(a+u)+v}{-\beta\gamma}}\left(1+\frac{k}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right) \text{ etc.,}$$

wo a, b, c die Halbaxen des Ellipsoides bedeuten, und $\alpha = b-c$, $\beta = c-a$, $\gamma = a-b$ sind. Die weitere Discussion erstreckt sich auf die Untersuchung der Hauptschnitte, auf die drei Nodalkegelschnitte, deren einer nur reell ist. Auch der unendlich entfernte Kegelschnitt des Ellipsoids, der unendlich entfernte Kreis und sechzehn seiner Tangenten gehören zur Nodalcurve. A.

O. BÖKLEN. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Schlömilch Z. XXVII. 160-175.

Die Arbeit behandelt den merkwürdigen Zusammenhang, welcher zwischen der Fresnel'schen Wellenfläche und den Trägheitsmomenten eines starren Massensystems besteht. Ist m die Masse des Systems und mk sein Trägheitsmoment in Bezug auf

irgend eine Axe, so wird $\sqrt{k}$ der sogenannte Trägheitsradius für dieselbe Axe genannt, weil die ganze Masse, in einen Punkt vereinigt, die Entfernung $\sqrt{k}$ von der Axe haben müsste, um dasselbe Trägheitsmoment zu ergeben. Wählt man nun als Coordinatenanfang den Schwerpunkt O, als Axen die Hauptträgheitsaxen für O, und sind $a > b > c$ die Quadrate der entsprechenden Hauptträgheitsradien, ist ferner x, y, z ein beliebiger Punkt M und $OM = \sqrt{r}$, also $x^2 + y^2 + z^2 = r$, dann sind die Quadrate der drei Hauptträgheitsradien für M folgendermassen bestimmt: Man berechne λ aus der cubischen Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1; \quad k = \lambda + r.$$

Die erste der beiden Gleichungen giebt für variirendes λ ein System confocaler Flächen zweiter Ordnung; jeder der drei Werte, die dem gegebenen Punkt entsprechen, bestimmt eine der drei durch M gehenden Flächen dieses Systems, und die Normalen dieser Flächen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind die Hauptträgheitsaxen für M; die entsprechenden Hauptträgheitsradien sind

$$k_1 = r + \lambda_1, \quad k_2 = r + \lambda_2, \quad k_3 = r + \lambda_3.$$

Die cubische Gleichung, welche direct die drei Werte k liefert, ist also

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{r-(k-a)} + \frac{y^2}{r-(k-b)} + \frac{z^2}{r-(k-c)} = 1.$$

Sieht man hierin k als gegeben, x, y, z, $r = x^2 + y^2 + z^2$ als variabel an, so stellt die Gleichung eine Fläche dar. Diese Fläche erhält man aber aus dem Ellipsoid

$$\text{(III)} \qquad \frac{x^2}{k-a} + \frac{y^2}{k-b} + \frac{z^2}{k-c} = 1,$$

indem man auf jedem Centralschnitte im Mittelpunkte Lote errichtet gleich den Halbaxen des betreffenden Schnittes. Der Ort der Endpunkte dieser Lote ist die Fläche (II), d. h.: der Ort der Punkte M, für welche das Quadrat eines Hauptträgheitsradius gleich k ist, ist die aus dem Ellipsoid (III) in der beschriebenen Weise abgeleitete Fresnel'sche Wellenfläche. Ist in (II) r constant, so stellt die Gleichung die eine der Flächen des confocalen Systems (I) dar, woraus folgt, dass alle Kugeln um O die

Wellenfläche in sphärischen Kegelschnitten schneiden, deren jeder zugleich auf einer Fläche des confocalen Systems (I) liegt. Es wird weiter gefolgert, dass eine Fläche dieses Systems, welche den einen Mantel der Wellenfläche in einem solchen sphärischen Kegelschnitt schneidet, den andern in einer von ihren Krümmungslinien trifft. (Dies Resultat wäre übrigens unvereinbar mit einer Bemerkung von Herrn Darboux (C. R. XCVII. 1133; Ref. im nächsten Bande), wonach die Krümmungslinien der Wellenfläche nicht algebraisch sein können. A.). Im Anschluss an diese Betrachtungen entwickelt der Herr Verfasser noch eine Reihe interessanter geometrischer Beziehungen der Wellenfläche. Diese Betrachtungen bilden den ersten Paragraphen der Arbeit. In drei darauf folgenden Paragraphen werden andere Eigenschaften der Wellenfläche untersucht, welche hier nur kurz angedeutet werden können. In § 2 wird der Complex der Geraden, durch welche zwei zu einander rechtwinklige Tangentialebenen eines Ellipsoids hindurch gehen, in seiner Beziehung zur Wellenfläche betrachtet, wie solche in ähnlicher Weise bereits von Mannheim und Painvin untersucht sind, deren Resultate der Verfasser durch anderweitige Betrachtungen wieder gewinnt und erweitert. Im § 3 wird u. A. bewiesen, dass bei den Ellipsoiden von gemeinsamem Centralschnitt, für welche die Summe der Quadrate der grossen und einer der beiden anderen Axen constant ist, die Endpunkte des dem Centralschnitte conjugirten Durchmessers eine Wellenfläche beschreiben. Der vierte Paragraph enthält eine kurze Bemerkung über die Focaleigenschaften der auf der Wellenfläche befindlichen sphärischen Kegelschnitte. In einer Schlussbemerkung wird auf die Bedeutung der Wellenfläche in optischer, mechanischer und rein geometrischer Beziehung resümirend hingewiesen.

A.

ABONNÉ. Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde. Nouv. Ann. (3) I. 29-32.

Es sei $m(x, y, z)$ ein Punkt eines Ellipsoids und ω die Ebene, welche durch die Normale in m und das Centrum o des Ellipsoids

bestimmt ist. Führt man in dieser Ebene senkrecht zu om eine Gerade $o\mu = om$, so ist der Ort der Punkte $\mu(\alpha,\beta,\gamma)$ eine Wellenfläche, und die Normalen in den entsprechenden Punkten m und μ liegen in derselben Ebene. Diese letztere Eigentümlichkeit findet, wie in vorliegender Arbeit gezeigt wird, auch noch statt, wenn

$$om = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}) = f(u)$$

gesetzt wird; es liegen also auch in diesem Falle die Normalen in correspondirenden Punkten m und μ in derselben Ebene. Für den Fall der Wellenfläche schneiden sich die Normalen nach MacCullagh, welcher obige Relationen zuerst dargelegt hat, unter rechtem Winkel. Dies trifft in dem generellen Falle nicht mehr zu, vielmehr nur unter der besonderen Annahme, dass $f(u) = k \cdot u$ gesetzt wird, wo k irgend eine Constante bedeutet.

Schn.

E. Picard. Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres. Klein Ann. XIX. 569-578.

Der Herr Verfasser betrachtet Flächen, welche keine andere Singularität haben, als Doppelcurven (Selbstschnitte), bei denen aber die beiden Tangentialebenen in jedem Punkt der Doppelcurve verschieden sind. Er versteht nach Clebsch unter dem Geschlecht einer Fläche n^{ter} Ordnung die Zahl der Coefficienten, welche in einer durch die Doppelcurve gelegten Fläche von der Ordnung $(n-4)$ willkürlich bleiben. Wenn sich nun die Coordinaten einer solchen Fläche durch Abel'sche Functionen zweier Parameter α und β ausdrücken lassen, so kann das Geschlecht der Fläche die Einheit nicht überschreiten. Der Beweis dieses Satzes bildet den Inhalt der Arbeit; demselben ist ein kurzer Beweis des analogen Satzes für ebene Curven vorausgestellt. Dieser Satz lautet: „Wenn sich die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer irreductiblen ebenen Curve m^{ten} Grades $F(x, y) = 0$

durch doppelt-periodische Functionen einer Variablen z ausdrücken lassen, so kann das Geschlecht der Curve die Einheit nicht übersteigen.“ Der Gedankengang bei diesem Beweise ist folgender. Es wird vorausgesetzt, dass die Gleichung $F(x,y)=0$ in Bezug auf y vom m^{ten} Grade sei, und dass $\frac{y}{x}$ für x gleich unendlich m endliche und verschiedene Werte habe.

Ist dann

$$\int \frac{f(x,y)\,dx}{F'_y(x,y)}$$

ein Abel'sches Integral erster Gattung in Bezug auf die Gleichung $F(x,y)=0$, so muss der Ausdruck

$$\frac{f(x,y)\,\frac{dx}{dz}}{F'_y(x,y)}$$

constant sein. Denn zunächst folgt aus der gemachten Voraussetzung, dass er doppelt-periodisch ist; dann aber lässt sich weiter beweisen, dass er keine Pole hat. Wäre nun das Geschlecht der Curve höher als Eins, so würde mindestens noch ein zweites Integral erster Gattung existiren, etwa

$$\int \frac{f_1(x,y)\,dx}{F'_y(x,y)};$$

also wäre auch

$$\frac{f_1(x,y)\,\frac{dx}{dz}}{F'_y(x,y)}$$

constant, und deshalb auch der Quotient

$$\frac{f_1(x,y)}{f(x,y)}$$

constant. Die Punkte der Curve würden also einer Gleichung niederen Grades genügen. Dies ist gegen die Voraussetzung. Einen ganz analogen Gedankengang verfolgt der Verfasser bei dem Beweise des zuerst ausgesprochenen Satzes, und zwar geht er hierbei von homogenen Coordinaten aus. A.

J. Hammond, G. Eastwood. Solutions of a question (5244). Ed. Times XXXVII. 74-76.

Bestimmung der sechzehn singulären Punkte, sowie der sechzehn singulären Tangenten einer speciellen Fläche vierter Ordnung. Wn.

W. Spottiswoode. On the polar planes of four quadrics. Lond., M. S. Proc. XIII. 28-32.

Der Ort der Punkte P, dessen Polarebenen sich in Bezug auf vier Flächen dritten Grades in einem Punkte P' schneiden, ist bekanntlich die Jacobi'sche Fläche vierter Ordnung des Systems. Es wird die Frage erörtert, unter welchen Umständen P' unbestimmt wird. Wäre indessen der Verfasser davon ausgegangen, dass auch P' auf der Jacobi'schen Fläche liegt, so würde sich hieraus in Verbindung mit den Elementen der Polarentheorie grösstenteils unmittelbar der Inhalt dieser Note ergeben haben. V.

L. de la Rive. Étude sur la projection des angles. Gen., Mém. XXVIII. No. 2.

Die Projection eines Winkels auf eine beliebige Ebene kann folgendermassen betrachtet werden. Denkt man sich um den Scheitel O des Winkels LOV eine Kugel mit dem Radius 1 geschlagen und vom Scheitel O aus das Lot auf die Bildebene gefällt, welches die Kugel in M trifft, so ist im sphärischen Dreieck LMV der Winkel M die Projection des Winkels LOV oder der Seite LV. Die Beziehung ist also wesentlich die der Seite eines sphärischen Dreiecks zu dem ihr gegenüber liegenden Winkel. Die Bildebene ist die Tangentialebene im Scheitel des Winkels oder eine ihm parallele Ebene.

Die Hauptaufgabe, mit welcher sich der Herr Verfasser beschäftigt, ist die Aufsuchung des geometrischen Ortes des Punktes auf der Kugel, auf dessen Tangentialebene sich ein gegebener Winkel, dessen Scheitel im Kugelcentrum liegt, mit constanter

Grösse projicirt; mit anderen Worten, er untersucht den Ort der Spitzen aller sphärischen Dreiecke über derselben Basis, welche einen constanten Winkel an der Spitze haben. Ist dieser constante Winkel M ein rechter, so ist die Curve ein sphärischer Kegelschnitt, mit welchem sich übrigens bereits Binet und Steiner beschäftigt haben (Steiner System. Entw. § 53, 6). Für variirenden Wert von M erhält man eine Schaar von Curven, und eine zweite Schaar von Curven ist dazu orthogonal; diese beiden Schaaren haben grosse Analogie mit zwei conjugirten Kreisschaaren der Ebene. Die Discussion dieser Curven, namentlich mit Rücksicht auf die Wendepunkte, welche bei den Curven der ersten Schaar auftreten können, und die Betrachtung gewisser Projectionen derselben bilden den Inhalt der Arbeit. Die Rechnung bietet keine Schwierigkeiten dar, sie ist für viele Fälle sogar numerisch bis zu Ende geführt. Gegenüber der grossen Menge von Rechnungsdetail wäre freilich eine mehr von geometrischen Gesichtspunkten hergeleitete Gesammtübersicht sehr erwünscht gewesen, zumal sich dieselbe sehr einfach gewinnen lässt. Zum Schluss ist eine Anwendung der betrachteten Curven auf die Bestimmung des sichtbaren Schattens einer beleuchteten geraden Cylinderfläche gemacht. **A.**

S. Kantor. Bemerkung zu Herrn Durège's Abhandlung: Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. **Wien. Anz 1882. 234; Wien. Ber. LXXXVI. 1051-1053.**

Herr Durège betrachtet das ∞^3-fache System von Curven der betrachteten Art (C_4^6), deren Gleichung ist:

$$a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_3^2 x_1^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 + 2r_{2,3}\, x_1^2 x_2 x_3 + 2r_{3,1}\, x_2^2 x_3 x_1 + 2r_{1,2}\, x_3^2 x_1 x_2 = 0,$$

wobei die a constant, die r variirende Parameter sind, und leitet daraus die Gleichungen, Doppeltangenten und mancherlei Eigenschaften der Curven ab.

Der Herr Verfasser weist auf die geometrische Bedeutung dieser Untersuchungen hin, welche im Zusammenhange mit ge-

wissen von ihm selbst vorgenommenen Arbeiten stehen, und zeigt namentlich, dass für die sämmtlichen Curven das aus den vier Doppeltangenten gebildete Vierseit in ein festes vollständiges Viereck auf bestimmte Art eingeschrieben ist. Am einfachsten ergiebt sich der geometrische Zusammenhang aus folgender Betrachtung: Projicirt man die sämmtlichen ebenen Schnittcurven einer Steiner'schen Fläche aus dem dreifachen Punkte A auf eine Ebene E, so erhält man Curven C_4^6 mit drei Doppelpunkten auf den drei Doppelgeraden und mit vier Doppeltangenten, welche die Projectionen der Schnittlinien von E mit den vier doppelt berührenden Ebenen (conische Tangentenebenen) sind.

A.

U. Masoni. Sopra alcune curve del quarto ordine dotate di punti di ondulazione. Nap., Rend. XXI. 45-69.

Das Auftreten von Undulationspunkten, d. i. Punkten einer Curve, welche mit ihrer Tangente einen vierpunktigen Contact dritter Ordnung haben, ist eine Singularität, da der betreffende Punkt ausser der Curvengleichung zwei Bedingungen erfüllen muss. Zum Zwecke der Untersuchung der Curven vierter Ordnung mit Undulationspunkten werden zunächst einige allgemeinere Sätze entwickelt, welche zum Teil von Cayley, Kantor und Salmon ausgesprochen sind. Cayley hat den Satz aufgestellt, dass eine Curve in einem Undulationspunkte von ihrer Hesse'schen Curve berührt wird. Der Herr Verfasser beweist ferner den Satz, dass die erste Polare einer Curve vierter Ordnung mit einem Undulationspunkt O für O als Pol aufgelöst ist in die Undulationstangente und einen Kegelschnitt, und dass dieser Satz sich umkehren lässt. Dieser Kegelschnitt wird der harmonische Kegelschnitt des Punktes O genannt. Er ist nicht erste Polare von O; dieselbe ist vielmehr aufgelöst in die Tangente und die Polare jenes harmonischen Kegelschnittes.

Es wird weiter gefolgert, dass durch einen Undulationspunkt folgende Curven gehen:

1) Der Ort eines Punktes, dessen polare Gerade in Bezug

Grösse projicirt; mit anderen Worten, e[illegible]gelschnitt in Bezug auf Spitzen aller sphärischen Dreiecke üb[illegible] einen constanten Winkel an der Sp[illegible]sen polare Gerade in Bezug Winkel M ein rechter, so ist [illegible] Polarkegelschnitt in Bezug auf schnitt, mit welchem sich [illegible] beschäftigt haben (Steiner [illegible] einen Undulationspunkt eine gewisse Wert von M erhält man [illegible]rungspunkte der Doppeltangenten ent- Schaar von Curven [illegible] eines Undulationspunktes vermindert die haben grosse An[illegible]genten um Eins.

Ebene. Die D[illegible] allgemeinen Betrachtungen werden nun die auf die We[illegible] Curve für verschiedene Fälle aufgestellt, und es auftreten [illegible] eine Reihe von Eigenschaften der Curven entwickelt. Ist selben [illegible] Undulationspunkt vorhanden, so kann man die Gleichung Schv[illegible] in folgender Weise aufstellen. Da nach einem bekannten Satze Er[illegible] vier vom Undulationspunkte ausgehende Strahlen die Curve noch v[illegible] in zwölf Punkten schneiden, welche auf einer Curve dritter Ordnung liegen, so lässt sich die Gleichung in die Form bringen:

$$u\Gamma + \lambda\Theta = 0,$$

wo $u = 0$ Gleichung der Undulationstangente, $\Gamma = 0$ die Gleichung jener Curve dritten Grades; $\Theta = 0$ die Gleichung des Systems der vier vom Undulationspunkte ausgehenden Strahlen ist. Diese Gleichungsform wird noch durch speciellere Annahmen des Coordinatendreiecks vereinfacht. Für eine Curve mit zwei Undulationspunkten wird die Gleichungsform aufgestellt:

$$u_1 u_2 C = B^2,$$

wo $C = 0$, $B = 0$ Gleichungen von Kegelschnitten sind, und $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ Tangenten von B. Es werden für solche Curven noch einige interessante Eigenschaften festgestellt, die hier übergangen werden. In ähnlicher Weise werden dann die Curven mit drei und mit vier Undulationspunkten untersucht, wobei auch auf die Realität der Punkte Rücksicht genommen wird. Es wird gezeigt, dass nicht mehr als vier Undulationspunkte reell sein können, und dass diese auf einem Kegelschnitte liegen, welcher die Curve in ihnen vierfach berührt. Ferner wird nachgewiesen, dass, wenn vier reelle Undulationspunkte vorhanden sind, entweder kein oder acht imaginäre Undulationspunkte vorhanden

tzteren Falle kann die Gleichung in die Form ge-

$$x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = 0,$$

ene Punktcoordinaten bedeuten. Dieser Fall, ..ellste ein besonderes Interesse hat, wird noch ..enden Discussion unterworfen. A.

H. M. JEFFERY. On spherical curves of the fourth class with quadruple foci. Quart. J. XVIII. 270-311.

Im Anschluss an eine lange Reihe ähnlicher Untersuchungen (F. d. M. VIII. 1876. 512. 476, IX. 1877. 560, X. 1878. 482, XI. 1879. 513, XII. 1880. 566. 610, XIII. 1881. 534), speciell an die zuletzt bezeichneten, werden in dieser Arbeit die sphärischen Curven vierter Klasse mit vierfachen Brennpunkten einer äusserst eingehenden Discussion unterzogen. Es werden dabei acht Hauptfälle unterschieden. Die Gesichtspunkte des Herrn Verfassers sind in früheren Referaten genügend gekennzeichnet.

A.

H. M. JEFFERY. On spherical cycloidal and trochoidal curves. Quart. J. XIX. 44-66.

In einer kurzen historischen Einleitung werden die den Gegenstand betreffenden Arbeiten von Hermann (Act. Petrop. 1726), Johann Bernoulli, Clairaut, Nicole (alle drei acad. des sciences 1736) Lexel (Act. Petrop. 1779) und Gudermann (1830) aufgezählt. Darauf werden die Eigenschaften der sphärischen Cycloiden und Epicycloiden und Epitrochoiden entwickelt. Die Resultate sind zum grossen Teil bereits in den genannten Arbeiten enthalten. Es kam dem Herrn Verfasser wesentlich auf eine zusammenhängende, seinen Methoden entsprechende Darstellung an; doch ergeben sich dabei auch einige neue Lehrsätze und Formeln über die betrachteten Curven. Die Betrachtungen erstrecken sich auf die Aufstellung der Gleichungen in sphärischen

Polarcoordinaten und anderen Coordinaten, auf Quadraturen, Rectificationen, Untersuchungen der Krümmung und der Evoluten, auf die Aufsuchung solcher Fälle, wo die Curven algebraisch werden, und solcher, wo der Bogen sich durch niedere Transscendenten ausdrückt. Zum Schluss werden nach dem Vorgange Bernoulli's einige astronomische Anwendungen besprochen.

A.

B. EASTON, D. EDWARDES. Solutions of a question (6078). Ed. Times XXXVI. 104.

Ableitung der bekannten Resultate über die Lage der Haupt- und Binormale einer Schraubenlinie.

Wn.

C. HENRY. Solution d'une question d'analyse proposée au concours d'agrégation de 1880. Nouv. Ann. (3) I. 220-230.

Ist u eine gegebene Function von α; $\varphi(\beta)$ eine solche von β, so wird eine Fläche S definirt durch die Gleichungen

$$x = (u+\beta)\cos\alpha - u'\sin\alpha,$$
$$y = (u+\beta)\sin\alpha + u'\cos\alpha,$$
$$z = \varphi(\beta),$$

wo x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten bedeuten.

1) Es ist zu beweisen, dass die Projectionen der ebenen Schnitte parallel der xy-Ebene auf die xy-Ebene selbst dieselbe Evolute haben, also parallel sind. 2) Es ist zu beweisen, dass die Normalen der Fläche S längs eines jener Schnitte eine abwickelbare Fläche erfüllen, und es ist die Gratlinie derselben zu bestimmen. 3) Die Krümmungslinien und die Hauptkrümmungsradien der Fläche S zu bestimmen.

Die Lösung ist durchgeführt, hätte sich aber freilich aus allgemeinen Betrachtungen der Flächentheorie einfacher und durchsichtiger ergeben. Die betrachtete Fläche ist nämlich, wie man sofort aus den Gleichungen erkennt, eine Canalfläche, wie sie eine beliebige Curve beschreibt, wenn ihre Ebene sich auf einer

beliebigen Cylinderfläche abrollt. Die betrachteten ebenen Schnitte sind räumliche Parallelcurven, u. s. f. A.

A. Enneper. Ueber Flächen mit besonderen Meridiancurven. Gött. Abh. XXIX.

Die Normale in einem beliebigen Punkte einer Fläche bilde mit einer bestimmten Richtung, die zur positiven z-Axe gewählt ist, den Winkel u, und ihre Projection auf die xy-Ebene bilde mit der x-Axe den Winkel v; dann kann man u als Polhöhe, v als Länge des betrachteten Punktes definiren, ebenso wie auf der Erdoberfläche. Die Curven u = const. und v = const. sind dann das Analogon der Parallelkreise und der Meridiane. Die letzteren werden vom Verfasser Meridiancurven, die ersteren Curven gleicher Polhöhe genannt. Mit jenen Meridiancurven beschäftigt sich nun die Arbeit besonders. Referent möchte bemerken, obwohl dies in der Arbeit nicht hervorgehoben ist, dass die Meridiancurven zu den sogenannten Contourlinien gehören. Eine Contourlinie auf einer Fläche, für einen beliebigen Punkt P als Projectionscentrum, ist der Ort der Berührungspunkte der von P an die Fläche gelegten Tangenten; sie bildet also im einfachsten Falle die Schattengrenze auf der Fläche, wenn die Lichtstrahlen von P ausgehen. Rückt der Punkt in's Unendliche, so geht der Berührungskegel in einen Cylinder über, und die Contourlinie wird zu einer Meridiancurve. Die Schaar der Meridiancurven, welche in der vorliegenden Arbeit betrachtet wird, ist eine solche, für welche die Schaar der Projectionscentra auf einer unendlich entfernten Geraden liegt. Nimmt man nun noch einige allgemeine Gesetze der Flächentheorie zu Hülfe, so ergiebt sich eine Reihe der in der Arbeit durch nicht ganz einfache Rechnungen gewonnenen Resultate sehr einfach ohne jede Rechnung, und es lassen sich die Resultate sogar ohne Weiteres wesentlich allgemeiner formuliren.

Nach Aufstellung allgemeiner Rechenformeln und Untersuchung der Krümmungen einer Meridiancurve werden die

Flächen mit planen und die mit geodätischen Meridiancurven allgemein analytisch dargestellt. Namentlich werden in beiden Fällen die Minimalflächen untersucht, und es werden folgende Sätze gewonnen.

Eine geodätische Meridiancurve ist die Helix (geodätische Linie) einer Cylinderfläche, nämlich des Berührungscylinders (siehe oben). Die Ebene einer planen Meridiancurve bildet einen constanten Winkel mit der Ebene, welche die Normale zur Fläche enthält und einer festen Geraden parallel ist. Eine Fläche mit einem System geodätischer Meridiancurven ist eine Schale der Krümmungscentra einer Fläche mit einem System planer Krümmungslinien, deren Ebenen einer festen Geraden parallel, also Tangentialebenen eines Cylinders sind.

Den Schluss der Arbeit bilden vermischte Untersuchungen. Dieselben handeln von Flächen, deren Meridiancurven die Linien des grössten Abfalls in Beziehung auf eine feste Ebene sind, von solchen, welche von den osculatorischen Kugelflächen ihrer Meridiancurven berührt werden, und endlich von der windschiefen Fläche der Normalen längs einer Meridiancurve. A.

A. Ennkper. Beiträge zur Theorie der Flächen, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der Minimalflächen. Gött. Nachr. 1882. 34-47, 89-120.

Der erste der Beiträge enthält den Beweis eines früher von dem Herrn Verfasser bereits ohne Beweis mitgeteilten Satzes. Zwei Flächen S und S' mögen sich so entsprechen, dass die Normalen in zwei correspondirenden Punkten parallel sind. Soll den Krümmungslinien der Fläche S auf S_1 ein orthogonales System entsprechen, so können zwei Fälle stattfinden. Erstens: Den Krümmungslinien der Fläche S entsprechen auf S_1 ebenfalls Krümmungslinien. Zweitens: In jedem Punkte der Fläche S_1 ist die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser constant, d. h. S_1 ist eine Minimalfläche.

Sind S und S_1 zwei Minimalflächen, so entspricht allgemein

einem orthogonalen System auf der einen Fläche auch ein orthogonales System auf der anderen. In dem zweiten Beitrag wird die von Herrn Bonnet im Jahre 1860 behandelte Aufgabe, die Minimalflächen mit planen Krümmungslinien aufzusuchen, noch einmal aufgenommen, da in der Bonnet'schen Entwickelung gewisse Fälle nicht berücksichtigt sind. Namentlich ist eine von Herrn Enneper gefundene algebraische Minimalfläche von Herrn Bonnet übersehen. Die Flächen werden schliesslich in folgender Weise dargestellt:

$$x = \frac{k}{n^2}\left(u - \frac{\sin nu \cos nvi}{n}\right) - \frac{1}{4k}\left(u + \frac{\sin nu \cos nvi}{n}\right),$$

$$y = -\frac{k}{n^2}\left(v - \frac{\cos nu \sin nvi}{ni}\right) - \frac{1}{4k}\left(v + \frac{\cos nu \sin nvi}{ni}\right),$$

$$z = \frac{1 - \cos nu \cos nvi}{n^2}.$$

Durch eine Umformung kommt man auf die Bonnet'schen Gleichungen, die indessen weniger allgemein sind.

Der dritte Beitrag enthält weitere Ausführungen des in (I) aufgestellten Theorems. Sind u und v sogenannte Abbildungsparameter, so dass das Linienelement die Form hat:

$$ds = t\sqrt{du^2 + dv^2},$$

so nennt der Verfasser die Parametercurven isometrische und beweist den Satz: „Zwei Flächen S und S_1 entsprechen sich so, dass die Normalen in entsprechenden Punkten parallel sind (I). Sollen sich dann isometrische Krümmungslinien gegenseitig entsprechen, so ist das Quadrat des Krümmungsverhältnisses für entsprechende Punkte gleich. Ist die eine Fläche eine Kugel, so ist die andere entweder eine Kugel oder eine Minimalfläche.“ Dieser Satz wird benutzt, um alle möglichen „isometrischen Coordinatensysteme“ auf der Kugel anzugeben, eine Aufgabe, die übrigens bekanntlich durch die Theorie der conformen Abbildung bereits gelöst ist.

Der vierte Beitrag giebt einige Vereinfachungen der Formeln, welche in der Arbeit des Verfassers: „Ueber eine Erweiterung des Begriffs der Parallelflächen“ (Gött. Nachr. 1870-72, s. F. d. M. II. 1869. 534) vorkommen.

In dem fünften werden Formeln entwickelt, welche die analytischen Definitionen der Minimalflächen durch Krümmungslinien oder asymptotische Linien als specielle Fälle enthalten.

Im sechsten Beitrag endlich werden andere Parametercurven auf der Kugel zu Grunde gelegt, namentlich Meridiane und Parallelkreise, und es werden noch einige Eigenschaften der Minimalflächen besprochen, besonders der Satz: „Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien, r_1 und r_2 die Torsionsradien der beiden Krümmungslinien in einem Punkte einer Minimalfläche, so ist

$$r_1\varrho_1^2 = r_2\varrho_2^2.\text{“}$$

Endlich wird folgende Bemerkung gemacht: Nach einem Satze von Bonnet lässt sich eine Minimalfläche so biegen, dass die Krümmungslinien in asymptotische Linien übergehen. Ist ϱ_1' und r_1' Krümmungs- und Torsionsradius der daraus durch die Biegung entstandenen asymptotischen Linie, so ist:

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\varrho_1'^2} + \frac{1}{r_1'^2}.$$

A.

A. Ribaucour. Étude des elassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle. Brux., Mém. cour. in 4° XLV.

Diese wichtige Arbeit enthält im strengen Sinne der Theorie der Elassoiden 1) die Lösung des Problems von Monge, welche gleichzeitig von Herrn S. Lie gefunden ist; 2) die vollständige Lösung des Problems von Björling im geometrischen Sinne, d. h. die Lösung wird auf die Abwickelung einer abwickelbaren Fläche zurückgeführt. Ausserdem enthält die Arbeit eine Menge specieller bemerkenswerter Resultate und verschiedene neue Ansichten, die für das Studium der Elassoiden und anderer damit verknüpfter Fragen vielversprechend zu sein scheinen. Hier die kurze Inhaltsangabe der einzelnen Capitel.

I. Definitionen und Methode. Die angewandte Methode stützt sich, unter Benutzung der Formeln von Codazzi, auf den Gebrauch variabler Axen, deren Anfangspunkt sich auf der Oberfläche verschiebt. Diese Methode nennt der Verfasser Perimorphie.

Der mittlere Punkt (point moyen) einer Geraden einer Congruenz ist der Mittelpunkt der Geraden, welche die beiden Brennpunkte, die auf der Geraden liegen, verbindet; die mittlere Fläche (surface moyenne) ist der Ort der mittleren Punkte. Die Ombilicale ist der allen Kugeln gemeinsame imaginäre Kreis in der Ebene im Unendlichen; eine isotrope Gerade ist die, welche die Ombilicale schneidet, eine isotrope Ebene die, welche sie berührt; eine isotrope Developpable die, welche sie enthält; ihre Rückkehrkante wird eine isotrope Linie oder von der Länge Null sein. Eine isotrope Congruenz ist die, deren Brennpunktsoberflächen (Tangenten an alle Gerade der Congruenz) isotrope Developpable sind. Die Bezeichnungen „mittlere Fläche“ und „isotrope Congruenz“ sind neu.

II. Geometrischer Beweis der Riemann'schen Formel für den Flächeninhalt des Teils des Elassoids, welcher durch eine gegebene Umgrenzung bestimmt ist.

III. Geometrische Integration der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen. (Problem von Monge.)

IV. Isotrope Congruenzen. Als Hauptresultat: Die Einhüllende der Ebenen, welche senkrecht durch die mittleren Punkte der Geraden einer Congruenz gezogen sind, oder mittlere Eingehüllte (enveloppée moyenne) ist ein Elassoid, genannt mittleres Elassoid (élassoide moyenne).

V-VII. Construction der isotropen Congruenzen, die ein und dasselbe mittlere Elassoid liefern. Ihre Zahl ist dreifach unendlich, und sie können aus einer von ihnen abgeleitet werden. Umgekehrt kann man das mittlere Elassoid einer isotropen Congruenz aus der elementaren Oberfläche ableiten, welche diese Congruenz bestimmt. Verschiedene Folgerungen, darunter besonders die: Das mittlere Elassoid und die mittlere Fläche sind Focalen ein und derselben Congruenz.

VIII. Eigenschaften der mittleren Flächen. 1) Die mittlere Fläche einer isotropen Congruenz ist der Ort der Mittelpunkte von unter sich gleichen Sehnen, deren Endpunkte Flächen beschreiben, welche auf einander abwickelbar sind; und reciprok. 2) Nimmt man die Centralpunkte (points centraux) der Geraden

einer isotropen Congruenz und die abbildenden Punkte dieser Geraden auf einer Kugel als sich entsprechend an, dann entsprechen sich die mittlere Fläche und die Kugel orthogonal. 3) Die asymptotischen Linien des Elassoids und der mittleren Fläche entsprechen sich. 4) Wenn das mittlere Elassoid und die mittlere Fläche zusammenfallen, so ist es eine Regelfläche und, nach dem Satz von Catalan, ein Helicoid mit einer Leitebene.

IX-X. Von jedem isothermen orthogonalen System der Kugel kann man unendlich viele isotrope Congruenzen ableiten, deren mittlere Elassoiden als zu einer Gruppe gehörig bezeichnet werden. Sie sind auf einander abwickelbar und können auf unendlich viele Arten in conjugirte Elassoide zerfallen, d. h. in solche, bei denen nach Bonnet das Bild der asymptotischen Linien der einen zum sphärischen Bilde die Krümmungslinien der andern hat. Der Verfasser stellt für diese conjugirten Elassoide folgenden neuen Satz auf: Ihre Elemente entsprechen sich orthogonal, und den reciproken: Damit zwei Elassoide conjugirt seien, genügt die Erfüllung zweier der folgenden Bedingungen: 1) Die Tangentialebenen sind parallel. 2) Die Elemente sind gleich. 3) Die Elemente sind orthogonal. Von einer isotropen Congruenz kann man Elassoide, die der Verfasser geschichtete (stratifiées) nennt, ableiten, die eine Familie bilden, welche nur ein Paar conjugirter Elassoide umfasst. Diese geschichteten Elassoide stehen in enger Beziehung zu den zu einer Gruppe gehörigen Elassoiden (groupés).

XI. Geometrische Lösung des Problems von Björling (Construction eines Elassoids längs einer bestimmten Begrenzung, das einer gegebenen Developpabeln eingeschrieben ist). Man sucht eine Begrenzung, welche durch Gleichheit und Orthogonalität der Elemente der ersten conjugirt ist. Man kann zwei solcher conjugirter Contouren mittels einer bekannten Fläche ableiten. Daraus entspringt das wichtige Resultat: Die Kenntnis einer willkürlichen Fläche umfasst die von unendlich vielen zu einer Gruppe gehörigen oder geschichteten Elassoiden. Verschiedene Fälle, wo die Elassoide algebraisch sind.

XII-XIV. Isotrope Congruenzen und von einer Ebene abgeleitete Elassoide. Transcendente Elassoide mit algebraischen Linien. Krümmungslinien der Elassoide, die von einer Ebene abgeleitet sind. Der Fall, in dem sie von elliptischen oder algebraischen Functionen abhängen. Specieller Fall, in dem das Elassoid zwei Reihen von ebenen Curven besitzt, deren Krümmungsradius ein grösseres oder kleineres ganzes Vielfaches der Normale ist. (Beispiele: Die Catenoide oder Alysseide, Umdrehungselassoid und das parabolisch-cycloidische Elassoid von Catalan.)

XV-XVI. Neue Eigenschaften der von der Ebene abgeleiteten isotropen Congruenzen und neue Definition der Elassoide mittels der Linien grösster Neigung einer gewissen Fläche. Anschauliche Discussion einer Fläche von Schwarz; Niveaulinien der Elassoide.

XVII-XX. Charakteristische Eigenschaften der isotropen Congruenzen, die aus den Generatricen von homofocalen Flächen zweiten Grades gebildet sind. Algebraische Elassoide, die durch einen Kreis gehen; es giebt deren so viele, dass man algebraische Epicycloiden davon construiren kann. Elassoide, von homofocalen Paraboloiden abgeleitet. Elassoide, die auf Umdrehungsflächen abwickelbar sind. Gleichung der Elassoide neunter und zwölfter Ordnung.

XXI. Verschiedene Eigenschaften der Elassoide. Dies Capitel ist wichtig, da es neue Verallgemeinerungen oben bezeichneter Resultate enthält. Folgende Sätze mögen hervorgehoben werden: 1) Die Axen einer Congruenz von Kreisen, welche nur zwei Focale in endlicher Entfernung hat, bilden eine isotrope Congruenz; man kann unendlich viel andere und daher unendlich viele Elassoide davon ableiten, indem man die Kreiscongruenz durch reciproke Radiivectoren transformirt. 2) Es seien $(A), (A')$ zwei auf einander abwickelbare Flächen, (O) die Oberfläche, welche der Ort der Mittelpunkte O der Geraden AA' ist, welche die entsprechenden Punkte verbinden. Es giebt ein anderes Paar $(B), (B')$ von abwickelbaren Flächen und eine Fläche (Ω), welche der Ort der Mittelpunkte der Geraden BB' ist, welche die

entsprechenden Punkte verbinden. Diese Flächen BB' haben die Eigenschaft, dass (O) alle Ebenen senkrecht zu den Geraden BB' in Ω berührt. Die Flächen $(O), (\Omega)$ sind Focalen derselben Congruenz, AA' ist parallel zur Normale von Ω an (Ω), und man hat

$$AA'.BB' \sin V = kO\Omega,$$

wo V den Winkel der Normalen an (O) und (Ω) bezeichnet, und k constant ist. 3) Es seien (O) und (M) zwei Flächen, die sich in ihren Elementen orthogonal entsprechen. Legt man durch die Punkte von (M) Parallelen zu den Normalen von (O), dann bilden dieselben eine Congruenz, deren mittlere Fläche (M) ist, und deren Hauptebenen, welche Tangentialebenen zu den Focalflächen sind, senkrecht zu den Asymptoten der Indicatrix in O an (O) sind. Mn. (O.).

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen. II. Zur projectiven Verbindung der Gebilde höherer Stufen. Wolf Z. XXIV. 180-189.

Ergänzung zu F. d. M. XI. 1879. p. 595. Der Verfasser behandelt algebraisch und allgemein die projective Verbindung von Gebilden beliebiger Stufe behufs Erzeugung neuer Gebilde, erhält dadurch die Erzeugungsarten der Flächen, dann aber auch die der Strahlencomplexe. Es ergeben sich zunächst für den Complex zweiten Grades drei projective Erzeugungen, und zwar aus ∞^1 linearen Congruenzen, aus ∞^2 Regelschaaren und aus ∞^3 Strahlengruppen. Diese Erzeugungen werden dann auf alle algebraischen Complexe ausgedehnt und als Grundlagen einer Classification derselben hingestellt. Die Erzeugung der Complexe zweiten Grades aus ∞^2 Regelschaaren hatte zwar schon vorher Herr Schur in seiner Berliner Dissertation (1879) sehr ausführlich synthetisch discutirt. Doch ist

Fiedler's Entdeckung schon deshalb unabhängig von der von Schur, weil Herr Fiedler diese Erzeugung schon bei Gelegenheit der Bearbeitung der dritten Auflage der Salmon-Fiedler'schen „Analytischen Geometrie des Raumes" (1878) erkannt hatte, ohne sie freilich sofort zu publiciren. Was aber die Hauptsache ist, die Entwickelung von Herrn Fiedler liefert drei projective Erzeugungen der Complexe und führt nicht blos zu denen zweiten, sondern auch zu denen n^{ten} Grades. Ferner muss hervorgehoben werden, dass die vorliegende Arbeit des Herrn Fiedler vor der neuen Auflage der Reye'schen „Geometrie der Lage", wo diese Dinge berührt werden, erschienen ist. Scht.

G. Battaglini. Sui connessi ternarii di 1° ordine e di 1ª classe. Batt. G. XX. 230-249.

Der Verfasser entwickelt in elementarer Weise, bei welcher nur das Princip der symbolischen Schreibweise benutzt wird, einige der Haupteigenschaften der Connexe (1,1) und der Coincidenzen zweier solcher Connexe. Dass der Connex und sein Conjugirter von vornherein als völlig gleichwertig durch die Gleichungen $(Ax)(bY) = 0$, $(aX)(By) = 0$ eingeführt werden, ist an und für sich wohl von Interesse; die Uebersichtlichkeit der Darstellung, die sich in manchen Punkten auch vielleicht hätte kürzer fassen lassen, scheint indessen nicht dadurch zu gewinnen, dass gleichzeitig immer die verschiedenen Formen, in denen demzufolge jede Relation auftreten muss, aufgestellt werden.

V.

A. Weiler. Die Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen. Schlömilch Z. XXVII. 257-288.

Von den 58 verschiedenen Complexen zweiten Grades, welche der Verfasser zuerst in seiner Dissertation (Clebsch Ann. VII. s. F. d. M. V. 1873. 416) beschrieben hat, haben 38 eine Regelfläche zur Singularitätenfläche. Lässt sich nun der Complex

durch lineare Congruenzen erzeugen, so bilden die Directricen derselben eine Regelfläche, welche notwendig zur Singularitätenfläche gehört, und umgekehrt muss auch, sobald die Singularitätenfläche windschief ist, jede Erzeugende derselben Directrix eine dem Complexe angehörigen linearen Congruenz sein. Hieraus ergiebt sich nun die folgende analytische Methode zur Bestimmung dieser Congruenzen: Man drücke die Lage zweier Punkte P, Q auf der Singularitätenfläche durch Parameter α, β; γ, δ aus, bestimme die Coordinaten des Strahles PQ und stelle die Bedingung dafür auf, dass derselbe dem Complexe angehört. Sind nun α, γ die Parameter der Erzeugenden, auf der P liegt, so müssen die Coefficienten der Glieder mit β, δ einen nur von α, γ abhängigen Factor besitzen, dessen Verschwinden aussagt, dass jene Erzeugende Directrix einer linearen Congruenz des Complexes ist. Auf diesem Wege leitet der Verfasser für die 38 Complexe die Construction der Directricenpaare der erzeugenden linearen Congruenzen her; in einigen Fällen werden auch rein synthetische Betrachtungen zur Bestimmung derselben angewandt.

V.

Genty. Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure. Résal J. (3) VIII. 299-335.

Nachdem in der Einleitung an einigen Beispielen die Aufstellung von Gleichungen verschiedener Complexe mittels der Quaternionentheorie gezeigt worden ist, giebt der Verfasser Gleichung und Einteilung der in der Ueberschrift genannten Complexe und untersucht dann eingehend die erste Art derselben, welche durch das Auftreten zweier conjugirter linearer Vectorfunctionen in der Gleichung gekennzeichnet ist. Besonders ausführliche Behandlung erfährt die mit diesem Complex zusammenhängende Kummer'sche Fläche. Schg.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

F. ASCHIERI. La trasformazione quadratica doppia di spazio; e la sua applicazione alla geometria dello spazio non Euclideo. Lomb., Ist. Rend. (2) XIV. 673-683; XV. 66-77, 147-154, 247-250.

Charakteristisch für diese Untersuchungen ist die Einführung des Begriffes des „Abstandes“ zweier linearer Complexe X, Y im Sinne der nicht-euclidischen Geometrie, wie folgt. In dem Complexbüschel (X, Y) befinden sich zwei specielle Complexe, deren Axen bekanntlich die Directricen der den Complexen des Büschels gemeinsamen Congruenz sind. Irgend eine Ebene trifft diese beiden Directricen in einem Punktepaar, auf dessen Verbindungslinie sich noch ein zweites ausgezeichnetes befindet: Das der Pole der Ebene, bez. der beiden Complexe X, Y. Dann wird unter dem Logarithmus des Doppelverhältnisses des zweiten Punktepaares zum ersten, noch multiplicirt mit $\frac{1}{\pi}$, der gewünschte Abstand definirt. Dies wird im Besondern auf den Fall angewandt, wo die beiden Complexe dem vierfach ausgedehnten Gebiet $\Omega^{(4)}$ der zu einem festen linearen Complex θ in Involution stehenden Complex angehören. Die speciellen Complexe dieses Gebiets bilden ein dreifach ausgedehntes Gebiet $\Sigma^{(3)}$. Dann kann man auch sagen: Der Abstand zweier (linearer) Complexe X, Y des Gebietes $\Omega^{(4)}$ unterliegt der üblichen Definition eines nicht-euclidischen Abstandes, wenn man den Raum $\Omega^{(4)}$ als einen nicht-euclidischen, mit dem Raum $\Sigma^{(3)}$ als absolutem Grundgebilde, auffasst.

Dies findet zunächst seine Anwendung auf den gewöhnlichen Linienraum $Y^{(4)}$, indem dieser zum Raume $\Omega^{(4)}$ in eine ein-zwei-

deutige Correspondenz (1,2) gesetzt wird, so dass jeder Geraden Y ein bestimmter Complex Ω, und umgekehrt einem Complexe Ω das Paar von Geraden Y, Y' zugeordnet wird, die bezüglich des festen Complexes θ conjugirt sind. Es geschieht dies mittels der von den Herren Lie und Schur begründeten Abbildung eines linearen Complexes (θ) auf den Punktraum (cf. z. B. Schur, Clebsch Ann. XV., s. F. d. M. XI. 1879. 591) in rein geometrischer Weise, aber auch ganz unabhängig davon analytisch; einem speciellen Complex Σ entsprechen dabei zwei in eine einzige (und zwar dann immer mit einer Geraden des Complexes θ) coincidirende Gerade. Damit ist dann der Begriff des Abstandes auf den Linienraum übertragen, woraus eine Reihe von Sätzen fliesst; z. B.: alle Geraden, die von einer festen Geraden einen festen Abstand bewahren, bilden einen linearen Complex, etc. Der Abstand zwischen zwei Geraden ist dabei immer der gleiche, wie der zwischen ihren (bez. θ) conjugirten. Besonders wichtig sind die beiden Fälle, wo der Abstand gleich Null, resp. $\frac{\pi}{2}$ ist. Im ersteren Fall haben die beiden Complexe eine Congruenz mit doppelt zählender Directrix gemein (und die entsprechenden Geraden treffen sich), im zweiten sind sie in Involution, so dass die beiden Worte „orthogonal“ und „in Involution“ dasselbe aussagen. Dieser Abbildung steht zur Seite eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Complexbüscheln (C) und Complexnetzen $\{d^{(2)}\}$ (des Raumes $\Omega^{(4)}$), die dadurch völlig bestimmt ist, dass jeder Complex eines Büschels mit jedem Complex des zugeordneten Netzes in Involution steht. Die Directricen der Congruenz (C) gehören dem festen Complex θ an; θ hat mit dieser Congruenz (C) eine Regelschaar $\nu^{(2)}$ gemein, deren Leitschaar wieder $d^{(2)}$ ist; d. i. die den Complexen des Netzes $\{d^{(2)}\}$ gemeinsame Regelschaar. Die gewonnenen Ergebnisse kann man auf die Kugelgeometrie übertragen und erhält dadurch eine grosse Reihe von Sätzen über Kugeln, die andere unter festen Winkeln schneiden etc., mit einem Schlage. Diese Uebertragung vermittelt sich wieder mittels der Lie-Schur'schen Abbildung der Geraden des Complexes θ auf die Punkte eines (gewöhnlichen) Raumes $S'^{(3)}$,

indem man speciell als Fundamentalkegelschnitt dieser Abbildung den imaginären Kugelkreis $C'^{(2)}$ des Raumes $S'^{(3)}$ nimmt. Dann entspricht jeder linearen Congruenz in θ eine Kugel Σ' jenes Raumes, und umgekehrt; oder auch, da irgend eine lineare Congruenz in θ sich als gemeinsame Congruenz des Büschels $(\theta\Omega)$ darstellen lässt, (wo Ω ein Complex des Gebietes $\Omega^{(4)}$), jedem linearen Complex Ω von $\Omega^{(4)}$ eine Kugel Σ', und umgekehrt. Insbesondere entspricht einer Congruenz $(\theta\Omega)$ mit doppelt zählender Directrix ein Kugelkegel, d. i. ein solcher Kegel, der über dem Kugelkreis $C'^{(2)}$ steht. Das Wesentliche dieser Abbildung des Complexraumes $\Omega^{(4)}$ auf den Kugelraum $(\Sigma'^{(4)} = S'^{(3)})$ besteht darin, dass der Abstand zweier Complexe X, Y (in $\Omega^{(4)}$) übergeht in den gewöhnlichen euclidischen Winkel der beiden entsprechenden Kugeln. Von den so erhaltenen Sätzen sei angeführt: „Zwei (gewöhnliche) Kugeln bestimmen ein Büschel, dem zwei „Kugelkegel" angehören. Die sämmtlichen durch die zwei Spitzen dieser Kegel gehenden Kugeln bilden ein Netz von zum gegebenen Büschel orthogonalen Kugeln." Aehnlich für drei und vier Kugeln etc.

Der übrige Teil der Arbeit des Herrn Verfassers wird gebildet durch eine mit Hülfe des Obigen hergestellte eigentümliche Combinirung der Theorie der „nicht-euclidischen" Kugeln mit der der gewöhnlichen euclidischen. Unter einer nicht-euclidischen Kugel wird eine Fläche zweiter Ordnung verstanden, die eine feste solche Fläche $S^{(2)}$ längs eines Kegelschnitts berührt; ihr Centrum heisst das Centrum einer solchen Kugel; zwei solche Kugeln schneiden sich in zwei „nicht-euclidischen" Kreisen etc. Dann kann man zwischen den Kugeln $\Sigma' = S_\lambda'^{(2)}$ eines Raumes S' und den nicht-euclidischen Kugeln $S_\lambda^{(2)}$ eines Raumes S eine Correspondenz (1,2) in folgender Weise bilden. Aus den Kugeln des Raumes S' wird eine feste $S'^{(2)}$ herausgegriffen, durch die zugleich eine bestimmte Inversion J festgelegt ist. Dieser festen Kugel $S'^{(2)}$ entspreche im Raume $\Omega^{(4)}$ ein Complex Ω. Damit correspondiren dann (vermöge der Abbildung des Raumes $\Omega^{(4)}$ auf den Linienraum $Y^{(4)}$ und zugleich des Complexes θ auf den Raum S') irgend einem Punktepaar der Inversion J ein Paar

von Geraden des Complexes θ, die bezüglich des Complexes Ω conjugirt sind. Sämmtlichen linearen Complexen von $\Omega^{(4)}$, die durch die Directricen der Congruenz $(\Omega\theta)$ gehen, entsprechen die in J sich selbst conjugirten (und daher zur festen $S'^{(2)}$ orthogonalen) Kugeln. Damit sind die Elemente der Correspondenz (1,2) zwischen den euclidischen Kugeln in S' und den nicht-euclidischen Kugeln in S (indem man diesen Raum als nicht-euclidischen mit der absoluten Fläche $S^{(2)}$ auffasst) gegeben, nämlich: Jeder nicht-euclidischen Kugel in S entsprechen zwei euclidische in S', die dann in der Inversion J zu einander conjugirt sind; umgekehrt, jeder nicht-euclidischen Kugel in S' entspricht eine einzige euclidische in S. Zugleich entsprechen dann den Ebenen des nicht-euclidischen Raumes S die zur festen Kugel $S'^{(2)}$ orthogonalen euclidischen Kugeln; umgekehrt den Ebenen des euclidischen Raumes S' die nicht-euclidischen Kugeln, die durch einen festen (Fundamental-)Punkt gehen, das Centrum der der festen Kugel $S'^{(2)}$ entsprechenden. Von den daraus entspringenden Sätzen wollen wir hier folgende anführen: „Der Winkel, unter dem sich zwei nicht-euclidische Kugeln längs ihrer beiden Schnittkreise treffen, ist für jeden der beiden Kreise constant, aber im Allgemeinen für beide Kreise ein verschiedener. Er ist dann und nur dann der gleiche, wenn das Centrum der einen Kugel auf der Ebene des Kegelschnitts liegt, indem die andere die absolute Fläche $S^{(2)}$ berührt.“

„Die nicht-euclidischen Kugeln, die eine feste Kugel, wenigstens in den Punkten eines und desselben Kegelschnitts unter constantem Winkel treffen, bilden ein solches (dreifach unendliches) System, dass durch irgend drei Punkte im Allgemeinen sechzehn solcher Kugeln gehen.“ etc.

Aehnliche Betrachtungen für die Ebenen hatte schon Herr de Paolis angestellt. Zum Schlusse sei angedeutet, dass die Entwickelungen des Herrn Verfassers über lineare Complexe (abgesehen von dem Zusammenhang mit der nicht-euclidischen Geometrie) im engsten Verhältnis stehen zu dem Uebertragungsprincip des Referenten (cf. z. B. Clebsch Ann. XVI. p. 125. Ref. im nächsten Bande dieser Fortschritte), sofern man dieses an-

wendet auf die Abbildung der linearen Complexe auf die Kegelschnitte in der Ebene, wie sie der Referent in seiner Schrift über Apolarität durchgeführt hat. My.

E. Bertini. Costruzioni geometriche della trasformazione univoca di 3° ordine. Lomb., Ist. Rend. (3) XV. 154-158.

Eine ein-eindeutige Transformation dritten Grades zwischen den Punkten zweier Ebenen, die zugleich mit Hülfe einer Collineation stets in die allgemeinste Transformation ihrer Art übergeführt werden kann, kann immer auf eine von den folgenden zwei Weisen hergestellt werden. Entweder trifft die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte zugleich eine Gerade und einen Kegelschnitt (im Raume), die einen Punkt gemein haben, oder es werden je zwei entsprechende Punkte durch einen variabeln Kegelschnitt ausgeschnitten, der durch je einen festen Punkt beider Ebenen geht und ausserdem einen festen Kegelschnitt (im Raume) zweimal trifft. My.

M. Nöther. Note über die algebraischen Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen. Klein Ann. XX. 59-63.

M. Nöther. Nachtrag zu dieser Note. Klein Ann. XXI. 138-140.

Algebraischer Beweis des Satzes, dass keine algebraischen Curven von einem Geschlecht $p > 1$ existiren, die durch unendlich viele rationale eindeutig umkehrbare Transformationen in sich übergehen. Zu Grunde gelegt werden einmal die algebraischen Entwickelungen der Herren Brill und Nöther (Clebsch Ann. VII., s. F. d. M. VI. 1874. 251) über eindeutige Transformationen und die φ-Functionen, sodann insbesondere der Satz (dessen algebraischen Beweis der Herr Verfasser später an anderer Stelle geliefert hat), dass es auf einer algebraischen (irreductibeln) Curve $f(s,z) = 0$ nur eine endliche Anzahl solcher „specieller“ Punkte (s_0, z_0) giebt, in denen eine rationale Function von s, z von

der Ordnung $\mu < p$ verschwindet, ohne sonst zu verschwinden. Für $p > 1$ ist die Anzahl dieser Stellen > 0, nämlich gleich $(p-1)\,p(p+1)$.

Zunächst wird nachgewiesen, dass die Parameter der unendlich vielen Transformationen (falls solche existiren), die $f = 0$ in sich überführen, in die Transformationsformeln algebraisch eingehen. Irgend einer der Parameter ϱ, (die übrigens als constant betrachtet werden), ist dann repräsentirt durch einen variabeln Punkt einer Curve $F(\varrho, \varrho') = 0$ von derselben algebraischen Classe wie $f = 0$. Die Gesammtheit der zu diesem Parameter ϱ gehörigen Transformationen führt dann einen beliebigen (nicht speciellen) Punkt (s', z') von f in alle Punkte von f über; das Analoge gilt von den umgekehrten Transformationen. Mithin kann ein solcher Punkt (s', z') auch in einen der speciellen Punkte (s_0, z_0) übergeführt werden; die umgekehrte Transformation führt also den letzteren Punkt in den ersteren, d. i. einen beliebigen Punkt der Curve über. Dies ist aber unmöglich, da ein specieller Punkt (s_0, z_0) der Curve vermöge einer der Transformationen (oder ihrer Umkehrung) immer wieder nur in einen speciellen übergehen kann. Die gemachte Annahme ist also unstatthaft, was zu beweisen war. Für die Fälle $p = 0, 1$ gelingt es ohne Mühe, die Existenz von unendlich vielen Transformationen der gemeinten Art einzusehen. In dem Nachtrage widerlegt der Herr Verfasser den Einwand, dass die Ueberführung eines speciellen Punktes (s_0, z_0) der Curve in einen beliebigen (s', z') doch vielleicht möglich sei, nämlich durch eine singuläre unendlich vieldeutige Transformation, deren sich ja in der angenommenen unendlichen Schaar von eindeutigen Transformationen immer einige vorfinden müssen. Wäre dieser Einwand richtig, so käme man zu dem Schlusse, dass sich auf der Curve $f = 0\,(p > 1)$ höchstens zwei specielle Punkte (s_0, z_0) befänden, was nicht der Fall ist. Der Herr Verfasser zeigt endlich, wie dieser Einwand noch auf zweite Weise zu entkräften ist, indem er diejenige Schaar der ϱ bestimmt, die bei allen Transformationen (der angenommenen Art) unverändert bleiben. My.

— ---

A. Cayley. On two cases of the quadric transformation between two planes. J. Hopkins Circ. 1882. 178-179.

Die Aufgabe, den dritten Schnittpunkt der ebenen cubischen Curve

$$x^3+y^3+z^3+6lxyz = 0$$

mit der Verbindungsgeraden zweier ihrer Punkte zu suchen, ergiebt für seine Coordinaten:

$$x_3:y_3:z_3 = P+2lA:Q+2lB:R+2lC = P:Q:R = A:B:C,$$

wo die P, Q, R, A, B, C in den Coordinaten der beiden gegebenen Punkte von zweitem Grade sind. Denkt man sich hier einen der beiden Punkte als fest, den anderen als beweglich und dem Punkte (z) entsprechend, und sieht man von der Entstehung der beiden Darstellungen

$$x_3:y_3:z_3 = P:Q:R; \quad x_3:y_3:z_3 = A:B:C$$

vollständig ab, so kommt man zu zwei (auch in der Form) umkehrbaren quadratischen ein-eindeutigen Transformationen zwischen zwei Ebenen. My.

Piazza. Sulla corrispondenze (1, 2) ed (1, 3). Torino, Atti. XVII. 431-447.

Die einfachsten Elemente beider Correspondenzen bis zur Aufstellung ihrer vollen Systeme werden invarianten-theoretisch entwickelt und eine Anwendung gemacht auf die Segmente, die auf einer Geraden von correspondirenden Punkten begrenzt werden. My.

G. Peano. Formazioni invariantive delle corrispondenze. Batt. G. XX. 79-101.

Sind zwei doppelt binäre Formen

$$f = a_x^m \alpha_\xi^\mu, \quad g = b_x^n \beta_\xi^\nu$$

(Correspondenzen $(m\mu)$, $(n\nu)$) gegeben, deren Variabele von einander unabhängigen linearen Transformationen unterworfen werden, so liefert der Process der doppelten Ueberschiebung

$$(fg)_{hk} = (-1)^{h+k}(gf)_{kh} = (ab)^h(\alpha\beta)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k} \alpha_\xi^{\mu-k} \beta_\xi^{\nu-k}$$

ersichtlich covariante Formen. Aber auch umgekehrt gilt der Satz, dass jede Covariante, welche die Coefficienten der einen Form f im Grade h enthält, durch Ueberschiebungen von f mit Covarianten von niederem Grade in diesen Coefficienten sich erzeugen lässt. Der Verfasser benutzt denselben, um die vollständigen Formensysteme von n Formen (1,1), sowie von (1,2) und (2,2) anzugeben. V.

Laguerre. Transformation par semi-droites réciproques. Nouv. Ann. (3) I. 542-556.

Diese Transformation ist eine Art dualistischen Seitenstücks zur Inversion (in der Ebene) und wird mit Hülfe des Begriffes der Richtung (des Sinnes), in dem eine Curve durchlaufen wird, aufgebaut. Eine in einem bestimmten Sinn zu durchlaufende Gerade, resp. Kreis heisst Halbgerade, resp. Cykel. Auch die Tangenten eines Cykels werden demgemäss als Halbgerade betrachtet. Damit vereinfachen sich die elementaren Sätze über die Lagenbeziehungen zwischen Geraden, resp. Kreisen und Kreisen z. B. wie folgt: An einen gegebenen Cykel kann man zu einer gegebenen Halbgeraden nur eine Parallele legen. Zwei (aus einander liegende) Cykel haben nur zwei Tangenten gemein. Der Abstand zwischen den resp. Berührungspunkten ist der „Tangentialabstand“ beider Cyklen. Zwei Halbgerade besitzen nur eine Halbirungslinie, den Ort der Centra der sie berührenden Cyklen. Zwei Cyklen haben nur ein Aehnlichkeitscentrum. Es giebt nur einen Cykel, der drei gegebene Halbgerade berührt etc. Dann lässt sich die gemeinte Transformation so charakterisiren, dass das Analoge zur Inversion sofort erkennbar ist: „Die Halbgeraden (der Ebene) lassen sich eindeutig so zuordnen, dass sich immer zwei entsprechende (reciproke) Halbgerade auf einer bestimmten Geraden, der Transformationsaxe, schneiden, sowie dass irgend zwei Paare reciproker Halbgeraden Tangenten desselben Cykels sind.“ Die Transformation hängt von einem Parameter ab. Die Tangenten eines Cykels gehen wieder

in die Tangenten eines Cykels über. Im Besondern giebt es einfach unendlich viele Cyklen, deren reciproke Bilder Punkte (Strahlbüschel) sind. Der Tangentialabstand zweier Cyklen ändert sich durch die Transformation nicht, ein Satz, der auf Tangentialabstände irgend welcher Curven ausgedehnt werden kann. Als Anwendung erscheint z. B. ein einfacher Beweis des Satzes: „Die drei Aehnlichkeitscentra dreier Cyklen (zu je zweien) liegen in einer Geraden." Ferner eine einfache Lösung des Apollonischen Problems. Zum Schluss weist der Herr Verfasser auf den Vorteil hin, den eine geschickte Combinirung obiger Transformation mit der der Inversion bietet. My.

J. S. Vaneček. Sur l'inversion générale. C. R. XCIV. 1042-1044.

Herr Hirst hatte eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Inversion (in der Ebene) angegeben, nach der zwei Punkte x, y Bilder von einander sind, wenn sie in Bezug auf einen festen Kegelschnitt conjugirt sind, und wenn noch ihre Verbindungslinie durch einen festen Punkt geht. Der Herr Verfasser will eine Idee von einer Verallgemeinerung dieser Hirst'schen Transformation geben, es entgeht ihm aber, dass seine Transformation mit der Hirst'schen völlig identisch ist. Es folgen Anwendungen auf verschiedene besondere Fälle. My.

L. Certo. Lo spazio delle omologie affini di un piano posto in relazione con lo spazio delle coniche dello stesso piano. Batt. G. XX. 321-346.

V.

B. Conforme Abbildung.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Ph. Gilbert. Cours de mécanique analytique; partie élémentaire. 2[me] éd. Paris. Gauthier-Villars. Louvain. Peeters-Ruclens.

In dieser zweiten Auflage ist die Kinematik in mehrere Teile zerlegt. Die Theorien der ebenen Bewegung, des Krümmungsmittelpunktes der Rouletten, der Beschleunigungen der ebenen Bewegung und die relativen Bewegungen sind unter dem Gesichtspunkt der zusammengesetzten Geschwindigkeit betrachtet. Eine Anzahl von Beispielen ist beigefügt; ferner behandelt ein Capitel die Reibung beim Gleiten und den Widerstand beim Rollen, welche in der ersten Auflage nicht berücksichtigt waren. Die allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen und die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten sind einfacher als früher bewiesen. Mn. (O.).

A. Seydler. Einleitung in die theoretische Physik. I. Teil. Einleitende Begriffe. Mechanik. Prag. 1880. (Böhmisch).

Der Verfasser hat beabsichtigt, ein Compendium zu liefern, welches in gedrängter Kürze die wichtigsten Resultate der theo-

retischen Physik deductiv ableiten, ausserdem aber auch dem Leser zum weitern Studium Anregung und Anleitung geben soll. Letzteres wird durch Uebungsaufgaben, welche älteren classischen Werken (Newton, Euler, Lagrange) entnommen sind, noch mehr aber durch knapp gehaltene historische und literarische Notizen erzielt, welche jedem grösseren Abschnitte beigefügt sind. Sie dürften trotz ihrer Kürze den Leser über die wichtigsten Erscheinungen in der diesbezüglichen Literatur hinreichend orientiren.

Grosse Sorgfalt hat der Verfasser der Architektonik seines Werkes zugewendet. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass zur Zeit alle unsere Vorstellungen auf dem Gebiete der Physik ein vorwiegend mechanisches Gepräge haben, teilt er die Physik in abstracte (reine) und concrete (angewandte) Mechanik (letztere allerdings nur im weitesten Sinne des Wortes). Während erstere Bewegung, Masse und Kraft im Allgemeinen untersucht, befasst sich letztere mit besonderen (concreten) Kräften und Kraftwirkungen, wobei sich eine natürliche Scheidung nach zwei Typen ergiebt. Der Gravitationstypus beherrscht hauptsächlich jenes Gebiet, in welchem die Wirkungen dem Gesetze des umgekehrten quadratischen Verhältnisses der Entfernung unterliegen (Gravitation, Magnetismus, Elektricität), und der Moleculartypus (Vibrationstypus) hauptsächlich dasjenige, in welchem die Erscheinungen vom directen einfachen Verhältnisse der Entfernung abhängen. Dadurch ist die Sonderung des Stoffes in drei Teile vorgeschrieben. Der vorliegende erste Teil des Werkes behandelt die abstracte Mechanik, abgesehen von einer etwas ausführlicher gehaltenen Einleitung, worin der Umfang der zum erfolgreichen Studium der theoretischen Physik erforderlichen mathematischen und geometrischen Kenntnisse festgestellt und einige der Physik näher stehende mathematische Disciplinen, Interpolation, Methode der kleinsten Quadrate in Kürze dargestellt werden.

Da die Mechanik die Darstellung der von Massen ausgeführten, durch Kräfte verursachten Bewegungen zur Aufgabe hat, erscheint es angemessen, 1) die Bewegung an sich;

2) die Massen an sich (in ihren geometrischen Beziehungen); 3) endlich die Kräfte an sich, sofern alle als Vectoren einer geometrischen Darstellungsweise fähig sind, zu betrachten, um endlich, durch Combination der gewonnenen Resultate, jene Untersuchungen durchführen zu können, welche sich 4) entweder auf das Gleichgewicht (als besonders wichtigen speciellen Fall), oder 5) auf die durch Kräfte verursachte Bewegung als allgemeinsten Fall beziehen.

Dadurch teilt sich die Mechanik naturgemäss in folgende Teile: I. Kinematik. II. Geometrie der Massen. III. Geometrie der Kräfte. IV. Statik. V. Dynamik.

Die Kinematik hat in ausführlicheren Darstellungen der Mechanik bereits Bürgerrecht erhalten; auch die Massengeometrie (eingeführt von Haton de la Goupillière) findet immer mehr Berücksichtigung (Somoff, Schell in der zweiten Ausgabe). Dagegen pflegte man die Geometrie der Kräfte bisher in der Statik als integrirenden Bestandteil dieses Abschnitts der Mechanik unterzubringen und machte zwischen beiden keinen Unterschied.

Noch ist zu bemerken, dass der Verfasser die Statik und Dynamik ganz abstract unter der Voraussetzung absolut starrer Gebilde (Massen) behandelt, daher solche Teile, die concrete Kräfte zur Voraussetzung haben (z. B. die Elasticitätstheorie, die Hydromechanik) dem dritten Teile seines Werkes zuweist.

Std.

LAPLACE. Oeuvres complètes. T. V. Paris. Gauthier-Villars.

Dieser letzte Band der „Mécanique céleste“ enthält Buch XI. De la figure et de la rotation de la Terre. Buch XII. De l'attraction et de la répulsion des sphères et des lois de l'équilibre et du mouvement des fluides élastiques. Buch XIII. Les oscillations des fluides qui recouvrent les planètes. Buch XIV. Les mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité. Buch XV. Du mouvement des planètes et des comètes. Buch XVI. Du mouvement des satellites. O.

LEDIEU. La théorie vibratoire de la matière et la théorie des centres des forces. Rev. d. qu. sc. XII. 156-176.

Zusammenstellung der Arbeiten, die in den C. R. 1882 publicirt worden sind. Mn. (O.).

Capitel 2.
Kinematik.

C. STÉPHANOS. Sur les propriétés métriques et cinématiques d'une sorte de quadrangles conjugués. C. R. XCV. 617-650.

Zwei Systeme von je vier in einer Ebene enthaltenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 und B_1, B_2, B_3, B_4 nennt der Verfasser conjugirte Quadrangel (quadrangles conjugués), wenn, wie man sie auch in eine Ebene legen mag, ihre entsprechenden Punkte (A_i, B_i) vier Paare von Punkten bilden, welche in Bezug auf einen Kreis conjugirt sind.

Zu einem Quadrangel A giebt es eine unendliche Anzahl conjugirter Quadrangel B, und alle diese Quadrangel B sind unter sich ähnlich. Ein Quadrangel ist nur in dem Falle sich selbst conjugirt, wenn seine vier Ecken auf einem Kreise liegen. Die vier Dreiecksflächen $A_2A_3A_4$, $A_3A_1A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ eines Quadrangels A sind bezüglich proportional den entsprechenden Dreiecksflächen des conjugirten Quadrangels B. Die bezüglichen Verhältnisse dieser vier Flächen bezeichnet der Herr Verfasser durch $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4$, wobei $\Sigma\lambda_i = 0$ zu setzen ist. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ die Abstände der vier Ecken des ersten Quadrangels von den entsprechenden des conjugirten, so besteht bei jeder Lage der beiden Quadrangel die Relation $\lambda_1\varrho_1^2+\lambda_2\varrho_2^2+\lambda_3\varrho_3^2+\lambda_4\varrho_4^2 = C$, wo C eine nur von den Dimensionen der beiden Quadrangel abhängige Constante bedeutet. Hieraus wird der Schluss gezogen, dass, wenn die drei Ecken A_1, A_2, A_3 des Quadrangels A auf drei beliebigen Kreisen liegen, welche bezüglich zu Mittelpunkten die

entsprechenden Punkte B_1, B_2, B_3 des conjugirten Quadrangels B haben, die vierte Ecke A_4 auf einem vierten Kreise liegt, welcher sein Centrum in B_4 hat. Im Allgemeinen giebt es sechs verschiedene Lagen der Art für eine Figur, dass drei ihrer Punkte A_1, A_2, A_3 bezüglich auf drei Kreisen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ liegen. Sind demnach die sechs möglichen Lagen gegeben, so existirt im Allgemeinen nur ein Punkt A_4 in dieser Figur, dessen entsprechende sechs Lagen auf einem Kreise $\mathfrak{B}_4$ enthalten sind. Eine Ausnahme tritt nur in dem Fall ein, dass das Dreieck $A_1A_2A_3$ ähnlich ist mit dem Dreieck $B_1B_2B_3$, welches aus den Centren der drei Kreise $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ gebildet ist. In diesem Falle giebt es eine unendliche Zahl von Punkten A_4, denen diese Eigenschaft zukommt; es sind das alle die Punkte, welche auf dem dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umgezeichneten Kreise gelegen sind. Liegt die Besonderheit vor, dass die drei Punkte A_1, A_2, A_3 in einer Geraden gelegen sind, so ist der Kreis $\mathfrak{B}_4$ durch eine Gerade b zu ersetzen, und diese Gerade bewahrt ihre Richtung, wenn die Radien der Kreise $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ sich ändern, falls man nur ihre Mittelpunkte unverändert lässt.

Diese Theorie conjugirter Quadrangel steht in enger Verbindung mit einigen kinematischen Gesetzen, die von Herrn Tchebychef in seiner Schrift „Sur les plus simples systèmes articulés qui fournissent un mouvement rectiligne approximatif au quatrième et au cinquième ordre“ (Petersb. Abh. 1881) gegeben wurden. Schn.

G. Halphén. Sur la théorie du déplacement. Nouv. Ann. (3) I. 296-300.

Herr C. Stéphanos hat in dem Bull. d. l. S. Philom. (7) VI. p. 13 folgendes Theorem veröffentlicht: „Wenn ein ebenes Gebilde in drei beliebigen Lagen F_1, F_2, F_3 in seiner Ebene gedacht wird, so lässt sich F_1, F_2 und F_3 in Bezug auf drei bestimmte Gerade als symmetrisches Gebilde ein und derselben Figur F auffassen.“ Indem Herr Halphén ein analoges Theorem für Gebilde im Raum aufzustellen sucht, gelangt er zu einer ein-

fachen Entwickelung des Fundamentalsatzes der Kinematik, dass jeder Körper in eine beliebig gewählte andere Lage durch eine einfache Schraubenbewegung übergeführt werden kann, und giebt folgendes generelle Theorem: „Wenn ein Körper in drei verschiedenen Lagen im Raum gegebenen ist, so lässt sich jeder derselben als Symmetriegebilde eines und desselben Körpers in Bezug auf drei bestimmte Gerade auffassen, und zwar sind diese Geraden die drei gemeinsamen Perpendikel von je zwei der drei Drehaxen, um welche durch Schraubenbewegung jeder der drei Körper in die Lage des anderen übergeführt werden kann."

Schn.

G. Gautero. Del movimento di una superficie che ne tocca costantemente un' altra fissa. Batt. G. XX. 163-193.

Eine einfache kinematische Untersuchung. Rs.

E. Habich. Théorème de cinématique. Nouv. Ann. (3) I. 458-462.

Es werde die Bewegung einer Ebene auf einer festen Ebene charakterisirt durch die beiden Rouletten (C) und (C'), von denen (C) in der festen Ebene, (C') in der beweglichen enthalten sei, und O_1 sei der augenblickliche Berührungspunkt beider, oder der augenblickliche Drehpunkt des bewegten Systems. Das augenblickliche Drehungscentrum zweiter Ordnung ist ein Punkt O_2, welcher auf der gemeinsamen Normale beider Rouletten gelegen ist und von O_1 eine Distanz $O_1O_2 = \frac{RR'}{R+R'}$ besitzt, wenn R und R' die Krümmungsradien der Rouletten (C) und (C') bedeuten. Sind nunmehr in der beweglichen Ebene zwei Curven (A) und (a) gegeben, welche auf der festen Ebene bezüglich die Curven (B) und (b) umhüllen, und bedeuten K' und K die Krümmungscentren bezüglich von (A) und (B), k' und k die von (a) und (b), so finden folgende Relationen statt. Die beiden Geraden $K'k'$ und Kk schneiden sich in einem Punkte L; dieser liefert,

mit O_1 verbunden, eine Verbindungslinie LO_1. Projicirt man andererseits den Punkt O_2 auf die beiden Normalen von (A) und (a), so erhält man zwei Projectionspunkte H und h. Die Verbindungslinie Hh läuft nunmehr parallel jener Geraden LO_1. Von diesen generellen Beziehungen aus gelangt man zu einem Satz von Euler, wenn man ein System der berührenden Curven durch (C) und (C') ersetzt; es ergiebt sich nämlich: „Wenn man die Krümmungscentra von (A) und (C') einerseits und von (B) und (C) andererseits verbindet, so schneiden sich die entstehenden beiden Geraden in einem Punkte, welcher auf dem Perpendikel gelegen ist, welchen man im augenblicklichen Drehungscentrum auf der gemeinsamen Normale von umhüllender und umhüllter Curve errichtet.“ Schn.

F. Schiffner. Die Schraubenregelfläche. Hoppe Arch. LXVIII. 72-78.

Die Schraubenregelfläche entsteht, wenn eine Gerade um eine feste Drehaxe rotirt und gleichzeitig eine gleichförmige Translationsbewegung hat, bei der sie Richtung und kürzesten Abstand gegen die Drehaxe bewahrt. Die Arbeit beschäftigt sich mit der descriptiven Darstellung einer solchen Fläche.

Schn.

M. d'Ocagne. Étude sur un mode de détermination des courbes planes. Application cinématique. Nouv. Ann. (3) I. 40-46. W. St.

V. Liguine. Sur les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe. Nouv. Ann. (3) I. 153-163.

Für die drei praktisch wichtigsten Apparate, welche eine Kreisbewegung in eine geradlinige Bewegung umsetzen und umgekehrt, wird die Beziehung zwischen den zurückgelegten Wegen bei der gegebenen und bei der transformirten Be-

wegung, sowie die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten bestimmt. Rs.

H. HART. Quaternion proof of the triple generation of three-bar motion. Mess. (2) XII. 32.

Der Verfasser giebt einen kurzen Beweis für Mr. S. Roberts' Theorem der dreifachen Erzeugung der Drei-Stangenbewegung. (Lond., M. S. Proc. VII. p. 14, s. F. d. M. VIII. 1876. 551), welcher gleichzeitig den Nutzen der Quaternionen bei der Untersuchung der Eigenschaften der Gelenkbewegung beleuchtet.
Glr. (O.).

L. JANSE. Bz. Stoomverdeelingssysteem van Gebr. Sulzer. Nieuw Arch. IX. 61-86.

Ausführliche Berechnung eines neuen Dampfverteilungssystems bei der Dampfmaschine, welche durch Gebrüder Sulzer in Winterthur auf der Pariser Weltausstellung von 1878 ausgestellt wurde. Die verschiedenen Curven, welche einzelne Punkte des Systems beschreiben, werden in Gleichungen gebracht und daraus die Form und Eigenschaften abgeleitet. G.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

J. PETERSEN. Statik, Foreläsninger holdte ved den polytekniske Läreanstalt. Kjöbenhavn 1881. Höst & Sön. 8°.

Ausser dem, was man in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Statik findet, enthält das vorliegende noch zwei wichtige Zusätze. Der erste ist ein Capitel über das astatische Gleich-

gewicht, in welchem die astatische Reduction eines Kräftesystems und die Bedingungen einer einzigen Resultante in überraschend einfacher Weise dargestellt sind. Der zweite giebt die Anfangsgründe der graphischen Statik, woran eine originelle Behandlung des Diagrammes eines gegliederten Systemes geknüpft ist.

Gm.

J. PETERSEN. Lehrbuch der Statik fester Körper. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen. Höst & Sohn.

Deutsche Ausgabe des oben besprochenen Lehrbuches.

Rs.

G. B. MARSANO. Dimostrazione del parallelogrammo delle forze data dal R. P. Girolamo Badano. Rivista di Mat. element. (2) IV.

Badano hat in seinen Vorlesungen über Mechanik im Jahre 1823 den jetzt mitgeteilten geometrischen und elementaren Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte gegeben. Nach der Wiedergabe dieses Beweises ist von G. B. Marsano ein Auszug der biographischen Notizen gegeben, welche einige Wochen nach dem Tode Badano's in dem Supplemento della Gazetta di Genova dell' 8. Gennaio 1848 veröffentlicht wurden. Rs.

E. BRASSINNE. Manière directe de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier. Nouv. Ann. (3) I. 320-321.

Es wird gezeigt, dass das Hebelgesetz allein genügt, um zu beweisen, dass die Resultante zweier Kräfte P und Q, deren Angriffspunkt h ist und deren Intensitäten hm und hn sind, der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogramms $hnFm$ dargestellt wird, welches über den die Kräfte repräsentirenden Geraden construirt ist. Rs.

E. WENZEL. Zur Zurückführung der schiefen Ebene auf den Hebel. Zeitschr. f. d. Realschulw. VII. 385-393.

Die Hebelstange bildet selbst die schiefe Ebene; Rollenführungen bewirken, dass die angreifenden Kräfte vorgeschriebene Winkel mit der Ebene bilden. Die vom Verfasser in Aussicht gestellten Schul-Apparate, welche in diesem Sinne die Theorie des Hebels und der schiefen Ebene gleichmässig und gleichzeitig zu demonstriren gestatten, werden sich in der Tat zur Belebung des statischen Unterrichts förderlich erweisen. Auch ist es richtig, wenn der Verfasser zum Schlusse sagt: „Es erscheinen mithin sämmtliche Maschinen auf eine einzige einfache, den Hebel, zurückfürbar.“ Diese Tatsache ist schon von altersher wohlbekannt; so findet man in den mechanischen Lehrbüchern von De la Hire und Kästner das Kräfteparallelogramm als einen Ausfluss der Lehre vom Winkelhebel dargestellt und damit diese Lehre überhaupt zum ersten Princip der theoretischen Mechanik erhoben. Gr.

G. BARDELLI. Sui sistemi variati di forze. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 180-195.

Für ein System von Kräften, von welchen irgend eine Componente die Intensität P besitzt, werden folgende Bezeichnungen eingeführt, wobei immer nur eine der drei analogen Gleichungen wiedergegeben wird:

$$D_1 = \Sigma Px\alpha,\ E_1 = \Sigma Py\alpha,\ F_1 = \Sigma Pz\alpha,\ X = \Sigma P\alpha,\ M_x = E_2 - F_2;$$

ferner

$$V = XM_x + YM_y + ZM_z.$$

Ein verändertes System eines gegebenen Systems von beliebig vielen Kräften erhält man dadurch, dass man die Geraden, welche die Kräfte darstellen, sich um Linien drehen lässt, die parallel zu einer beliebigen Richtung durch die Angriffspunkte gezogen sind. Die Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz seien in eine neue Lage Ox_1, Oy_1, Oz_1 gebracht; eine Gerade OL, deren Richtungscosinus l, m, n sind, und ein Winkel θ (die Rotationsaxe

und der Rotationswinkel des zugehörigen veränderten Systems) werden eingeführt; dann sind die Cosinus a_1 ... durch l, m, n und θ ausdrückbar. Es ist nämlich

$$a_1 = 2l^2\sin^2\frac{1}{2}\theta + \cos\theta,\ b_1 = 2lm\sin^2\frac{1}{2}\theta - n\sin\theta,$$

$$c_1 = 2ln\sin^2\frac{1}{2}\theta + m\sin\theta,$$

$$a_2 = 2lm\sin^2\frac{1}{2}\theta + n\sin\theta,\ b_2 = 2m^2\sin^2\frac{1}{2}\theta + \cos\theta,$$

$$c_2 = 2mn\sin^2\frac{1}{2}\theta - l\sin\theta,$$

$$a_3 = 2ln\sin^2\frac{1}{2}\theta - m\sin\theta,\ b_3 = 2mn\sin^2\frac{1}{2}\theta + l\sin\theta,$$

$$c_3 = 2n^2\sin^2\frac{1}{2}\theta + \cos\theta.$$

Ferner hat man

$$X_1 = a_1X + a_2Y + a_3Z, \ldots,$$
$$M_{x_1} = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 - b_1F_1 - b_2F_2 - b_3F_3, \ldots,$$
$$V_1 = X_1M_{x_1} + Y_1M_{y_1} + Z_1M_{z_1},$$

oder

$$(1) \qquad V_1(1+k^2) = k^2V + 2kU + 2T - V,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$k = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\theta,\ U = l(M_3 - N_2) + m(N_1 - L_3) + n(L_2 - M_1),$$
$$T = l(lL_1 + mL_2 + nL_3) + m(lM_1 + mM_2 + nM_3) + n(lN_1 + mN_2 + nN_3),$$
$$L_1 = ZD_2 - YD_3, \ldots,\ M_1 = ZE_2 - YE_3, \ldots,\ N_1 = ZF_2 - YF_3, \ldots$$

Indem über die Werte l, m, n (oder über T und U) und über V_1 verschiedene Annahmen gemacht werden, gewinnt der Verfasser aus der Gleichung (1) eine Reihe von Sätzen. Rs.

J. J. Sylvester. Note on mechanical involution. Sylv., Am. J IV. 336-340.

J. J. Sylvester. On mechanical involution. J. Hopkins Circ. 1882. 242-243.

Wenn Kräfte in der Richtung von sechs im Raume gegebenen Linien so wirken, dass die statische Summe Null ist, muss eine gewisse geometrische Bedingung von den sechs Linien erfüllt werden. Trifft dies zu, dann sagt man von den Linien, sie sind in Involution. Der Verfasser zeigt, dass die Bedingung für die Involution analytisch durch das Verschwinden einer gewissen zusammengesetzten Determinante ausgedrückt werden kann. Die Determinante ist von Cayley in den Cambr. Trans. 1861 pt. 2 gegeben. Rs.

A. Legoux. Stabilité de l'équilibre d'un point matériel attiré ou repoussé par un nombre quelconque de points matériels fixes proportionnellement aux masses et à une puissance de la distance. Nouv. Ann. (3) I. 145-153.

Man bezeichne mit m_i die Massen der anziehenden Punkte A_i, mit x_i, y_i, z_i die Coordinaten dieser Punkte, mit x, y, z die des angezogenen Punktes M, mit u_i die Entfernungen des Punktes M von den Punkten A_i, und man nehme an, dass die vom Punkte A_i auf M ausgeübte Anziehung durch $\frac{m_i}{u_i^{n+1}}$ dargestellt sei. Ferner sei $d_i = [u_i]_{x=0,\, y=0,\, z=0}$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Stabilität des Gleichgewichtes sind dann durch drei Ungleichheiten ausgedrückt:

$$(n-1)\Sigma \frac{m_i}{d_i^{n+2}} < 0,$$

folglich $n < 1$.

$$\Sigma \frac{m_i m_{i+1} \sin^2(d_i d_{i+1})}{(d_i . d_{i+1})^{n+2}} - (2n+1)\left(\Sigma \frac{m_i}{d_{i+1}^{n+2}}\right)^2 > 0.$$

$(d_i d_{i+1})$ bezeichnet den Winkel der beiden Richtungen OA_i und OA_{i+1}, wobei O den Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet. Man erhält $n \leqq -\frac{1}{2}$.

Die dritte Ungleichheit ist weitläufiger; es ist aber leicht

ersichtlich, dass derselben genügt wird, wenn $n+2 \leqq 0$ ist. Ausserdem weiss man, dass das Gleichgewicht stabil ist für $n=-2$ oder für $n+1=-1$. Nach Transformation der Ungleichheit findet man, dass dieser stets genügt wird, wenn $n+1 \leqq 0$ ist. Alle drei Ungleichheiten werden erfüllt sein, wenn $n \leqq -1$ ist. Für $n=1$, d. h. für das Newton'sche Attractionsgesetz ist das Gleichgewicht nicht stabil.

Man kann dasselbe Resultat auch anders erhalten: Das Gleichgewicht ist stabil, wenn die Function

$$\varphi = \Sigma \frac{1}{n} \frac{m_i}{u_i^n}$$

durch ein Maximum, und instabil, wenn die Function durch ein Minimum geht. Wenn man die Terme dritter Ordnung vernachlässigt, kommt dies darauf zurück, die Bedingung dafür zu finden, dass ein homogenes Polynomen zweiten Grades stets negativ ist, was zu den früher gefundenen Ungleichheiten führt.

Rs.

A. Laisant. Sur certaines propriétés des centres de gravité. S. M. F., Bull. X. 40-44.

E. Laquière. Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité. S. M. F., Bull. X. 131-133.

E. Laquière. Sur un théorème de Pappus. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (3) I. 110-111.

V. Schlegel. Sur le théorème de M. Laisant, relatif aux centres de gravité. S. M. F., Bull. X. 220-222.

1) Résal's „Note sur la généralisation du théorème de Pappus" (F. d. M. XIII. 1881. 708) hat den Verfasser veranlasst, eine frühere Studie (Sur quelques propriétés des polygones Ass. franç. c. r. VI. 142-154) zu verallgemeinern. Das Resultat ist: „Wenn mehrere Körper derselben Art sich in demselben Sinne um parallele Axen mit derselben Winkelgeschwindigkeit

und in einem Medium drehen, dessen Temperatur veränderlich ist, bewegt sich ihr Schwerpunkt, als wenn er zu einem Körper derselben Art gehörte, welcher in demselben Medium mit derselben Winkelgeschwindigkeit sich um eine Axe dreht, die mit jenen Axen parallel ist. Diese mittlere Rotationsaxe erhält man dadurch, dass man auf jeder besonderen Axe irgend einen Punkt nimmt und den Schwerpunkt dieser Punkte bestimmt, in welchen man sich die Massen der entsprechenden Körper concentrirt denkt. Dieser Schwerpunkt gehört der mittleren Axe an." Der Verfasser bedient sich des Quaternionencalcüls.

2) Dem Satze von Résal giebt der Verfasser folgende allgemeinere Fassung: Wenn Massen von den Ecken eines geschlossenen Polygons sich gleichzeitig fortbewegen und die Seiten nach demselben Bewegungsgesetze mit Geschwindigkeiten durchlaufen, die in jedem Augenblicke den durchlaufenen Seiten proportional sind, wird der Schwerpunkt des Systems der beweglichen Massen fest bleiben. (In 3 ist dieser Satz mit etwas geändertem Wortlaut wiedergegeben und bewiesen.) Ferner wird der Satz des Herrn Laisant elementar bewiesen.

4) Schlegel zeigt, wie mit Hülfe der Grassmann'schen Rechnungsweise der Satz von Laisant gewonnen wird. Rs.

G. Jung. Alcuni teoremi baricentrici. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 499-506.

G. Jung. Osservazioni ed aggiunte alla nota „Alcuni teoremi baricentrici". Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 646-653.

Der Verfasser leitet eine Anzahl von Sätzen über Schwerpunkte von schief abgeschnittenen Cylindern mit beliebiger Basis, sowie über Schwerpunkte der krummen Oberflächen jener Cylinder ab. Von jenen Sätzen, deren Zahl zu gross ist, um alle einzeln anzuführen, sei hier der folgende hervorgehoben:

„Legt man durch einen festen Punkt der zweiten Axe eines Cylinders (d. i. derjenigen Geraden, auf der die Schwerpunkte der Perimeter aller Normalschnitte liegen) verschiedene Ebenen,

so bestimmt jede derselben mit einer festen Ebene einen Cylinderstumpf von constanter Seitenfläche." Mehrere der in dem ersten der obigen beiden Aufsätze mitgeteilten Sätze hat der Verfasser im zweiten Aufsatz zurückgezogen. Wn.

H. Résal. Correspondance. Sur une nouvelle propriété de la chaînette. Nouv. Ann. (3) I. 515-516.

A sei der Scheitel, M und M' zwei in Bezug auf Oy symmetrisch liegende Punkte, J und J' die Projectionen von M und M' auf Ox. Dann liegt der Schwerpunkt der Fläche $MJJ'M'$ im Mittelpunkt der Ordinate des Schwerpunktes des Bogens $M'AM$.

O.

H. Résal. Formules approchées relatives à l'équilibre d'une position de chaîne ou de corde pesante, comprise entre deux appuis, et très tendue. Résal J. (3) VIII. 383-389.

Eine Kette wird in zwei Punkten A_0 und A_1 unterstützt gedacht, deren gerade Verbindungslinie als Axe der x angenommen wird. Es bedeuten x_1 die Entfernung von A_0 und A_1, T die Spannung in einem beliebigen Punkte der Kette, T_0 diejenige in A_0, p das Gewicht der Längeneinheit, i den Neigungswinkel der Geraden A_0A_1 gegen die Horizontale. Vorausgesetzt wird, dass die Spannung hinlänglich gross ist, nahezu ihren Maximalwert erreicht hat, und dass die Länge des Bogens A_0A_1 genügend beschränkt ist, so dass man die höheren Potenzen des Quotienten $\frac{px_1}{T_0}$ vernachlässigen kann. Als Gleichung für den Bogen ergiebt sich in erster Annäherung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p\cos i}{T_0}\left(\frac{x_1}{2} - x\right),$$

in zweiter Annäherung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p\cos i}{T_0}\left[\frac{x_1}{2} - x + \frac{p\sin i}{T_0}\left(x^2 - \frac{xx_1}{2} - \frac{x_1^2}{12}\right)\right],$$

d. i. die einer Parabel dritten Grades. Die Spannung in einem beliebigen Punkte ist

$$T = T_0\left[1 - \frac{p^2\cos^2 i}{2T_0^2}x(x_1 - x)\right] + xp\sin i$$

und erreicht ihren grössten Wert in A_1:

$$T_1 = T_0 + x_1 p\sin i.$$

Wenn ε_0 den Winkel bezeichnet, den die Tangente in A_0, ε_1 den spitzen Winkel, den diejenige in A_1 mit der x-Axe bildet, so erhält man in der erwähnten Annäherung

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 = \frac{p^2 x_1^2 \sin 2i}{\varepsilon T_0}.$$

Die Betrachtungen lassen sich z. B. anwenden auf den Fall, dass eine Kette auf zwei Rollen von kleinem Durchmesser ruht, oder dass sie in A_0 an eine Widerstand leistende Masse angeknüpft ist, wie bei Zugbrücken etc. Sbt.

Gambey. Solution d'une question de mécanique élémentaire. Nouv. Ann. (3) I. 254-256.

Folgende Aufgabe wird gelöst: „Ein homogener schwerer und unendlich dünner Streifen, welcher die Gestalt eines Halbkreises *ABC* hat, wird von einem Faden gehalten, welcher an den beiden Enden des Durchmessers *AB* befestigt ist und durch einen unendlich kleinen Ring geht. Die Gleichgewichtslagen des Streifens sollen bestimmt werden, und es soll angegeben werden, wann das Gleichgewicht stabil, wann es instabil ist. Die Länge (l) des Fadens, der Radius (R) des Halbkreises *ABC* und das Gewicht (P) des Streifens sind gegeben; das Gewicht des Fadens wird vernachlässigt." Rs.

M. Azzarelli. Momenti d'inerzia delle linee, superficie e volumi. Rom, Acc. P. d. N. L. XXXIV. 159-230.

Die Arbeit besteht aus Beispielen für die Anwendung der Integralrechnung. Rs.

E. Brassinne. Balance d'oscillation employée pour le calcul des moments d'inertie. C. R. XCV. 446-447.

Es wird der Ausdruck für das Trägheitsmoment eines Körpers angegeben und gezeigt, wie man dasselbe mit Hülfe einer einfachen Vorrichtung, die beschrieben wird, und die der Verfasser Schwingungswage nennt, durch Beobachtung finden kann.

Sbt.

G. Jung. Alcuni teoremi sulle forme degeneri dell' ellissoide del Culmann. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 141-146.

Mehrere Sätze werden abgeleitet, welche implicite schon in einer früheren Arbeit (s. F. d. M. XIII. 1881. 683) enthalten sind, und aus welchen folgt: „Das Culmann'sche Ellipsoid (oder eine seiner degenerirten Formen) ist ohne Ausnahme die geometrische Darstellung der Trägheitsmomente eines Massensystems (stella) in Bezug auf Ebenen.“ Rs.

F. Siacci. Gli assi statici di un sistema di forma invariabile. Torino, Atti XVII. 241-242.

Für einen Körper, welcher um einen festen Punkt beweglich ist, und auf welchen nicht im Gleichgewichte befindliche Kräfte von constanter Intensität und Richtung wirken, giebt es vier statische Axen. Diese hängen von einer Gleichung vierten Grades mit vier reellen Wurzeln ab, und alle ihre Eigenschaften sind in den beiden Sätzen enthalten:

„Die Ebene, welche durch zwei beliebige der Axen geht, ist senkrecht zur Ebene, in welcher die beiden anderen Axen liegen.“

„Wenn man vom Anfangspunkte aus auf den Axen Segmente abträgt, welche den Sinus der Rotationen, die in das Gleichgewicht zurückführen, proportional sind, haben die Enden dieser Segmente das Baricentrum im festen Punkte.“

Diese vier an den Enden liegenden Punkte werden „statische

Punkte" genannt und bezüglich derselben werden vier weitere Sätze ausgesprochen. Rs.

A. DE ST.-GERMAIN. Sur les équations de l'équilibre astatique. Nouv. Ann. (3) I. 306-311.

In verschiedenen Punkten $M_1, M_2, \dots$, eines Körpers S befinden sich die Angriffspunkte von den gegebenen Kräften $F_1, F_2, \dots$, deren Grösse und Richtung constant bleiben, welche Lagen auch S einnehmen möge. Der Verfasser sucht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Kräfte F_i sich für alle Lagen von S das Gleichgewicht halten, also astatisches Gleichgewicht vorhanden ist. Er bekommt dadurch ohne Schwierigkeit die zwölf Bedingungsgleichungen für dieses Gleichgewicht.

Rs.

N. TH. MICHAELIS. Brugbalken van de tweede orde met flaauw gebogen bovenrand en getrokken schoren. Amst., Versl. en Meded. XVII. 129-139.

Der Verfasser nennt Brückenbalken von der n^{ten} Ordnung die, bei denen durch eine verticale Ebene zwischen zwei Pfeilern n gleichgerichtete Diagonalen geschnitten werden. In vorliegender Arbeit werden die Spannungen solcher Balken erster und zweiter Ordnung berechnet und ferner gezeigt, wie die erhaltenen Resultate in der Praxis für die Construction der Brücken benutzt werden können. G.

K. STELZEL. Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger. Graz. Leuschner u. Lubensky.

Der Verfasser geht aus von dem Satze vom Kräfteparallelogramm und behandelt die Construction der Resultirenden beliebig vieler an demselben Angriffspunkte wirkender Kräfte, sowie die Zerlegung einer Kraft in Componenten, die an dem-

selben Angriffspunkte wirken. Mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons wird die Resultirende von beliebig vielen in derselben Ebene an verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräften construirt und die Bedingung für das Gleichgewicht aufgestellt. Auf Grund eines Satzes über zwei Seilpolygone für dasselbe Kräftepolygon, aber verschiedene Pole, werden die Aufgaben gelöst, ein Seilpolygon zu zeichnen, welches bei gegebener Poldistanz durch zwei Punkte geht, sowie ein solches, welches durch drei gegebene Punkte geht; letztere Aufgabe kommt zur Anwendung bei der Untersuchung der Stabilität von Bogenträgern. Im Anschluss an die Aufgabe, eine Kraft in zwei zu ihr parallele Componenten zu zerlegen, werden die Auflagerreactionen eines an den Enden frei aufliegenden und in gegebener Weise belasteten horizontalen Trägers bestimmt; auch wird angegeben, wie man die Transversalkraft, d. i. die Resultirende der auf einer Seite eines bestimmten Querschnitts wirkenden Kräfte findet. Von besonderer Wichtigkeit ist die Eigenschaft des Seilpolygons, dass das Moment einer Kraft für einen gegebenen Punkt gleich ist dem Producte aus der Poldistanz und dem Segmente, welches die auf der Kraft sich schneidenden Seilpolygonseiten auf der durch den Momentenpunkt zur Kraftrichtung parallelen Geraden abschneiden; für parallele, an einem frei aufliegenden horizontalen Träger wirkende Kräfte repräsentiren zufolge dieses Satzes die Ordinaten des Seilpolygons, von der Schlusslinie aus in verticaler Richtung gemessen, die Momente von den einzelnen Querschnitten. Für eine stetig verteilte Belastung geht das Seilpolygon in die Seilcurve über, welche sich für eine gegebene Belastungsfläche in beliebiger Annäherung zeichnen lässt; bei einer gleichmässigen Belastung ist die Seilcurve eine Parabel mit verticaler Axe.

In den folgenden Abschnitten werden die entwickelten Sätze der graphischen Statik auf den continuirlichen Träger angewandt. Es sind die Aufgaben zu lösen: 1) bei gegebener Belastung für irgend einen Querschnitt Transversalkraft und Biegungsmoment zu bestimmen, sowie diejenigen Querschnitte zu finden, für welche Transversalkraft und Moment am grössten werden; 2) diejenige

Belastung aufzusuchen, welche für einen gegebenen Querschnitt die grösste Transversalkraft, resp. das grösste Moment zur Folge hat.

Bekannt sind nur die Lage der Stützen und die Belastungsverhältnisse des Trägers; zur Ermittelung der Stützenreactionen kommen die Elasticitätsverhältnisse in Betracht. Das der gegebenen Belastung entsprechende Seilpolygon kann construirt werden; das Seilpolygon für ein Feld des continuirlichen Trägers unterscheidet sich von dem für den entsprechenden einfachen Träger nur durch die Lage der Schlusslinie. Ist dieses gezeichnet, so hat man nur die sogenannten Normalmomente, d. h. die auf die Poldistanz als Momentenbasis reducirten Ordnungsmomente an den Stützen, zu bestimmen, welche man von den Schnittpunkten der erhaltenen Schlusslinie mit den Pfeilerverticalen auf diesen abzutragen hat, um das gesuchte Seilpolygon zu erhalten, womit dann die Aufgabe gelöst ist. Die Normalmomente stehen im Zusammenhang mit der Krümmung der elastischen Linie an den betreffenden Stellen. Bei gegebener Momentenfläche und gegebenem Querschnitt lässt sich, wie zuerst Mohr (Zeitschr. des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Bd. XIV. 1868. S. 19-51) gezeigt hat, immer die elastische Linie zeichnen als eine Seilcurve, deren constanter Horizontalzug durch E (Elasticitätsmodul), deren veränderliche Verticalbelastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection durch $\frac{M}{J}$ (M das Biegungsmoment, J das Trägheitsmoment des Trägerquerschnitts) dargestellt ist, resp. wenn J constant, bezüglich durch EJ und durch M. Häufig kommt es bei der Bestimmung von Durchbiegungen horizontaler Träger nur auf den Ort und die Grösse der grössten Einsenkung an; wie man diese finden kann, wird an einigen Beispielen von gegebener Belastung gezeigt. Die unabhängig von den Momentenflächen construirte elastische Linie kann umgekehrt zur Bestimmung jener dienen.

Die zur Construction des Seilpolygons erforderlichen Normalmomente kann man mittels des sogenannten zweiten Seilpolygons finden, d. h. des für die negative (zwei Dreiecke) und positive

Momentenfläche construirten Seilpolygons, von dem nur die äusseren Seiten, die sogenannten Pfeilertangenten, die elastische Linie berühren. Das zweite Seilpolygon lässt sich bei gegebenen Pfeilertangenten mit Hülfe der Kreuzlinien zeichnen, jene aber sind mit der richtigen Lage der mittleren Seiten des zweiten Seilpolygons bestimmt, und die mittleren Seiten können gezogen werden, sobald man von jeder einen Punkt kennt. Zufolge gewisser von Mohr aufgezeigter Eigenschaften des zweiten Seilpolygons kann man von jeder mittleren Seite desselben in jedem Felde einen Punkt finden, also das zweite Seilpolygon zeichnen, indem auch die Kreuzlinien sich für irgend welche gegebene Belastungsweise immer bestimmen lassen, dann die Normalmomente ermitteln, das erste Seilpolygon construiren und somit für jeden Querschnitt Biegungsmoment und Transversalkraft finden. Die Constructionen werden für die verschiedenen möglichen Belastungsverhältnisse des continuirlichen Trägers unter der Voraussetzung eines constanten Querschnittes und gleich hoher Stützen ausgeführt.

Im Anschluss an die Ermittelung des Vorzeichens der Momente und Transversalkräfte für die verschiedenen Querschnitte eines mit einer einzigen Last belasteten Feldes wird untersucht, bei welcher gleichmässigen Belastung jene Grössen für einen bestimmten Querschnitt ihren Maximalwert erreichen, und es werden die Curven der Maximal-Transversalkräfte und Momente gezeichnet, Curven, deren Ordinaten die der gefährlichsten Belastungsweise entsprechenden Transversalkräfte, resp. Momente darstellen. Es folgt die Betrachtung der Influenzcurven, welche den Einfluss der Lage einer Einzellast auf das Zeichen und die Grösse der Transversalkraft, resp. des Momentes in einem bestimmten Querschnitte veranschaulichen; mit Hülfe derselben kann man am besten die Maximal-Transversalkräfte und Momente in Folge der Wirkung eines Einzellastensystems untersuchen.

Ferner wird der Einfluss einer ungleichen Höhe der Stützen auf Momente und Transversalkräfte untersucht und zum Schluss der continuirliche Träger mit veränderlichem Querschnitt behandelt.

Die vom Verfasser benutzten Quellen sind an jeder Stelle angegeben. Sbt.

G. BATTAGLINI. Relazione sulla memoria del sig. Gebbia: „Sugli sforzi interni dei sistemi articolati." Rom., Acc. L. (3) VI. 201.

Herr Battaglini berichtet, auch im Namen des Herrn Beltrami, über die im Titel genannte Abhandlung des Herrn Gebbia, welche die Verallgemeinerung und Anwendung zweier in einer früheren Abhandlung des Verfassers: „Determinazione grafica degli sforzi interni nelle travature reticolari con aste sovrabbondanti" (Atti dell' Acc. (3) vol. IX. p. 467) aufgestellten Theoreme enthält. Sbt

B. Hydrostatik.

O. KUNTZE. Analytische Untersuchungen über die Veränderungen der Axenverhältnisse, Schwerkräfte und der Rotationsgeschwindigkeiten homogen flüssiger, um ihre Axe frei rotirender cylindrischer Gleichgewichtsfiguren, durch Condensation oder Expansion bei constanter Masse und Energie. Hoppe Arch. LXVIII. 273-303.

Zunächst werden die Anziehungscomponenten eines unendlich langen homogenen elliptischen Cylinders für einen Punkt der Masse abgeleitet. Die benutzte Methode ist durchaus nicht die einfachste; auch wird nirgends erwähnt, dass die Ableitung sich nur auf innere Punkte beziehen soll, während sie für diese allein gilt. Die gefundenen Ausdrücke werden angewandt, um die Bedingungen abzuleiten, unter denen a) ein voller Kreiscylinder, b) ein elliptischer Cylinder Gleichgewichtsfigur einer rotirenden homogenen Flüssigkeit sein kann, deren Teile sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen. Daran schliesst sich

dieselbe Aufgabe für eine von zwei coaxialen Kreiscylindern begrenzte Masse. Die so erhaltenen, sämmtlich schon bekannten Resultate werden weiter discutirt; namentlich wird erörtert, wie sich die Axenverhältnisse, die Rotationsgeschwindigkeit und die Anziehung an der Oberfläche ändern können, wenn die Masse der Cylinder und ihre Energie (Product aus der halben Winkelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmoment) constant bleiben. Bei dieser Betrachtung wird die unendliche Axe der Cylinder wie eine endliche constante Länge behandelt. Da weder die Art der Discussion, noch die Resultate irgend welches Interesse gewähren, übergehen wir die weiteren Einzelheiten. Wn.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

A. Fuhrmann. Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Teil 2: Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. 2te Aufl. Leipzig. B. G. Teubner.

Von Veränderungen, welche Referent in dieser zweiten Auflage gegen die erste (1871 erschienene) bemerkt hat, seien folgende erwähnt: Im ersten Capitel (über die geradlinige Bewegung eines freien Punktes) ist die Lösung der Aufgabe 31 vervollständigt und bei der Lösung der Aufgabe 35 III. Fall ist die früher weggelassene zweite Bedingung

$$Q < \frac{P\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta}$$

hinzugefügt. Eine Aufgabe (52) ist eingeschoben. Die Lösungen einiger Aufgaben des zweiten Capitels (über die krummlinige Bewegung eines freien Punktes) sind etwas ergänzt worden. Das dritte Capitel, welches Aufgaben über die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebenen festen Bahnen enthält, ist fast unver-

ändert geblieben. Dagegen sind die meisten Aenderungen im vierten Capitel (Aufgaben über die Berechnung von Trägheitsmomenten) vorgenommen. Drei Aufgaben (148, 152 und 192) sind neu und einige Male (nach Aufgabe 138, 149) wird darauf aufmerksam gemacht, wie man die Zahl der gestellten Aufgaben leicht vermehren kann. Die Capitel fünf (Aufgaben über die Drehung um eine feste Axe) und sechs (Aufgaben über allgemeinere Bewegungen von Punktsystemen) scheinen unverändert abgedruckt zu sein. Rs.

E. Brassinne. Questions de mécanique rationnelle. Toul., Mém. (8) IV. 106-114.

E. Brassinne. Nouvelle manière d'employer le principe de la moindre action, dans les questions de dynamique. C. R. XCIV. 169-171.

E. Brassinne. Sur un passage de la „Mécanique analytique", relatif au principe de la moindre action. C. R. XCIV 1110-1111.

E. Brassinne. Méthode générale pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux et aux moments d'inertie. (Balance d'oscillation pour l'évaluation des moments d'inertie). C. R. XCV. 337-338.

1) besteht aus fünf Paragraphen. § 1 enthält kurze historische Bemerkungen über das Princip der kleinsten Wirkung bis zu Lagrange; Jacobi's Aeusserungen über dieses Princip scheinen dem Verfasser unbekannt zu sein. An dem Beispiel, dass ein schwerer Punkt auf einer Curve in einer verticalen Ebene herunterfällt, wird im § 2 (abgedruckt in 2) gezeigt, wie bei Anwendung teilweiser Integration das Princip der kleinsten Wirkung zur Lösung mechanischer Aufgaben benutzt werden kann. Im § 3 (abgedruckt in 3) wird der Satz gewonnen: „Für ein System von Körpern, deren jeder seine besondere Geschwindigkeit habe, giebt das Princip der kleinsten Wirkung eine Beziehung zwischen der gesammten entwickelten lebendigen Kraft

und der zur Erzeugung derselben notwendigen Zeit. Wenn man unter denselben Bedingungen die Massen und die Geschwindigkeiten sich so ändern lässt, dass die Bewegungsgrösse jeder Masse unverändert bleibt, wird die gesammte lebendige Kraft sich proportional der zugehörigen Zeit ändern." § 4 (abgedruckt in 4) und § 5 (Balance d'oscillation employée pour le calcul des moments d'inertie) enthalten weitere Anwendungen des Princips der kleinsten Wirkung. Rs.

M. Lévy. Sur une extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité. C. R. XCV. 772-774.

Die n freien materiellen Punkte eines Systems mögen nur auf einander wirken, und das zugehörige Potential Π enthalte nicht nur die Coordinaten x_i, y_i, z_i der Punkte, sondern auch die Componenten x'_i, y'_i, z'_i ihrer Geschwindigkeiten. Das Princip der lebendigen Kraft ist dann erfüllt, wie auch die Function Π beschaffen sei; dagegen gelten die Principe der Flächen und der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes im Allgemeinen nicht. Der Verfasser findet sechs Integrale

$$(1)\qquad \sum_i \left(m_i x'_i + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right) = \alpha, \ldots,$$

$$(2)\qquad \sum_i \left[m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) + y_i \frac{\partial \Pi}{\partial z'_i} - z_i \frac{\partial \Pi}{\partial y'_i}\right] = \lambda, \ldots,$$

welche in dem besonderen Falle, dass Π von den Geschwindigkeiten nicht abhängt, auf die Schwerpunkts- und auf die Flächengleichungen zurückkommen. „Diese Gleichungen haben eine einfache Bedeutung: Wenn man in irgend einem Augenblicke durch jeden der beweglichen Punkte m_i eine Gerade D_i zieht, deren Projectionen auf die Axen gleich den ersten Gliedern der Gleichungen (1) sind, und diese Geraden wie Kräfte zusammensetzt, bleiben die Geraden sich während der ganzen Bewegung statisch gleich." Die Centralaxe bleibt unveränderlich. Diese Gerade entspricht der unveränderlichen Ebene bei centralen Kräften. Im Speciellen wird ein System von zwei Massenpunkten betrachtet und gefunden: „Welches auch das Potential eines Systems

zweier beweglicher Punkte sei, durch jeden Punkt des Raumes geht eine feste Ebene und eine feste Axe so, dass die Projection auf die Dreiecksfläche, deren Spitzen von O und den beiden beweglichen Punkten gebildet sind, sich proportional mit der Projection auf die Axe der Geraden ändert, welche diese beiden Punkte verbindet. Befindet sich O auf der unveränderlichen Geraden, so steht diese Gerade senkrecht auf der festen Ebene und fällt mit der festen Axe zusammen.“ Rs.

G. Morera. Sopra una formula di meccanica analitica. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 537-543.

Es wird direct untersucht, wie sich die Function

$$[\Phi,\Psi] = \sum_{j=1}^{j=n-r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Q_j}\frac{\partial\Psi}{\partial P_j} - \frac{\partial\Phi}{\partial P_j}\frac{\partial\Psi}{\partial Q_j}\right)$$

verhält, wenn an Stelle von P und Q die ursprünglichen Variabeln p und q eingeführt werden. Der schliesslich für $[\Phi,\Psi]$ erhaltene Ausdruck ist von Mathieu in der „Dynamique analytique“ auf Seite 217-221 indirect aus der Störungstheorie abgeleitet.

Rs.

C. Lagrange. Exposition critique de la méthode de Wronski pour la résolution des problèmes de mécanique céleste. Belg., Mém. S. E. XLIV. 1-70.

F. Folie, G. v. d. Mensbrugghe. Rapports sur ce mémoire. Belg., Bull. (3) III. 5-18.

Nach dem Verfasser und den Berichterstattern ist Wronski's Methode allgemeiner als die Methode der Variation der willkürlichen Constanten. Sie unterscheidet sich von ersterer durch die Einführung von neuen variabeln Parametern, besonders für die mittlere Geschwindigkeit W zwischen den äussersten Geschwindigkeiten auf dem variabeln Kegelschnitt, und einer neuen Auswahl von Coordinaten. Die betrachteten Kräftecomponenten sind die radiale Kraft F, die tangentielle Kraft T und die Normal-

kraft P an die Ebene der Bahn. Die Methode, ausgehend von der Relation

$$Gdt = Wd\varphi,$$

(G die Gravitation), welches die Differentialgleichung eines Kegelschnittes in dem Fall ist, wo W constant ist, geht über in die reelle Trajectorie, in der W unter dem Einfluss der Kräfte F, T, P variirt. Der Vorzug der Wronski'schen Methode vor den anderen entspringt aus der Annahme einer fictiven variabeln Masse statt der constanten Masse, der man die Centripetalkraft in den gewöhnlichen Methoden verdankt. Der unter dem Einfluss dieser fictiven Masse beschriebene Kegelschnitt stimmt besser mit der reellen Trajectorie überein, ein Resultat, welches Wronski selbst nicht bemerkt zu haben scheint. Mn. (O.).

A. H. Curtis. Notes on central forces. Mess. (2) XI. 179-190.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Der erste handelt von beweglichen Bahnen und der zweite von der Bestimmung des Kräftegesetzes, welches einer Bahn entspricht, die geometrisch auf den Kräftemittelpunkt und eine gegebene Curve bezogen ist, 1) wenn die Bahn die inverse Curve, oder 2) die reciproke Curve in Bezug auf den Kräftemittelpunkt, oder 3) die Fusspunktcurve einer bekannten Curve ist. Glr. (O.).

H. G. Zeuthen. Elementär Behandling af et Par Sätninger om et Punkts Bevägelse. Zeuthen T. (4) VI. 36-50.

Elementargeometrische Betrachtungen werden in diesem Aufsatze zum Beweis einiger Sätze über parabolische und elliptische Bewegung eines Punktes verwendet. Der Verfasser beweist erstens den bekannten Satz, dass alle Punkte, welche, der Wirkung der Schwere unterworfen, mit gegebener Geschwindigkeit in verschiedenen Richtungen hinausgeworfen werden, sich in Parabeln bewegen, welche die nämliche Leitlinie haben und eine feste Parabel berühren. Er zeigt später, dass ein ähnlicher Satz

auch für die elliptische Bewegung O nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze gilt. Um dieses aus der elliptischen Bewegung herzuleiten, betrachtet er besonders die Bewegung eines Punktes S, welche den symmetrischen Punkt des zweiten Brennpunktes F_1 in Bezug auf die Tangente in dem beweglichen Punkte X darstellt. Es wird nämlich dann die Länge der Gerade $F_1 S$ mit der Geschwindigkeit von X proportional, während zugleich die Geschwindigkeit von S die Anziehung darstellt. Diese geometrische Darstellung giebt ein einfaches Mittel nicht nur zur vollständigen Discussion der verschiedenen auftretenden Fälle, sondern auch zur Construction der Bahn. Schliesslich wird gezeigt, wie ähnliche Betrachtungen auch im Falle, dass die Anziehung von dem Centrum einer Ellipse ausgeht, verwendet werden können. Gm.

J. Morrison. Integration of the general equations of motion. Anal. IX. 100-112.

Elementare Untersuchung der elliptischen Bewegung. Jn. (O.).

G. Dillner. Om integration af differentialeqvationerna i n-kroppar-problemet. Stockh., Öfv. 1882. No. 4. 13-20.

Dieser Aufsatz handelt von der Integration der Differentialgleichungen in dem Problem der n Körper, giebt zwei fundamentale Systeme von Gleichungen an und untersucht die Form der allgemeinsten Integrale, die diesen Systemen genügen. E.

Gascheau. Etude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel. S. M. F., Bull. X. 207-219.

Gascheau. Explication de deux paradoxes apparents observés dans les solutions de quelques problèmes de mécanique rationnelle. Toul., Mém. (8) IV. 137-146.

1) Der Verfasser untersucht die Bewegung eines materiellen

Punktes, welcher von einem festen Centrum umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung angezogen wird. Die Bahn des Punktes ist eine hyperbolische Spirale, deren Pol das Attractionscentrum ist. Der materielle Punkt gelangt zum Pol nach einer endlichen Zeit T, während welcher der Radiusvector unendlich viele Umläufe um den Pol macht. Nachdem der materielle Punkt den Pol erreicht hat, verlässt er ihn in einer zur Polaraxe senkrechten Richtung, um nach derselben Zeit T den Ausgangspunkt wieder zu erreichen. In einer Note bemerkt die Redaction des S. M. F. Bull., dass sie dem Verfasser die ganze Verantwortlichkeit für seine Ansicht überlässt.

In 2) wird der Inhalt von 1) kurz angegeben und vertheidigt, sowie neben dem ersten Satze: „Ein materieller Punkt kann in einer endlichen Zeit einen unendlichen Weg zurücklegen", noch auf den zweiten Satz: „Ein materieller Punkt kann eine unendliche Zeit zur Zurücklegung eines endlichen und bestimmten Weges gebrauchen", näher eingegangen. Rs.

P. Bachmann. Ueber die Bewegung eines Punktes. Pr. Berlin.

Zunächst zeigt der Verfasser: Wenn ein Punkt von den Elementen einer unendlichen Geraden umgekehrt proportional einer Potenz seiner Entfernung von denselben angezogen wird, übt die unendliche Gerade in ihrer Richtung keine Wirkung aus; die unendliche Gerade zieht den Punkt nur in der zu ihr senkrechten Richtung an, und zwar umgekehrt proportional einer Potenz seines Abstandes, welche um eine Einheit kleiner ist, als das für die Elemente der Geraden angenommene Attractionsgesetz angiebt. Es wird nun vorausgesetzt, dass dem angezogenen Punkte im Anfange seiner Bewegung eine Geschwindigkeit ertheilt ist, deren Richtung sich in der Ebene befindet, welche durch die anziehende Gerade und den angezogenen Punkt bestimmt ist, und es wird untersucht, welche Bahn der Punkt beschreibt, wenn dieser umgekehrt proportional der ersten, dritten, vierten und zweiten Potenz seiner Entfernung von den Elementen der unendlichen Geraden angezogen wird. Rs.

A. G. Greenhill. On the motion of a projectile in a resisting medium. Art. Inst., Proc. XI. No. 7, XII. No. 1.

Der Verfasser giebt die Formeln für die Trajectorie wieder, wie er sie für den Fall, dass der Widerstand der Luft gegen das Geschoss sich wie die dritte Potenz der Geschwindigkeit ändert, in den Proc. R. Artil. Inst. XI. 138 mitgeteilt hatte. Die Gleichung für die Bahn wird transformirt. In der neuen Gleichung kommt ein elliptisches Integral dritter Gattung vor, für welches durch Einführung der Θ-Functionen ein geschlossener Ausdruck erhalten wird. In entsprechender Weise wird auch der früher gewonnene Ausdruck für die Zeit, während welcher sich das Geschoss bewegt hat, umgeformt. Der Verfasser bemerkt, dass der einzige andere vollständig lösbare Fall der sei, wenn der Widerstand der Luft sich proportional der Geschwindigkeit ändert. Drei Tabellen sind beigegeben, welche Herr P. A. Mac-Mahon berechnet hat, und die nur von praktischem Interesse sind.

Rs.

M. D'Ocagne. Remarques sur le pendule. Nouv. Ann. (3) I 32-33.

Für ein Kreispendel, welches sich in einem einen constanten Widerstand leistenden Mittel bewegt, werden die beiden Sätze hergeleitet: „Zwei auf einander folgende Winkel, welche das Pendel in gleichen Zeitintervallen beschreibt, sind den Winkelgeschwindigkeiten, welche das Pendel in der Mitte jedes der Zeitintervalle hat, proportional.“ „Die Differenz zweier auf einander folgender Winkel, welche vom Pendel während gleicher Zeitabschnitte beschrieben werden, ist der Winkelbeschleunigung des Pendels längs der Trennungslinie der beiden Winkel proportional.“

Rs.

Th. v. Oppolzer. Beitrag zur Ermittelung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen. Wien. Ber. LXXXVI. 713-732, Wien. Anz 1882. 209-216.

Der Verfasser findet, dass, wenn eine Reihe von Pendelschwingungen Störungen erleidet durch Widerstände, die der ersten und zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional sind, die Aenderung der Amplituden dem Gesetze folgt:

$$\alpha_p = \frac{\alpha_0}{(1+\beta\alpha_0)e^{\varepsilon p}-\beta\alpha_0},$$

wo α_p die Amplitude der p^{ten} Schwingung nach derjenigen bezeichnet, bei welcher die Amplitude α_0 war. ε und p bedeuten Constante, welche durch Beobachtung von drei Amplituden ermittelt werden können. Dies Ergebnis, welches mit den Resultaten des Herrn Gronau (Ueber die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel) übereinstimmt, wird vollkommen bestätigt durch die Beobachtungen, welche Herr Anton in Berlin angestellt hat. Mit Hülfe dieses Gesetzes wird die auf den unendlich kleinen Bogen reducirte Schwingungsdauer gefunden. Ist α_a die Anfangs-, α_e die Endamplitude einer Reihe von p Schwingungen,

$$T' = \frac{1}{p}(T_1+T_2+\cdots+T_p)$$

die aus diesen abgeleitete Schwingungsdauer, so wird die reducirte Schwingungsdauer gegeben durch den Ausdruck:

$$T_0 = T' - \frac{T'}{\varepsilon p}\{\alpha_a^2 S'(\alpha_a\beta)-\alpha_e^2 S(\alpha_e\beta)\};$$

hier ist $S(\alpha\beta)$ eine Function, definirt durch:

$$S(\alpha\beta) = \frac{(\text{arc } 1')^2}{16\alpha^2\beta^2}[\alpha\beta-\log n(1+\alpha\beta)].$$

In einer der Abhandlung beigefügten, von Herrn F. K. Ginzel berechneten Tafel sind die Werte von log $S(\alpha\beta)$ für die um 0,01 fortschreitenden Argumentwerte $\alpha\beta$ zwischen 0 und 4,04 enthalten. Sbt.

H. Résal. Sur la courbe synchrone de la cycloïde.
Nouv. Ann. (3) I. 289-295.

Eine halb geometrische, halb analytische Methode wird benutzt zu einem einfachen Beweise dafür, dass die synchrone

Curve der Cycloide normal zu dieser ist. Ausserdem werden die Ausdrücke für die Bogenlänge und für den Krümmungsradius der Curve, sowie für den Inhalt derjenigen Fläche bestimmt, welche von der Curve und den Coordinatenaxen begrenzt wird.

Rs.

H. Résal. Sur les propriétés mécaniques de la lemniscate. Nouv. Ann. (3) I. 481-490.

In Bezug auf die Tangente der Lemniscate wird der Satz ausgesprochen: „Die Tangente bildet mit dem Radiusvector einen Winkel, welcher doppelt so gross ist, wie der Polarwinkel.“ Darauf werden die Ausdrücke für die Subtangente, die Rectification, den Krümmungsradius und die Quadratur der Lemniscate angegeben, beziehungsweise hergeleitet.

Analytisch gelöst wird „das Theorem von Saladini“ (Mem. del Ist. naz. ital. I. 49. 1804): „In welcher von all' den Curven, die, in einer Verticalebene liegend, denselben Anfangspunkt haben, bewegt sich ein Schwerpunkt, wenn er irgend ein Bogenstück in derselben Zeit durchlaufen soll, wie die entsprechende Sehne?“ Ferner löst der Verfasser analytisch und geometrisch das Theorem von O. Bonnet (Liouville J. IX. 1844): „Für welche unter allen Curven, welche denselben Anfangspunkt haben, durchläuft ein Punkt von jenem Anfangspunkte aus ohne Anfangsgeschwindigkeit, allein unter der Wirkung einer gegen ein festes Centrum gerichteten und proportional der Entfernung wirkenden Kraft irgend einen Bogen in derselben Zeit, welche er gebrauchen würde, um die entsprechende Sehne zurückzulegen?“

Rs.

P. van Geer. Over de beweging van stelsels, gebonden aan voorwaarden, die afhangen van den tijd. Nieuw Arch. VIII. 1-22.

Fortsetzung der Abhandlung im vorigen Jahrgang (siehe

F. d. M. XIII. 1881. p. 691). In erster Linie wird hier von der Bewegung eines Punktes auf einer Oberfläche gehandelt, deren Parameter direct von der Zeit abhängen, welche demgemäss eine eigene Bewegung hat, und deren Form und Grösse sich gleichzeitig auf bestimmte Weise verändert. Werden die Coordinaten eines Punktes der Oberfläche durch zwei unabhängige Grössen $q_1 q_2$ und die Zeit ausgedrückt, also

$$x = f_1(q_1 q_2 t) \quad y = f_2(q_1 q_2 t) \quad z = f_3(q_1 q_2 t),$$

so werden ihre Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_1}\frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1}\frac{d^2 f_3}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2}\frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2}\frac{d^2 f_3}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial q_2},$$

woraus q_1 und q_2 als Function von t dargestellt werden müssen. Als Anwendung wird die Bewegung eines Punktes auf einer Kugelfläche untersucht, deren Mittelpunkt unveränderlich ist, während der Radius sich mit der Zeit verändert.

Indem nunmehr zu der Bewegung eines Systems übergegangen wird, wird der Einfluss untersucht, welchen die Einführung von Bedingungen, die direct abhängig von der Zeit sind, auf die Bewegung ausübt. In erster Linie behandelt der Verfasser die Drehung eines festen Systems um eine Axe, welche nicht, wie gewöhnlich angenommen wird, fest ist, sondern eine gegebene Bewegung hat. Er zeigt, dass die Bewegung der Axe keinen Einfluss auf die Drehung um die Axe ausübt, entweder wenn die Bewegung gleichförmig und geradlinig ist, oder wenn die Axe durch den Schwerpunkt geht. Sodann wird die Bewegung des Systems untersucht in dem Falle, dass die Axe eine gleichförmige Kreisbewegung hat. Die Bewegung eines festen Systems um einen seiner Punkte unter der Voraussetzung, dass dieser Punkt eine gegebene Bewegung hat, kommt dann zur Besprechung; nach Aufstellung der allgemeinen Formeln werden die besondern Fälle betrachtet, dass die Bewegung des Punktes geradlinig und kreisförmig ist. Zum Schluss wird die Aufgabe gelöst, die Bewegung eines schweren Körpers zu bestimmen, welcher sich

mit einem Punkte auf eine horizontale Ebene stützt unter der Voraussetzung, dass diese Ebene eine bestimmte Bewegung in verticaler Richtung hat, und der besondere Fall, dass die Ebene frei fällt, behandelt. G.

GAMBEY. Solution d'une question de mécanique. Nouv. Ann. (3) I. 508-515.

Ein schwerer Punkt M, der auf der Oberfläche eines Rotationskegels mit verticaler Axe bleiben muss, wird von einem Punkt im Scheitel S des Kegels nach einem Gesetz angezogen, welches durch eine Function der Entfernung MS dargestellt wird. Diese Function soll nun so bestimmt werden, dass die Bahn von M eben ist. Es ergiebt sich

$$f(\varrho) = g\cos\theta + \frac{\lambda^2}{p\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\varrho^2} - \frac{\lambda^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\cdot\frac{1}{\varrho^3}.$$

Die Bewegung wird dann im Weiteren näher untersucht.

O.

BÖKLEN. Ueber die Aufhängepunkte und Axen für isochrone Schwingungen eines Körpers. Kronecker J. XCIII. 177-183.

Die Länge des einfachen Pendels, welches isochron mit einem um eine feste Axe beweglichen Körper schwingt, sei l; ferner sei v „der Trägheitsradius, welcher einer durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden parallel mit der Schwingungsaxe entspricht, und d der Abstand derselben von O." Dann ist

$$l = \frac{v^2 + d^2}{d}.$$

„OJ ist das von O auf die Schwingungsaxe gefällte Perpendikel, also J der Aufhängepunkt, durch den unter Umständen mehrere Schwingungsaxen senkrecht zu OJ gehen, und es soll die Frage untersucht werden: Welches ist der Ort der Punkte J, sowie auch die Richtung der zugehörigen Schwingungsaxen, wenn $l = \text{const.}$?"

a, b, c seien die Quadrate der drei durch O gehenden Hauptträgheitsradien, und zwar sei $a > b > c$; ferner sei

$$v_1 = d - \frac{l}{2} \text{ und } \frac{l^2}{4} > a.$$

Die Resultate sind dann: „Alle äusseren Aufhängepunkte für isochrone Schwingungen eines Körpers liegen auf oder zwischen den beiden Mänteln einer Fläche (J)

$$\frac{x^2}{a - ld + d^2} + \frac{y^2}{b - ld + d^2} + \frac{z^2}{c - ld + d^2} = 0,$$

welche aus einer Wellengeschwindigkeitsfläche (V_1)

$$\frac{x^2}{\left(\frac{l^2}{4} - a\right) - v_1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l^2}{4} - b\right) - v_1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{l^2}{4} - c\right) - v_1^2} = 0$$

durch Verlängerung ihrer Radien um die halbe Länge des isochronen einfachen Pendels abgeleitet ist. Für die Punkte auf einem Mantel von (J) giebt es nur eine Schwingungsaxe, für die anderen zwischen beiden Mänteln zwei. Durch die vier Punkte endlich, in welchen beide Mäntel zusammenstossen, gehen unendlich viele Schwingungsaxen. Also gehen überhaupt alle Axen für isochrone Schwingungen zwischen den beiden Mänteln der Grenzfläche der Aufhängpunkte (J) hindurch.“ Da $l^2 > 4a$ und $v^2 < a$ ist, sind die beiden Werte

$$d = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - v^2}$$

stets reell. Man erhält daher für den zweiten Wert von d eine Grenzfläche (J'), indem man $\frac{l}{2}$ auf den Radien von V_1 nach O hin abträgt. Die angegebenen Eigenschaften von (J) lassen sich auf (J') übertragen. Jede der Flächen (J) und (J') besteht aus zwei Mänteln; die Punkte der äusseren Mäntel seien mit J und J', die der inneren Mäntel mit i und i' bezeichnet. Die Punkte zwischen J und i, bez. J' und i', welche gleichfalls Aufhängepunkte sind, mögen mit J_0 und J'_0 bezeichnet werden. Dann besteht auch der Satz: „Auf einer durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden liegen beiderseits je vier Aufhängepunkte

für isochrone Schwingungen, durch welche nur eine Schwingungsaxe geht; zwei dieser Axen durch J und i' sind parallel und stehen senkrecht auf den beiden anderen durch i und J', welche also ebenfalls parallel sind. Für die weiteren Punkte J_0 auf Ji und J'_0 auf $J'i'$ (diese beiden Strecken schliessen einander stets aus) giebt es je zwei Schwingungsaxen, nämlich die Perpendikel, welche in J_0 oder J'_0 auf den Tangentialebenen errichtet werden, die man durch die Gerade an die confocalen Kegel legen kann. Für alle übrigen Punkte auf der Geraden, entweder zwischen i und i' oder ausserhalb J und J', giebt es keine Axen, um welche der Körper Schwingungen machen kann, welche denjenigen des einfachen Pendels von der Länge l isochron sind. Hat die Gerade die Richtung einer Asymptote der Focalhyperbel des Grundellipsoids

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1,$$

so liegen auf ihr vier Punkte mit unendlich vielen Schwingungsaxen, also giebt es für jeden Körper im Ganzen acht solcher Punkte, welche einer bestimmten Länge l des isochronen einfachen Pendels entsprechen. Diese acht Punkte haben von O die Entfernungen

$$d=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\frac{l^2}{4}-b}.\text{“}$$

Rs.

R. Lipschitz. Sur le pendule. C. R. XCV. 1141-1144.

Ein schwerer Körper drehe sich frei um eine horizontale Axe. Zwei Bewegungen des Körpers werden betrachtet. Die erste ist durch die Bedingung charakterisirt, dass die Winkelgeschwindigkeit für einen Wert θ_0 des Winkels θ gleich Null ist, und die zweite dadurch, dass die Winkelgeschwindigkeit für $\pi-\theta_0$ von θ gleich Null ist. Die Zeit werde im ersten Fall mit t und im zweiten Falle mit t' bezeichnet. Für t und t' hat man zwei elliptische Integrale, welche mit Hülfe passender Substitutionen in andere übergeführt werden, und zwar in elliptische Integrale

erster Art, deren Moduln complementär sind. Ferner hat der Verfasser gefunden, dass die entsprechenden elliptischen Integrale zweiter Art das ausdrücken, was Hamilton in die Mechanik unter der Bezeichnung der „angesammelten lebendigen Kraft" eingeführt hat. Dieses Integral werde im ersten Falle mit w, im zweiten Falle mit w' bezeichnet, und man transformire beide Integrale in derselben Weise wie vorher. Damit der feste Körper sich von der Ruhelage bis zum grössten Winkel von θ bewegt, müssen die neuen Variablen

$$\xi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}} \quad \text{und} \quad \xi' = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta_0}{2}}$$

von Null bis 1 zunehmen. T, T', W, W' seien die Werte von t, t', w, w', wenn die Integrale in Bezug auf ξ und ξ' von 0 bis 1 genommen werden. Bezeichnet man die vollständigen Integrale der ersten Art mit complementären Moduln mit K und K' und die der zweiten Art mit $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ und berücksichtigt, dass $K\mathfrak{T}'-\mathfrak{T}K' = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{nicht } KT'-TK' = \frac{\pi}{2}\right)$ ist, so gelangt man zu dem Theorem

$$TW'+WT' = 2\pi N.$$

Hierin bedeutet N das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers in Bezug auf die horizontale Axe. Rs.

J. Bertrand. Sur la loi de déviation du pendule de Foucault. C. R. XCIV. 371-372.

Hatt. Sur la loi de déviation du pendule de Foucault. C. R. XCIV. 638-639.

1) Foucault hatte den Satz ausgesprochen: „Wenn die Verticale in der Oscillationsebene ihre Richtung im Raume ändert, werden die auf einander folgenden Lagen der Oscillationsebene durch die Bedingung bestimmt, unter sich kleinste Winkel zu bilden." Foucault wendete dieses Theorem auf den Fall an,

dass das Pendel in der Meridianebene schwingt. Der Verfasser beschäftigt sich mit dem allgemeinen Problem:

„Der Beobachter befinde sich auf der Erdoberfläche in M. Nach der Zeit dt wird er nach M' auf dem durch M gehenden Parallelkreise gelangt sein. Wenn die Oscillationsebene keine scheinbare Bewegung hätte, würde sie sich mit der Erde drehen, und ihre auf einander folgenden Lagen würden einen Parallelkreis umhüllen. J sei der Berührungspunkt in der ursprünglichen Lage, und er gelange nach J', wenn M nach M' gekommen ist. Unter den grössten Kreisen, welche durch M gehen, ist $M'K$ derjenige, welcher mit MJ den kleinsten Winkel macht, und welcher MJ in der Entfernung $MK = 90°$ vom Punkte M schneidet. Der Kreis $M'J'$ würde keine Abweichung erkennen lassen; die scheinbare Rotation ist daher $J'M'K$. Sie muss berechnet werden und werde mit θ bezeichnet.“ Es wird gefunden

$$\theta = \cos MP \cdot \frac{JJ'}{\varrho}\cdot$$

$\cos MP$ ist gleich dem Sinus der Breite; $\frac{JJ'}{\varrho}$ ist der Winkel, um welchen sich die Erde gedreht hat.

2) Im Anschluss an 1) giebt der Verfasser einen neuen Beweis für den Foucault'schen Satz:

$$d\alpha = \frac{dP}{2}\cdot \sin l.$$

Rs.

H. Résal. Développements sur la question relative à l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement du pendule. Nouv. Ann. (3) I. 337-343.

Es sei C der Mittelpunkt der Erde, O der Aufhängepunkt des Pendels. Der Verfasser zerlegt die Winkelgeschwindigkeit der Erde ω, von welcher nur die erste Potenz berücksichtigt wird, in zwei Componenten, nämlich in $\omega \sin\lambda$ um OC und in $\omega\cos\lambda$ um CH, die zu OC senkrechte Gerade in der Meridianebene. Die Wirkung jeder der beiden Componenten auf die Be-

wegung des Pendels wird besonders untersucht, wobei sich zeigt, dass die letztere Componente ausser Rechnung bleiben kann.

Rs.

Ph. Gilbert. Les preuves mécaniques de la rotation de la terre. Darb. Bull (2) VI. 189-224.

Eine historische Darstellung, in welcher auch die neuesten Gyroskope besprochen sind. Vom gyroskopischen Pendel von G. Sire und von einem Apparate (Barogyroskop), welchen H. Ducretet nach des Verfassers Wünschen construirt hat, sind Abbildungen beigegeben. Rs.

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Brux., S. sc. VI. 270-374; VII. 11-110.

C. Jordan. Rapport sur ce mémoire. C. R. XCV. 111-116. (1882).

Die Abhandlung hat zum Gegenstand die Untersuchung der Bewegung gyroskopischer Apparate in Bezug auf ein Axensystem (système de comparaison), welches mit einer gleichförmigen Rotationsbewegung versehen ist, und zwar mit Hülfe einer Gleichung von Bour zur Anwendung der Lagrange'schen Formeln auf relative Bewegungen. Die Bour'sche Gleichung wird kurz bewiesen; die geometrische Interpretation einzelner Glieder, die darin vorkommen, giebt für jedes Problem fast ohne Rechnung die Differentialgleichungen der Bewegung als Function der passendsten Variabeln ohne Coordinatentransformation.

Diese Methode wird zuerst auf die Frage des Gleichgewichts und der relativen Bewegung eines Ringes angewendet, der eine kleine angehängte Masse trägt, und der um eine horizontale Axe beweglich, um eine verticale Axe in gleichförmiger Rotationsbewegung fortgeführt wird.

Die gefundenen Gleichungen zeigen, dass seine Bewegung

auf die eines schweren Punktes auf einem sich gleichförmig um einen verticalen Halbmesser drehenden Kreis zurückgeführt werden kann. Diese letztere Bewegung stellt einen einfachen Typus dar, auf welchen complicirtere Bewegungen derart zurückgeführt werden können, dass, wenn man bis an's Ende die Lösung des ersten mit Hülfe elliptischer Functionen durchführt, einfache Substitutionen in den Formeln genügen, um ebenso die vollständige Lösung der gyroskopischen Probleme zu finden.

Aus der Rechnung ergiebt sich, dass, wenn die Geschwindigkeit gering ist, es für den schweren Punkt nur zwei Gleichgewichtslagen giebt, welche auf der Rotationsaxe liegen. Für eine grössere Geschwindigkeit giebt es vier Gleichgewichtslagen; die beiden ausserhalb der Verticale gelegenen entsprechen dem stabilen Gleichgewicht. Wenn im Anfangsmoment, die relative Geschwindigkeit gleich Null gesetzt, der bewegliche Punkt keine dieser Gleichgewichtslagen einnimmt, dann beschreibt er um die nächste stabile Gleichgewichtslage eine Reihe periodischer Oscillationen, deren Gesetz sich explicite durch elliptische Functionen ausdrücken lässt. Ferner kann er in dem zweiten der oben genannten Fälle oscilliren und immer auf derselben Seite der Verticale bleiben.

Für ein Gyroskop, bestehend aus einer Scheibe oder einem Torus D, dem man eine Rotation n um seine geometrische Axe gegeben hat, einem innern Ringe I und einem äussern Ringe E, welcher in gleichförmiger Rotation ω um seinen Durchmesser ZZ' erhalten wird, giebt es zwei oder vier Gleichgewichtslagen bezüglich der Scheibenaxe. Ist diese Geschwindigkeit Null, so bleibt deswegen die Axe noch nicht im Gleichgewicht, wenn nicht die Trägheitsmomente des Torus und des Ringes I einer einfachen Relation genügen. In diesem Falle findet Gleichgewicht für jede Neigung der geometrischen Axe zur Axe ZZ' statt. Ausser den Gleichgewichtsfällen folgt die Oscillation der Torusaxe in Bezug auf ZZ' den gleichen Gesetzen, wie die eines schweren Punktes auf einem Kreise, der sich um einen verticalen Durchmesser dreht, und sie wird durch die Formeln des oben bezeichneten Problems dargestellt. Der Ausdruck für die Rotation der Scheibe hängt

von Integralen der Form ab:

$$\int \frac{\alpha + \beta \operatorname{sn} u}{\gamma + \delta \operatorname{sn} u} \, du,$$

die sich leicht auf Jacobi'sche Functionen zurückführen lassen. Alle Variabeln lassen sich also explicite als Functionen der Zeit ausdrücken, jedoch ist die Endform dieser Ausdrücke verschieden, je nach den Beziehungen, welche zwischen den Geschwindigkeiten n, ω (den Winkel ζ_0 im Anfangsmoment zwischen der Torusaxe und der Axe ZZ' genommen) und den Trägheitsmomenten des Torus und der Ringe bestehen. Es giebt sieben verschiedene Fälle. In dem besonderen Falle, wo die absolute Anfangsgeschwindigkeit eine Componente Null längs der Torusaxe hat, oscillirt diese Axe regelmässig von einer Seite zur andern einer Senkrechten auf ZZ', und die Rotationsbewegung des Torus um seine Axe reducirt sich ebenfalls auf eine oscillirende Bewegung.

Das Polytrop von Sire, ein Apparat, um die Wirkungen nachzuahmen, welche die Erdrotation auf die Körper ausübt, die sich schnell auf ihrer Oberfläche drehen, bietet eine andere Anwendung der Methode. Man leitet daraus die strengen Bewegungsgleichungen des Torus ab. Sind der Torus und die Ringe frei, dann giebt es mehrere relative Gleichgewichtslagen für die Torusaxe, und dieser Fall der Bewegung lässt sich auf die Formeln von Lottner (Crelle J. LIV. 197) zurückführen. Wird die geometrische Axe in einer in Beziehung auf den drehenden Meridian festen Ebene geführt, und ist die Anfangsrotation n des Torus klein genug, so giebt es für diese Axe eine stabile Gleichgewichtslage, welche nicht zusammenfällt mit der Projection OS auf die Leitebene der Parallelen zur Rotationsaxe des Meridians. Dies merkwürdige Resultat steht in Widerspruch mit dem Princip der Neigung der Rotationsaxen zum Parallelismus, ein Princip, was nur bei sehr rascher Rotation des Torus zutrifft. Endlich zeigen die Bewegungsgleichungen, dass die Torusaxe in Bezug auf die Projection OS oscillirt wie ein einfaches Pendel, dessen Oscillationsebene sich um die Verticale mit einer constanten Geschwindigkeit drehen würde. Diese Geschwindig-

keit und die Länge des Pendels sind einfache Functionen der Rotationen des Torus und des Meridians, der Trägheitsmomente des Torus und der Ringe etc. Die Formeln des ersten Problems geben also auch hier in expliciten Functionen der Zeit die Neigung der Torusaxe in einer bestimmten Richtung, und die andern Elemente des Problems hängen gleicherweise von elliptischen Functionen ab.

Der zweite Teil behandelt neuere Probleme, in denen gleichzeitig die Schwere zu der Rotation des Axensystems hinzutritt. Hier knüpfen die Oscillationen an einen neuen Typus an: nämlich die Bewegung eines schweren Punktes in einem verticalen Kreise, der sich gleichförmig um eine Verticale dreht, welche nicht durch den Mittelpunkt geht. Die Bewegungsgleichung des Punktes und die Gleichgewichtslagen entspringen unmittelbar aus der Bour'schen Gleichung durch die vom Verfasser aufgestellte Methode. Die Bestimmung dieser Lagen, deren Anzahl entweder zwei oder vier ist, wird auf die Construction einer Geraden zurückgeführt, die durch einen gegebenen Punkt geht, und so beschaffen ist, dass das auf ihr von zwei rechtwinkligen Geraden ausgeschnittene Segment eine bestimmte Länge hat. Die stabilen Gleichgewichtslagen werden durch die Bewegungsgleichung bestimmt, deren Integration wiederum von elliptischen Functionen abhängt. Das gyroskopische Pendel von Sire besteht aus einem verticalen Stabe, dessen Ende ein Bügel ist, welcher einen beweglichen Torus, dessen Axe senkrecht zum Stabe ist, trägt. Der ganze Apparat kann um eine Horizontale, die senkrecht zur Torusaxe ist, oscilliren. Er kann mittels der Methode des Verfassers streng und vollständig untersucht werden, bei beliebiger Masse des Bügels und beliebiger anfänglicher Rotationsgeschwindigkeit des Torus. Ist letztere nicht zu bedeutend, dann kann das Pendel, wie durch Rechnung gezeigt wird, vier Lagen relativen Gleichgewichts annehmen, die durch dieselbe Construction, wie die des vorliegenden Problems bestimmt werden; dies giebt die bisher ungelöste Erklärung für eine von Sire in seinen Experimenten gefundene Tatsache. Ist jedoch die Rotation des Torus eine sehr schnelle, so führt

die genannte Construction zu bekannten Resultaten und erklärt eine Reihe merkwürdiger durch den Apparat dargestellter Phänomene.

Ausserhalb seiner Gleichgewichtslagen beschreibt der Stab Oscillationen, deren Gesetz dasselbe ist, wie das des schweren Punktes im obigen Problem; die Bewegung des gyroskopischen Pendels wird also auf ein gelöstes Problem zurückgeführt. Kann man das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit des Trägers vernachlässigen, dann gilt das Bewegungsgesetz für das einfache Pendel. Mit der Untersuchung einiger besonderer Fälle schliesst der zweite Teil. Im dritten wird dieselbe Methode auf die gyroskopischen Bewegungen an der Oberfläche der Erde angewendet, oder allgemein eines Planeten mit gleichförmiger Rotation um eine Axe. Wenn man diese Geschwindigkeit ω beliebig annimmt, die Schwere dagegen als constant in Grösse und Richtung für alle Punkte des Körpers voraussetzt, dann erhält man die Bewegungsgleichungen in der folgenden einfachen Form:

$$\text{(A)}\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial q'} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q} = Mg\,\frac{\partial \varrho \cos\overline{\varrho g}}{\partial q}.$$

T ist die halbe lebendige Kraft bezüglich des beweglichen Systems, V das geometrische Product der Rotationsaxe des Planeten in die Axe des Paares der relativen Bewegungsgrössen des Körpers, q irgend eine der Variabeln, welche die Lage des Körpers bestimmen, M seine Masse, ϱ der Radiusvector des Schwerpunktes des Körpers und $\overline{\varrho g}$ der Winkel zwischen diesem Radiusvector und der Richtung der Schwerkraft. Diese Gleichung wird noch einfacher, wenn man annimmt, (wie es bei den Experimenten mit dem Foucault'schen Gyroskop an der Erdoberfläche der Fall ist), dass der Schwerpunkt des Körpers mit dem Anfangspunkt O des Axensystems während der ganzen Dauer der Bewegung ($\varrho = 0$) zusammenfällt. Man braucht dann nur noch die Grössen T und V zu berechnen und kann dann sofort die Bewegungsgleichungen des Torus und seiner Ringe niederschreiben.

Im zwölften und den folgenden Paragraphen untersucht der

Verfasser auf diesem Wege die scheinbare Bewegung des Gyroskops, indem er Glieder zweiter Ordnung von ω in den verschiedenen von anderen Geometern betrachteten Fällen berücksichtigt. (Torusaxe, ganz freie, geführt in einer Leitebene, auf einem Kegel etc.) Da aber die vereinfachende Hypothese betreffs der Schwere nicht identisch mit der von Lottner und Bour ist, so unterscheiden sich die Gleichungen durch Glieder von der Ordnung von ω^2. Diese Gelegenheit wird zur Integration gewisser Differentialgleichungen, die noch nicht behandelt worden sind, mit Hülfe elliptischer Functionen benutzt. Ist die Torusaxe ganz frei, und kann man die Massen der Ringe vernachlässigen, dann erhält man die Werte der Winkel Θ, Ψ, φ, von denen die Lage des Torus und seiner Ringe abhängt, als explicite Functionen der Zeit. Ist die Axe des Torus gezwungen, sich zu bewegen in einer zum Planeten festen Ebene oder auf der Oberfläche eines festen Kegels, dann sind die Lagen des relativen Gleichgewichts der Torusaxe leicht zu bestimmen; man kommt auf Foucault'sche Resultate. Tritt dies Gleichgewicht nicht ein, so hat man wieder die Bewegung eines schweren Punktes auf einem sich um einen verticalen Durchmesser drehenden Kreise, (erstes Problem), welche den Typus darstellt, auf den die Oscillation der Torusaxe zurückgeführt wird; eine einfache Anwendung der Formeln dieses Problems würde das genaue Gesetz dieser Oscillation geben. Unter andern merkwürdigen Resultaten findet man, dass, wenn die Rotation des Planeten schnell genug, die des Torus langsam genug ist, die Axe desselben, in einer Horizontalebene erhalten, immer auf derselben Seite der Meridianebene oscillirt.

Der vierte Teil der Arbeit behandelt die Fälle der scheinbaren Bewegung eines gyroskopischen Systems auf der Erdoberfläche, in denen die Schwere zu der Rotation des Planeten hinzutritt, um die Torusaxe abzulenken. Das Pendel von Sire giebt Veranlassung zu dieser Untersuchung (§ XVII.). Vorausgesetzt, die horizontale Aufhängungsaxe des Pendels sei fest in Bezug auf die Erde, aber habe ein beliebiges Azimut; das Pendel habe irgend welche Neigung und der Torus eine gegebene Anfangsrotation, dann erhält man die Bewegungsformeln unmittelbar aus

der Gleichung (A). Man schliesst hieraus zuerst, dass die stabile Gleichgewichtslage des Pendelstabes einen kleinen Winkel mit der Verticalen macht, indem sie in dem einen oder anderen Sinne der Richtung der Rotation des Torus folgt; der Wert dieses Winkels hängt übrigens vom Azimut der Oscillationsebene ab. Könnte man dem Torus eine genügend rasche Rotation verleihen, dann würde dieser Apparat ein deutliches Bild der Bewegung der Erde geben. Entfernt aus der Gleichgewichtslage, macht das Toruspendel Oscillationen, für die wieder das Gesetz der Bewegung eines schweren Punktes gilt, der sich auf einem um eine verticale Secante drehenden Kreise bewegt. Die Formeln liefern alle Elemente dieses idealen Pendels als Function der Daten des gyroskopischen Pendels. Da die Abweichung in der oben beschriebenen Construction zu wenig bemerkbar ist, so berechnet der Verfasser einen empfindlicheren Apparat, den er Barogyroskop nennt. Ein Stahlbügel liegt auf zwei Schneiden an den Enden eines Horizontaldiameters. Im Innern trägt er einen Torus, der zur Axe einen zweiten, zum ersten senkrechten Durchmesser hat. In der unteren Verlängerung der Axe trägt der Bügel einen Stift, längs welchem man einen Schieber auf und ab bewegen kann. Da der Schwerpunkt des Torus sehr empfindlich auf der Linie der Schneiden liegt, so hält das Gewicht des Schiebers den verticalen Stift, wenn der Torus in Ruhe ist.

Die durch die Gleichung (A) gelieferten strengen Gleichungen dieses Systems der scheinbaren Bewegung ergeben, dass der Stift im Gleichgewicht ist, wenn er mit der Verticalen einen Winkel E macht, der durch die Formel gegeben ist:

$$\operatorname{tg} E = \frac{C\omega n \cos L \cos\alpha}{g\mu\delta - C\omega n \sin L},$$

wo n die Anfangsgeschwindigkeit des Torus, L die Breite des Ortes, α der Winkel der Oscillationsebene des Stiftes mit dem Meridian, μ die Masse des Schiebers, δ seine Entfernung von der Linie der Schneiden, C das Trägheitsmoment des Torus bezüglich seiner Axe ist. Daraus folgt für $\alpha = 0$, dass der Stift nach Norden oder Süden abgelenkt wird, je nach dem Sinne der Rotation n, während, wenn die Oscillationsebene normal

zum Meridian ist, jegliche Abweichung verschwindet. Experimente haben diese theoretischen Resultate bestätigt. Herr Jordan meint, dass dieser neue Apparat das Foucault'sche Gyroskop zum Beweise der Drehung der Erde ersetzen könne. Er sei auch leichter zu construiren. Die Formeln für die Oscillationen geben den nötigen Anhalt für die Form und die bequemsten Dimensionen des Apparates und sichern dem Phänomene volle Entwickelung.

Die letzten Capitel der Arbeit geben die Bewegungsgleichungen eines Kreisels unter Berücksichtigung der Erdrotation. Hierüber scheint übrigens Foucault schon Experimente angestellt zu haben. Die Differentialgleichungen können mit Hülfe von (A) leicht aufgestellt werden, jedoch bietet ihre Integration, abgesehen von einigen besonderen Fällen, grosse Schwierigkeiten. Die Analyse rechtfertigt die schon von Foucault gemachte Bemerkung, dass die Axe des Kreisels nur dann eine unveränderliche Richtung beibehalten könne, wenn die Richtung in der Meridianebene liegt und einen kleinen Winkel mit der Verticalen macht, entweder nach Norden oder Süden, je nach dem Sinn der Rotation des Kreisels. Mn. (O.).

Despeyrous. Note sur les équations différentielles du mouvement d'un corps solide libre ou gêné sollicité par des forces quelconques. Toul., Mém. (8) IV. 81-87.

Der Verfasser verschafft sich die Differentialgleichungen des betrachteten Problems auf anderem Wege, als im vorigen Jahre (s. F. d. M. XIII. 1881. 708-709), nämlich nach der Lagrange'schen Methode, indem er die lebendige Kraft und die Arbeit bestimmt. Rs.

F. A. Jarleton. On some deductions of McCullagh's „lectures on rotation." Dublin. Trans.

McCullagh's Lectures on Rotation (zuerst in den Dublin Trans. XXII. veröffentlicht) beschäftigen sich vorzugsweise mit der Be-

Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung äusserer Kräfte. Statt des Momentenellipsoids braucht McCullagh das Gyrationsellipsoid, welches zu ersterem reciprok ist.

McCullagh beweist, dass der Schnitt auf der Centrifugal-Paar-Axe (die rechtwinklig zur Momentenaxe und zur augenblicklichen Rotationsaxe steht) mit dem Gyrations-Ellipsoid Flächen in der unveränderlichen Ebene proportional der Zeit beschreibt. Aus diesem Resultat leitet Herr Jarleton die Poinsot'sche Gleichung ab, welche die Rotationsgeschwindigkeit der Ebene, in welcher die Momenten-Axe und die augenblickliche Rotationsaxe liegen, als Function des Winkels zwischen ihnen ausdrückt. Die Ableitung geschieht mit Hülfe eines Satzes aus der Theorie der Flächen zweiter Ordnung, welcher den Winkel zwischen der Senkrechten auf einer Tangentialebene und dem Halbmesser des Berührungspunktes in Verbindung bringt mit den Axenlängen des Centralschnittes, der durch den Berührungspunkt und rechtwinklig zur Ebene der früheren Linien geht. Für diesen Satz giebt der Verfasser einen neuen und einfachen Beweis, der sich auf elementare Eigenschaften von confocalen Flächen stützt. Später erhält er dadurch eine Differentialgleichung zwischen dem Winkel, der von der Centrifugal-Paar-Axe mit einer festen Linie in der unveränderlichen Ebene gebildet wird, und dem Winkel zwischen der Momentenaxe und der augenblicklichen Rotationsaxe. Durch Integration dieser Gleichung lässt sich die eine Grösse durch die andere ausdrücken mittels elliptischer Functionen erster und dritter Art. Bei der Ausführung der Reduction auf elliptische Functionen gelingt es, die algebraischen Zeichen und die relativen Grössen der verschiedenen Constanten zu bestimmen. Schliesslich giebt der Verfasser mit Hülfe des schon erwähnten Satzes für Oberflächen zweiten Grades einen Ausdruck für den Winkel zwischen der Momentenaxe und der augenblicklichen Rotationsaxe als Function der Zeit mittels elliptischer Functionen erster Ordnung. Weiter kommt der Verfasser zu dem Satz, dass die Normale an den Kegel, welchen die augenblickliche Rotationsaxe beschreibt, eine Krümmungslinie auf dem

Gyrationsellipsoid ist. Er verbessert auch einen Zeichenfehler in einer der McCullagh'schen Gleichungen, die er weitläufig untersucht. Csy. (O.).

W. Hess. Ueber das Problem der Rotation. Klein Ann. XX. 461-470.

Die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist für die zwei Fälle bereits gelöst: 1) Der Körper bewegt sich um seinen Schwerpunkt; 2) ein Umdrehungskörper rotirt um einen festen Punkt seiner Axe. Der Verfasser zeigt, dass für einen beliebigen starren Körper vom Gewichte P, welcher um einen festen Punkt O unter dem Einflusse eines beliebig angreifenden Kräftepaares rotirt, „die Componente des wirkenden Kräftepaares bezüglich der Richtung der Schwere während der ganzen Dauer der Bewegung constant ist.“ Die Cosinus a'', b'', c'' der Winkel, welche die Verticale OZ mit den drei Hauptträgheitsaxen (OX', OY', OZ') des Körpers bildet, können leicht bestimmt werden. Wenn man diese Werte in die Euler'schen Bewegungsgleichungen einsetzt, bekommt man ein System dreier simultaner linearer Bewegungsgleichungen für die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r der Drehung um OX', OY', OZ'. Indem die Bedingung hinzugefügt wird, dass die drei Axen des Kräftepaares, der Figur und der Schwere in einer und derselben Ebene liegen, (dies findet statt, wenn die Axe des afficirenden Kräftepaares, welches die Bewegung im Anfang hervorbringen soll, in die durch die Figuraxe, die Verbindungslinie des festen Punktes O mit dem Schwerpunkte S, gelegte verticale Ebene fällt), erhält man die beiden Sätze: „Die Grösse des Kräftepaares, welches den Körper angreift, ist während der ganzen Dauer der Bewegung constant.“

„Die Kräftepaaraxe beschreibt im Raume einen Kreiskegel, dessen Spitze der feste Drehpunkt ist, und dessen Axe die Richtung der Schwere besitzt.“

Die Lösung vereinfacht sich, wenn man über die Lagen des Schwerpunktes S und des Unterstützungspunktes O specielle

Annahmen macht. Wenn der Schwerpunkt auf einer durch O gehenden Hauptaxe liegt, reichen zur Lösung statt der Abel'schen bereits hyperelliptische Functionen aus; wenn das Kräftepaar um die Figuraxe selbst wirkt, gebraucht man nur noch ultraelliptische Functionen, und wenn das anfängliche Kräftepaar um die Axe der Schwere wirkt, erhält man die Grössen, welche die Lagen des Systems bestimmen, in elliptischen Functionen der Zeit. „Der Kreiskegel, welchen die Kräftepaaraxe im Raume beschreibt, reducirt sich auf die Verticalaxe, so dass diese eine invariable Linie, die Kräftepaarebene (d. i. die Horizontalebene durch den festen Punkt) eine invariable Ebene vorstellt.“

Rs.

A. G. Greenhill. On the steady motion of a solid of revolution rolling on a surface of revolution under gravity. Quart. J. XVIII. 229-231.

Als Ergänzung zu einer früheren Mitteilung (Quart. J. XVII. 86-89, s. F. d. M. XII. 1880. 696) wird die Bedingung dafür hergeleitet, dass ein fester Umdrehungskörper unter der Wirkung der Schwere auf einer Umdrehungsfläche, deren Axe vertical ist, stationär rollt. Rs.

H. Léauté. Sur les solides d'égale résistance. C. R. XCV. 1219-1220.

Résal erwähnt in seinem „Traité de Mécanique générale“ Tome V. § 40 (Profil des lames du dynamomètre de Poncelet), dass Poncelet empfohlen habe, Federn von gleichmässiger Dicke anzuwenden, man aber oft für diese äussere Fläche eine parabolische Form wähle, weil man glaube, dadurch einen Körper von gleichmässigem Widerstande zu erhalten. Résal's Untersuchung führte zu keinem Resultate, welches in der Praxis benutzt werden konnte. Der Verfasser wünschte daher, die Form des äusseren Profils für einen Körper von gleichem Widerstande zu finden, wenn sich der Körper unter analogen Bedingungen befindet,

wie die Feder eines Dynamometers. Ferner wollte er die Lösung für die Praxis verwerten. In dem Auszuge deutet der Verfasser an, welchen Erfolg er erzielt hat: Die Discussion seiner Formeln lasse die Beziehung zwischen der theoretischen Curve und der gewöhnlichen Parabel erkennen. Wenn man mit p die Grösse $\frac{e_0^2}{2l}$ bezeichnet, indem l die Länge und e_0 die halbe Dicke des Stückes im Befestigungspunkte bedeuten, betrage der Fehler ungefähr $\frac{p}{2}$, falls man den gewöhnlichen Umriss nehme, sei aber kleiner als $\frac{p}{25}$, falls man einen weniger einfachen Umriss wähle, welchen der Verfasser beschreibt. Rs.

J. Grossmann. Zur Theorie der Reglage. D. Uhrm. Z. VI. 9-11.

Die Theorie der Reglage besteht in der Berechnung der Zeitdauer einer Unruheschwingung. Mittels des Trägheitsmomentes der Unruhe A und der Kraftmomente F, welche auf die Unruhe einwirken, kann man die Winkelbeschleunigung $J = \frac{F}{A}$ bestimmen. Daraus berechnet man die Winkelgeschwindigkeit, und aus dieser die Zeitdauer einer Schwingung. Der Verfasser giebt an, wie man das Trägheitsmoment $A = \frac{P}{g} R^2$ annähernd berechnet. Unter den Kräften, welche auf die Unruhe wirken, ist die bei weitem grösste die der Spiralfeder. Es wird gezeigt, wie man das Moment derselben auf praktischem Wege bestimmen kann. Auch wird noch die Untersuchung, wie man es mit Hülfe der Elasticitätsgesetze berechnet, begonnen. Eine Fortsetzung soll folgen. Sbt.

B. Hydrodynamik.

R. Reiff. Ueber die Principien der neueren Hydrodynamik. Habilitationsschrift. Freiburg und Tübingen. Mohr.

Die allgemeinste Bewegung eines Volumenelements einer Flüssigkeit kann man bekanntlich (abgesehen von der Translation) ersetzen durch eine Dilatation und eine Rotation. Man kann aber auch, statt die Bewegung eines Volumenelements zu betrachten, nur die eines Linienelements in's Auge fassen. Die Bewegung desselben lässt sich als lineare Dilatation verbunden mit einer Drehung auffassen. Die genauere Erörterung dieser Zerlegung und ihres Zusammenhangs mit der ersten Art der Zerlegung bildet den wesentlichsten Inhalt der vorliegenden Schrift. Die wichtigsten Resultate, zu denen der Verfasser gelangt, sind folgende: Diejenigen von einem Punkte ausgehenden Linienelemente, für welche die Veränderung ihrer Länge in einem Zeitelement der Länge selbst umgekehrt proportional ist, bilden die Radien einer Fläche zweiter Ordnung. Die Axen dieser Fläche heissen die Hauptdilatationsaxen. Für incompressible Flüssigkeiten ist die Fläche ein Hyperboloid, auf dessen Asymptotenkegel diejenigen vom Mittelpunkte ausgehenden Linienelemente liegen, die keine Dilatation erleiden. Die Rotationsgeschwindigkeiten der verschiedenen von einem Punkte ausgehenden Linienelemente sind verschieden nach Grösse und Richtung. Diese Rotationsgeschwindigkeiten bestehen aus zwei Teilen, 1) aus derjenigen Rotation, die bei der Dilatation des Volumenelements die einzelnen Radien dieses Elements erleiden, 2) aus einem allen Radien gemeinsamen Teile; letzterer ist gleich der Rotationsgeschwindigkeit des Volumenelements bei der ersten Art der Zerlegung. Der eben genannte zweite Teil hat noch folgende Bedeutung: Er stellt die Rotationsgeschwindigkeiten der Hauptdilatationsaxen dar; man kann ihn aber auch auffassen als mittleren Wert der Rotationsgeschwindigkeiten der verschiedenen von einem Punkte ausgehenden Radien. Erwähnt mag endlich noc hwerden, dass es im Allgemeinen drei von einem Punkte aus-

gehende Linienelemente giebt, die bei der Elementarbewegung ihre Richtung nicht ändern, und dass diese schief zu einander stehen.

Nach des Referenten Ansicht sind Erörterungen, wie die oben skizzirten, wenn ihre Resultate auch nur zum Teil neu sind, nützlich. Die Ableitungen, die der Verfasser in der vorliegenden Arbeit giebt, lassen indessen zu wünschen übrig. Namentlich ist der folgende principielle Irrtum zu rügen. Bei der Elementarbewegung beschreibe ein Linienelement den Winkel εdt, und es seien die Projectionen des Winkels εdt auf die Coordinatenebenen resp. ϑdt, ιdt, $\varkappa dt$, so sollen nach des Verfassers Ansicht ϑ, ι, $\varkappa$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit des betrachteten Linienelements sein. Das ist unrichtig; es müsste denn mit dem Worte Winkelgeschwindigkeit etwas anderes gemeint sein, als man sonst in der Mechanik darunter versteht, und das wieder ist nirgends gesagt.

In einem Schlussparagraphen wird die Combination einer rein rotatorischen Bewegung der ganzen Flüssigkeit mit Potentialbewegung behandelt, ohne dass sich wesentlich Neues ergiebt. Die Einleitung endlich enthält historische Notizen über die Schriften, in denen die Elementarbewegung einer Flüssigkeit früher erörtert ist. Wn.

R. Townsend. On a property in the theory of the irratational strain of an incompressible lamina in the plane of its mass. Herm. 1882.

Beweis des folgenden Satzes: Wenn bei einer rotationslosen Bewegung einer ebenen Flüssigkeitslamelle in ihrer Ebene die Stromlinien und ihre Orthogonalen für die Maximalverschiebung der Molecüle durch die Gleichungen

$$r^n \cos(n\vartheta) = a^n \quad \text{und} \quad r^n \sin(n\vartheta) = b^n$$

dargestellt werden, so sind die Gleichungen der entsprechenden Curven für die grösste Dilatation von der Form:

$$r^{\frac{1}{2}n}\cos\left(\frac{1}{2}n\vartheta\right) = a^{\frac{1}{2}n} \quad \text{und} \quad r^{\frac{1}{2}n}\sin\left(\frac{1}{2}n\vartheta\right) = b^{\frac{1}{2}n}.$$

Csy. (Wn.).

J. J. THOMSON. On the vibrations of a vortex ring, and the action upon each other of two vortices in a perfect fluid. Phil. Trans. CLXXIII. 493-521.

Die in der Arbeit behandelten Fragen sind folgende: 1) Wenn der Querschnitt eines Wirbelrings klein ist gegen seine Oeffnung, so werden die Schwingungen untersucht, welche die innere Axe (d. i. die Verbindungslinie der Mitten der Querschnitte) ausführen kann, falls dieselbe stets nur wenig von der Kreisform abweicht. 2) Es wird nach der Wirkung gefragt, welche zwei derartige Wirbelringe scheinbar auf einander ausüben, die sich so bewegen, dass sie stets um ein grosses Vielfaches ihres Durchmessers von einander entfernt bleiben. Die Flüssigkeit, in der sich die Ringe befinden, ist dabei als incompressibel und reibungslos angenommen. Die rein kinematische Methode, nach der beide Fragen behandelt werden, beruht auf dem Satze, dass, wenn $\Gamma(x, y, z, t) = 0$ die Gleichung einer Fläche ist, welche immer dieselben Flüssigkeitsteilchen enthält, auch

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + v\frac{\partial \Gamma}{\partial y} + w\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0$$

ist; dabei sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten, die Differentialquotienten aber partielle. Da die Oberfläche eines Wirbelrings stets aus denselben Teilchen bestehen muss, so ist (A) auch die Bedingung dafür, dass $\Gamma(x,y,z,t) = 0$ die Gleichung der Oberfläche eines Wirbelrings ist. Diese Bedingung in Verbindung mit den bekannten Ausdrücken für die Rotationsgeschwindigkeit eines Teilchens genügt, wie der Verfasser zeigt, zur vollständigen Absolvirung der oben genannten Fragen. Dieselben bilden nur ein Beispiel aus einer grossen Zahl von Problemen der Wirbelbewegung, die alle einer rein kinematischen Lösung fähig sind: so würde u. A. eine rein kinematische Gastheorie (die Gasmolecüle als Wirbel gedacht) sich aufstellen lassen, falls man nur die gegenseitigen Wirkungen der Gasmolecüle, nicht aber ihre Wirkungen auf das das Gas enthaltende Gefäss in Betracht zieht. Auch das Problem der Gastheorie, die Bewegung zweier Molecüle nach ihrem Zusammenstoss zu finden,

muss sich durch rein kinematische Betrachtungen lösen lassen, also viel einfacher, als in der gewöhnlichen Gastheorie, wo das Problem des Zusammenstosses ziemlich complicirte dynamische Betrachtungen erfordert. Solche Folgerungen lassen erkennen, dass die Wirbeltheorie einen viel fundamentaleren Charakter hat, als die gewöhnliche Gastheorie, nach der die Atome aus kleinen Stücken fester Materien bestehen.

Cly. (Wn.).

A. G. Greenhill. On the rotation of a liquid ellipsoid about an axis, not a principal axis, but lying in a principal plane. Cambr., Proc. IV. 208-222.

In einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 719) hatte der Verfasser behauptet, es schiene nicht möglich zu sein, dass ein flüssiges Ellipsoid um eine andere Axe, als eine Hauptaxe rotire und dabei eine freie Oberfläche habe. Inzwischen wurde er mit der Riemann'schen Arbeit über die Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids (Göttinger Abhandl. 1861; Riemann, gesammelte Werke, p. 168) bekannt, in der gezeigt ist, dass man eine mögliche Form des Gleichgewichts erhält, falls die Rotationsaxe in einer der Hauptebenen des Ellipsoids liegt. In der vorliegenden Arbeit nun behandelt der Verfasser die obige Frage von Neuem, wobei er den umgekehrten Weg einschlägt wie Lejeune-Dirichlet und Riemann. Die genannten Autoren nehmen von vorne herein die Existenz von Flächen gleichen Druckes an, die der Ellipsoidfläche ähnlich sind, und sie bestimmen dann diejenige Bewegung der Flüssigkeit, welche mit der Existenz jener Flächen gleichen Druckes verträglich ist. Umgekehrt geht Herr Greenhill hier davon aus, dass der Flüssigkeit auf irgend eine Weise eine gewisse Bewegung erteilt ist, und untersucht dann den in einem Punkte stattfindenden Druck für den Fall, dass die Flüssigkeit von starren Wänden eingeschlossen ist. Daran schliesst sich die Erörterung der Bedingungen, die nötig sind, damit an der Oberfläche einer ellipsoidisch

begrenzten Flüssigkeitsmasse der Druck constant, und daher eine freie Oberfläche dieser Form möglich sei.

Glr. (Wn.).

H. Lamb. On the forces experienced by a solid moving in an infinite mass of liquid. Quart. J. XIX. 66-70.

Die Gleichungen, von denen die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit abhängt, sind von Thomson und Kirchhoff so abgeleitet, dass der Körper und die Flüssigkeit als ein dynamisches System betrachtet werden. Die eigentlichen hydrodynamischen Gleichungen kommen bei dieser Ableitung, die nur das Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials voraussetzt, gar nicht in Betracht. Aus den Thomson-Kirchhoff'schen Gleichungen ergeben sich nun, wenn man dieselben mit den Gleichungen für die Bewegung eines freien Körpers vergleicht, die auf den bewegten Körper von der umgebenden Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte. Dieselben sind äquivalent einer Einzelkraft, deren eine Componente

$$(1)\qquad X = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) + r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w}$$

ist, und einem Kräftepaar, dessen Moment die Componenten hat:

$$(2)\qquad L = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + W\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r},$$

und zwei andere analoge. Darin sind u, v, w die linearen, p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers, bezogen auf ein im Körper festes Axensystem, während T die lebendige Kraft der Flüssigkeit darstellt. In dem vorliegenden Aufsatze handelt es sich nun darum, diese Kräfte, statt auf dem oben angegebenen indirecten Wege, direct aus den hydrodynamischen Gleichungen abzuleiten. Dies geschieht unter Benutzung mehrerer Hülfsformeln, die sich auf ähnlichem Wege ergeben, wie der Green'sche Satz.

Wn.

A. Schülke. Die Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressiblen Flüssigkeit. Hoppe Arch. LXVIII. 113-150.

Der Verfasser knüpft an die bekannte Arbeit von Kirchhoff über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, auf die keine Kräfte wirken, an (cfr. F. d. M. II. 1870. 731; Kirchhoff, Mechanik p. 233-247). Herr Kirchhoff hatte die Lösung in zwei speciellen Fällen zu Ende geführt, während er im allgemeinen Falle die Rechnung nur bis zur Aufstellung der elliptischen Integrale, von denen das Problem abhängt, durchgeführt hatte. Der allgemeine Fall war dann weiter behandelt durch Köpcke (cf. F. d. M. IX. 1877. 670), der alle in der Kirchhoff'schen Lösung vorkommenden Grössen durch Thetafunctionen ausdrückte. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst dieselbe Reduction auf Thetafunctionen auf etwas einfacherem Wege vorgenommen. Die Vereinfachung gelingt durch kleine Umformungen der Kirchhoff'schen Formeln, sowie durch passende Verfügung über die Integrationsconstanten, resp. über die Anfangslage der Axensysteme. Endlich wird gezeigt, wie man, auch ohne die elliptischen Functionen zu benutzen, durch Discussion der transformirten Kirchhoff'schen Formeln ein deutliches Bild des Bewegungsvorgangs gewinnen kann. Namentlich lässt sich die Gestalt der Curve bestimmen, welche die Projection des Anfangspunktes des im Körper festen Axensystems auf eine Ebene senkrecht zur Rotationsaxe beschreibt; und daraus ergiebt sich die Schraubenbewegung jenes Anfangspunktes, sowie die Richtung der Rotationsaxe. Wn.

De St.-Venant. Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. C. R. XCIV. 904-909, 1004-1008, 1139-1144.

Der vorliegende Aufsatz knüpft an eine im Jahre 1870 veröffentlichte Arbeit von Boussinesq an (cf. F. d. M. II. 1870. 738-741), in der gezeigt war, dass der Bewegungszustand einer durch

eine Oeffnung in dünner Wand ausfliessenden Flüssigkeit bestimmt ist durch das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,.$$

Dabei ist x, y, z der Punkt, auf den sich das Geschwindigkeitspotential bezieht, die Ebene der Oeffnung ist $\xi = 0$, und $F(\xi,\eta)$ verschwindet für alle Punkte ausserhalb der Oeffnung. Den obigen Ausdruck kann man auffassen als das Potential der Newton'schen Attraction, welche auf die im Punkte x, y, z befindliche Masseneinheit der Flüssigkeit ausgeübt wird durch eine dünne materielle, über die Fläche der Oeffnung ausgebreitete Schicht. Für Punkte in grösserer Entfernung von der Oeffnung kann man nun, wenn die Oeffnung klein ist, näherungsweise die Anziehung der Schicht ersetzen durch die ihres Schwerpunktes. Bei dieser Näherung ist daher die Geschwindigkeit jedes Punktes der Flüssigkeit umgekehrt proportional dem Quadrat seines Abstandes von der Mitte der Oeffnung und nach dieser Mitte hingerichtet. Diese Bemerkung führt unmittelbar zu einer graphischen Construction der Curven, in welche sich eine ursprünglich der Ebene der Oeffnung parallele Gerade allmälich deformirt. Man braucht nur um die Mitte der Oeffnung eine Halbkugel, die die Fläche der Oeffnung zur Basis hat, zu beschreiben, das Volumen derselben durch concentrische Kugeln in gleiche Teile zu teilen und zu beachten, dass jedes Teilchen auf demselben Kugelradius bleibt und in jedem Zeitintervall von einer Kugelfläche bis zur nächsten gelangt. Im Anschluss an die graphische Construction wird auch die Gleichung jener Curve aufgestellt und discutirt. Diese Betrachtungen, welche die Bewegung der Flüssigkeit in sehr weiten Gefässen, und zwar nur in Punkten, die von den Wänden entfernt sind, angenähert ergeben, lassen sich auch auf den Fall ausdehnen, dass die Flüssigkeit seitlich durch Wände begrenzt ist, welche auf der Ebene der Oeffnung senkrecht stehen und dieser Oeffnung nahe liegen. Man hat dann nur die Grundfläche unbegrenzt zu nehmen und zu der einen wirklich vorhandenen Oeffnung andere hinzuzufügen. Letztere müssen

eine derartige Lage haben, dass, wenn man alle Oeffnungen als anziehende Centra betrachtet, die zu den ursprünglich vorhandenen Wänden senkrechten Anziehungscomponenten verschwinden. Somit sind die obigen Betrachtungen nur dahin zu modificiren, dass an Stelle eines anziehenden Centrums deren unendlich viele treten. Für die Praxis genügt es, nur einige dieser Centra, die der ursprünglichen Oeffnung zunächst liegen, in's Auge zu fassen.

Wn.

J. Boussinesq. Intégration de certaines équations aux dérivées partielles, par le moyen d'intégrales définies contenant sous le signe $\int$ le produit de deux fonctions arbitraires. C. R. XCIV. 33-36.

J. Boussinesq. Équations différentielles du mouvement des ondes produites à la surface d'un liquide par l'émersion d'un solide. C. R. XCIV. 71-74.

J. Boussinesq. Sur les ondes que fait naître, dans l'eau en repos d'un canal, l'émersion d'un cylindre solide, plongé en travers dans ce canal. C. R. XCIV. 127-130.

J. Boussinesq. Sur les ondes produites par l'émersion d'un solide à la surface d'une eau tranquille, quand il y a lieu de tenir compte de deux coordonnées horizontales. C. R. XCIV. 1505-1508.

Das bestimmte Integral

$$(1) \qquad \varphi = \int_0 f\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$$

$$= \int_0^{\infty} f\left(x \mp \frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha$$

genügt der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial t^{2n}} + A \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = 0,$$

falls $\psi(z)$ ein Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(\mp 1)^n \psi^{(n)}(z) + A\psi(z) = 0$$

ist, während f eine willkürliche Function ist. Das Resultat wird zunächst auf zwei bekannte Probleme angewandt, nämlich auf die Ermittelung des Wärmezustandes eines unendlich langen Stabes, der an seinem einen, im Endlichen liegenden Ende erwärmt wird, sowie auf die Bestimmung der in einem solchen Stabe sich fortpflanzenden transversalen Wellen.

Die Hauptanwendung bezieht sich auf solche Wellenbewegungen einer schweren Flüssigkeit, wie sie durch das plötzliche Herausziehen eines vorher in die Flüssigkeit getauchten Körpers entstehen. Die Wellenbewegungen einer schweren Flüssigkeit hängen bekanntlich von folgenden Gleichungen ab, in denen φ das Geschwindigkeitspotential bezeichnet, während die Ebene $z = 0$ mit der ursprünglichen Oberfläche der Flüssigkeit zusammenfällt, und die positive x-Axe die Richtung der Schwere hat:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \tau = g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \text{ für } z = 0,$$

wozu noch eine Bedingungsgleichung für etwaige feste Grenzwände kommt. Für die hier in Rede stehende Bewegung wird nun die Annahme gemacht, dass

$$\text{für } t = \infty \text{ und für } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \infty$$

die sämmtlichen Geschwindigkeitscomponenten verschwinden. Dann ergiebt sich, dass der oben mit τ bezeichnete Ausdruck nicht nur für $z = 0$, sondern überall im Innern der Flüssigkeit verschwindet. An Stelle dieser Gleichung setzt der Verfasser weiter die folgende, welche auf dasselbe hinauskommt:

$$g\frac{\partial\tau}{\partial z} + \frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} = 0 \text{ und } \tau = 0 \text{ für } t = 0.$$

Wählt man jetzt noch die Zeiteinheit so, dass $g = 1$ wird, und nimmt φ von y unabhängig an, so sind die Gleichungen, von denen das Problem abhängt, folgende:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \text{ für } t = 0, \quad \varphi = 0 \text{ für } r = \infty \text{ oder } t = \infty,$$

wozu noch zwei Anfangsbedingungen kommen. Ist im Anfang nur eine Verrückung, aber keine Geschwindigkeit vorhanden, ist also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ für } t = 0,$$

so wird die Lösung folgende:

$$\varphi = \int_0^\infty \left[f\left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z\right) + f\left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z\right)\right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

wo

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - m^2) dm,$$

ferner

$$f(x,z) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x + z\eta) d\eta}{1 + \eta^2}$$

ist. Hierin stellt $F(x)$ die anfängliche Verrückung der Oberfläche, d. h. den Wert von $-\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ für $t = 0$, $z = 0$ dar. Die Wellenhöhe in einem beliebigen Punkte der Oberfläche zur Zeit t wird

$$h = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \left[F\left(x - \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) + F\left(x + \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\right] \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

eine Formel, die für grosse Werte von x in eine von Cauchy auf viel umständlicherem Wege abgeleitete Formel übergeht (Savants étrangers I. 186). Nachdem diese Formel eine einfache Deutung erfahren, sodann kurz angedeutet ist, wie sich die Resultate gestalten, wenn im Anfang nur Geschwindigkeiten, aber keine Verrückungen vorhanden sind, zeigt der Verfasser zum Schluss, dass sich die obige Lösung auch auf den Fall ausdehnen lässt, wo φ ausserdem noch von der Coordinate y abhängt. In Bezug auf die für diesen allgemeineren Fall abgeleiteten Resultate müssen wir auf die Arbeit selbst verweisen.

Wn.

A. G. Greenhill. On the flow of viscous liquid in a pipe or channel. Lond., M. S. Proc. XIII. 43-46.

Das Problem der Bewegung einer schweren, reibenden Flüssigkeit in einer Röhre hängt von genau denselben Gleichungen ab, wie das der Bewegung einer reibungslosen Flüssigkeit in einem Cylinder, dessen Querschnitt dem der Röhre gleich ist, falls der Cylinder um eine zu seinen Erzeugenden parallele Axe rotirt. Die Gleichungen sind in beiden Fällen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+M=0,$$

während an der Grenzfläche $u=0$ ist. Dabei ist u für das erste Problem die Geschwindigkeitscomponente parallel der Röhrenaxe x, M eine von der Druckdifferenz, der Röhrenlänge, der Dichtigkeit und dem Reibungscoefficienten abhängige Constante, während für das zweite Problem u gleich der Strömungsfunction vermindert um $\frac{1}{4}M(y^2+z^2)$ ist, unter $\frac{1}{2}M$ die Rotationsgeschwindigkeit des Cylinders verstanden. Diese Gleichungen werden nun angewandt auf die Fälle, wo der Querschnitt der Röhre ein Kreis, eine Ellipse, ein gleichseitiges Dreieck, ein Kreisausschnitt, ein Rechteck, endlich von zwei Hyperbeln begrenzt ist. Zum Schluss wird für das erste Problem die Ausflussmenge berechnet.

Der Verfasser bemerkt selbst, dass fast alle von ihm abgeleiteten Resultate schon von Graetz gefunden seien (cf. F. d. M. XII. 1880. 704-707), der aber nur das erste der beiden oben genannten Probleme behandelt hat, auf das Problem in der zweiten Fassung dagegen nicht eingegangen ist. Wn.

M. Margules. Ueber die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit. Wien. Ber. LXXXIII. 588-606. (1881).

M. Margules. Die Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder. Wien. Ber. LXXXV. 343-368.

Es handelt sich in beiden Aufsätzen um die Bestimmung

einer ebenen Bewegung einer incompressiblen reibenden Flüssigkeit unter den folgenden Bedingungen. Die Flüssigkeit ist von zwei coaxialen Cylindern begrenzt, die um ihre Axe gegebene einfache Schwingungen mit abnehmender Amplitude ausführen, und zwar haftet die Flüssigkeit an den Cylinderwänden. In allen zur Cylinderaxe senkrechten Ebenen sind ferner die Bewegungen congruent; auch sind dieselben allein vom Abstand ϱ von der Cylinderaxe abhängig. Aeussere Kräfte wirken auf die Flüssigkeit nicht. Die Geschwindigkeitscomponenten der ebenen Bewegung sind dann

$$u = -\varphi\cdot\frac{y}{\varrho},\quad v = \varphi\cdot\frac{x}{\varrho}.$$

Für die Function φ folgt aus den hydrodynamischen Gleichungen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}-\frac{\varphi}{\varrho^2}-\frac{1}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

worin k der Coefficient der inneren Reibung ist. Diese Gleichung wird auf bekannte Art mit Hülfe der Bessel'schen Functionen von der Ordnung 1 integrirt, und zwar kommt hier nur die Summe zweier particulärer Integrale in Frage von der Form

$$\varphi = e^{-\alpha kt}\{CJ_1(\varrho\sqrt{\alpha})+DY_1(\varrho\sqrt{\alpha})\}.$$

Dieser Ausdruck, in dem die Constanten C, D, α complexe Grössen sind, wird, unter Benutzung der bekannten Reihen für die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art, in einen reellen und einen imaginären Teil zerlegt und dadurch gezeigt, dass die willkürlichen Constanten aus den Grenzbedingungen bestimmt werden können. Sodann wendet der Verfasser die allgemeinen Formeln zur numerischen Berechnung und Discussion folgender specieller Fälle an: 1) Der innere der beiden coaxialen Cylinder fällt fort, der äussere bewegt sich a) mit constanter Amplitude, b) so, dass das logarithmische Decrement der Amplitude $= 2\pi$ ist. 2) Der äussere Cylinder ruht, nur der innere bewegt sich. 3) Beide Cylinder sind starr verbunden. Zum Schluss zeigt der Verfasser, wie man auch die semiconvergenten Reihen der Bessel'schen Functionen für das obige Problem benutzen kann. Dadurch lässt sich allgemein beweisen, was vorher nur

an Beispielen hervortrat, dass sich die Wellenlängen einfacher Schwingungen mit wachsendem Radius festen Grenzen nähern, und dass die Grenze mit wachsendem Decrement der Amplitude abnimmt.

Dies der Inhalt der zweiten Arbeit. Die erste behandelt nach derselben Methode die Flüssigkeitsbewegung innerhalb eines Cylinders und zeigt zugleich, dass keine wesentliche Aenderung der Schlussformeln eintritt, wenn die Flüssigkeit an der festen Wand gleitet, statt dort fest zu haften. Ferner wird hier die stationäre Bewegung der Flüssigkeit behandelt, die entsteht, wenn der äussere Cylinder ruht, der innere mit constanter Winkelgeschwindigkeit um die gemeinsame Axe rotirt. Wn.

M. Margules. Ueber die Bewegung zäher Flüssigkeiten und über Bewegungsfiguren. Wien. Ber. LXXXIV. 1881.

Der Verfasser entwickelt aus den hydrodynamischen Gleichungen für reibende incompressible Flüssigkeiten einige allgemeine Sätze, die sich auf stationäre Bewegungen beziehen, und von denen die folgenden hier Platz finden mögen: 1) In einem ruhenden geschlossenen Gefässe kann (bei eindeutigem Kräftepotential) keine stationäre Bewegung der Flüssigkeit stattfinden. 2) Die Summe der auf irgend eine Axe bezogenen Drehungsmomente, welche auf die stationär bewegte Flüssigkeit in einer geschlossenen Stromfläche (d. i. einer solchen, in welcher die Geschwindigkeit normal zur Fläche überall null ist) ausgeübt werden von den äusseren Kräften und den gesammten Druckkräften, ist null. Ausserdem wird für eine beliebige Bewegung einer reibenden Flüssigkeit ein Ausdruck für denjenigen Teil der lebendigen Kraft entwickelt, welcher durch die Reibung in eine andere Form der Energie verwandelt wird. Wn.

L. Grossmann. Ueber die Bestimmung der inneren Reibungsconstanten von Gasen und Flüssigkeiten mittels schwingender Scheiben. Wiedemann Ann. XVI 619-633.

Auszug aus des Verfassers Inaugural-Dissertation (Breslau 1880), eine wesentlich experimentelle Arbeit. Der Verfasser zeigt, dass die Formeln, welche O. E. Meyer für die Coulomb'-sche Methode entwickelt hat, und die, welche Maxwell gegeben hat, zu grosse Werte liefern müssen. Ausserdem stellt er Formeln auf, die sicher untere Grenzen geben. Diese Grenzen liegen den wahren Werten ziemlich nahe. „Die einfachste Methode, die von Coulomb, soll dadurch wieder zu Ehren gebracht werden, indem sie den wahren Wert der inneren Reibungsconstante ziemlich genau (vielleicht mittels eines Reductionsfactors ganz genau) berechnen lässt; einen bei Weitem sichereren Aufschluss über diese Grösse wird aber die Methode von Maxwell geben, indem die Grenzen hier viel enger zu ziehen sind. Dagegen muss es bei der Methode der Transpiration vorläufig unentschieden bleiben, ob die gefundenen Zahlenresultate zu gross oder zu klein ausfallen." Rs.

Th. S. Schmidt. Theoretische und experimentelle Untersuchungen über innere Reibung von Flüssigkeiten. Diss. Breslau. Köhler.

Th. S. Schmidt. Bestimmung der Reibung von Flüssigkeiten nach der Methode von Maxwell. Wiedemann Ann. XVI. 633-660.

Die zweite Arbeit ist im Wesentlichen ein Abdruck der ersten. Der Verfasser hat die Arbeit des Herrn L. Grossmann fortgesetzt. O. E. Meyer liess die Methode, welche Maxwell zur Bestimmung der Reibung in Gasen angegeben hatte, auf Flüssigkeiten anwenden. Der Boden des Gefässes, in welchem die Flüssigkeit enthalten ist, bildet die feste Scheibe. Der Gefässboden und die bewegliche Scheibe werden parallel und horizontal vorausgesetzt. Der Draht, an welchem die Scheibe hängt, soll Axe der Scheibe und des Gefässes sein. Die Scheibe berührt die Oberfläche der Flüssigkeit. Die Temperatur der Flüssigkeit soll während des Versuches constant sein, was bei des Verfassers Experimenten nicht erfüllt

war. Der Apparat muss gestatten, die Entfernung von Scheibe und Gefässboden bequem und scharf zu messen. Alle der Scheibenfläche und dem Gefässboden parallele Flüssigkeitsschichten bewegen sich wie compacte Scheiben. Unter diesen Bedingungen führt der Verfasser analoge Rechnungen für die Maxwell'sche Methode durch, wie O. E. Meyer für die Coulomb'sche Methode gegeben hat. Bei der Untersuchung, wie sich das logarithmische Decrement mit der Entfernung der Scheibe vom Gefässboden ändert, ergiebt sich, dass l mit wachsender Entfernung nicht fortwährend abnimmt, sondern abwechselnd Maxima und Minima besitzt, „welche aber bei einigermassen bedeutenden Entfernungen in einander übergehen." Mittels der Maxwell'schen Methode kann man nicht allein die Reibung der Flüssigkeiten, sondern auch den Einfluss der Oberfläche von Flüssigkeiten bestimmen; denn die Methode gestattet, „denjenigen Teil des logarithmischen Decrementes zu berechnen, welcher allein von dem Einflusse der Oberfläche herrührt, und setzt uns also in ausgezeichneter Weise in den Stand, für verschiedene Flüssigkeiten die an der Oberfläche stattfindenden Verhältnisse zu studiren. In die Theorie selbst konnte freilich der Einfluss der Oberfläche nicht aufgenommen werden, schon aus dem Grunde nicht, weil die Abhängigkeit der Bewegung der Flüssigkeitsringe vom Radius nicht näher untersucht wurde." Rs.

G. J. Michaelis. Over bewegingen van vloeistoffen onder den invloed der wrijving. Nieuw Arch. VIII. 57-74; Arch. Néerl. XVII. 1-22.

Wie aus dem Titel ersichtlich, behandelt diese Arbeit die Bewegungen von Flüssigkeiten unter dem Einfluss der Reibung. Der Verfasser schliesst sich den Untersuchungen von Helmholtz, Thomson, Bobylew, Bresse, Boussinesq über die Wirbelbewegungen an. Zuerst werden die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung unter Berücksichtigung der inneren Reibung aufgestellt und daraus gezeigt, wie Wirbelbewegungen durch die Aenderung der Dichtigkeit entstehen, wenn hierbei der Einfluss der Reibung

um so grösser ist, je kleiner die Dichtigkeit ist. Auch wird daraus die Verminderung berechnet, welche die lebendige Kraft der Wirbelbewegungen durch eine Reibung erfährt.

Weiter wird angenommen, dass die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist und sich bis in das Unendliche an der einen Seite einer ebenen Fläche erstreckt. Ohne Reibung bleibt die Wirbelbewegung in der Grenzebene, mit Reibung pflanzt sie sich durch die ganze Flüssigkeit fort; die Geschwindigkeit dieser Fortpflanzung wird berechnet und die Uebereinstimmung mit den Untersuchungen von Zöppritz (Wiedemann Ann. III. 596, s. F. d. M. X. 1878. p. 649) gezeigt. Darauf kommt der Verfasser auf die bekannte Frage nach der Bewegung eines Umdrehungsellipsoids in einer Flüssigkeit, doch jetzt mit Berücksichtigung der Reibung und unter der Voraussetzung, dass alle Bewegungen sehr klein und stationär sind. Geht das Ellipsoid in eine Kugel über, so wird die Berechnung der Widerstände und Strombahnen sehr einfach. Ist aber die Bewegung nicht stationär, so gelangt man beim Ellipsoid auf eine sehr complicirte Differentialgleichung. Unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeiten endliche Werte haben, ist die Auflösung mit Berücksichtigung der Reibung untunlich. G.

H. Lamb. On the oscillations of a viscous spheroid. Lond., M. S. Proc. XIII. 51-66.

Die hydrodynamischen Gleichungen für incompressible reibende Flüssigkeiten werden hier angewendet zur Bestimmung der kleinen Schwingungen, welche eine nahezu kugelförmige Flüssigkeitsmasse vollführen kann, falls auf dieselben keine andern Kräfte wirken, als die gegenseitige Anziehung der einzelnen Teile. Ist v das Potential dieser Anziehung, p der Druck, ϱ die Dichtigkeit, μ der Reibungscoefficient, und setzt man

$$\varpi = \frac{p}{\varrho} - v,$$

nimmt ferner an, dass ϖ sowohl, als die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w von der Form sind $e^{-\alpha t}$ multiplicirt mit einem von

t unabhängigen Factor, so wird

$$\nabla^2 \varpi = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2} = 0,$$

so dass ϖ unmittelbar in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Jede der Geschwindigkeitscomponenten nimmt die Form an

$$u = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial x} + (u_1 + u_2) e^{-\alpha t},$$

wobei u_1 sowohl als u_2 der Gleichung genügen:

$$\text{(A)} \qquad \nabla^2 u + \frac{\alpha \varrho}{\mu} u = 0.$$

Berücksichtigt man bei der Lösung der Gleichung (A), zu der noch zwei analoge Gleichungen für die beiden andern Componenten hinzukommen, die Continuitätsgleichung, so ergeben sich, wie durch eine längere Entwickelung begründet wird, die beiden Lösungen:

$$u_1 = \sum_n \psi_n \left\{ y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right\},$$

$$u_2 = \sum_n \left\{ \psi_{n-1} \frac{\partial \frac{r^n T_n}{a^n}}{\partial x} - \frac{n}{n+1} (\psi_n - \psi_{n-1}) \frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \frac{\partial \left(\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} T_n \right)}{\partial x} \right\}.$$

Darin ist χ_n eine räumliche harmonische Kugelfunction, T_n eine Kugelflächenfunction n^{ter} Ordnung, während ψ_n eine Bessel'sche Function mit dem Index $n + \frac{1}{2}$ ist; nach der bei uns üblichen Bezeichnung wird

$$\psi_n = \frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}} J_{n+\frac{1}{2}} \left(r \sqrt{\frac{\alpha \varrho}{\mu}} \right);$$

ferner ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und a der mittlere Radius der nahezu kugelförmigen Masse. Die obigen Summen sind über alle ganzen Zahlen n auszudehnen.

Die Lösung von der Form u_1 stellt nicht-radiale Schwingungen dar. Die Bestimmung der Grösse α mit Hülfe der Oberflächenbedingungen (diese sind dadurch gegeben, dass auf die

Oberfläche, deren Gleichung $r = a + \Sigma S_n$ ist, wobei S_n wieder eine Kugelflächenfunction darstellt, ein constanter Druck in der Richtung des Kugelradius ausgeübt wird) ergiebt sich dann aus einer bekannten transcendenten Gleichung. Schwieriger wird die Bestimmung von α für die Lösung von der Form u_2. Die hier auftretende transcendente Gleichung kann nur für den Fall, dass die Reibung sehr gross oder sehr klein ist, annähernd gelöst werden. Die sich ergebenden Näherungswerte stimmen im ersten Fall mit den von Darwin, im zweiten mit den von Thomson gefundenen Resultaten überein. Einige Bemerkungen über die Dauer der Periode der untersuchten Schwingungen, sowie über die dabei auftretenden Wirbelbewegungen, endlich eine Verification der durch Reihenentwickelung abgeleiteten Resultate mit Hülfe der Zerstreuungs-Function (dissipation function) bilden den Schluss der Arbeit. Die obigen Entwickelungen finden, wie der Verfasser bemerkt, auch auf andere Probleme eine Anwendung, z. B. auf die Schwingungen einer Flüssigkeitskugel, falls nur die Oberflächenspannung wirkt. Wn.

A. Oberbeck. Ueber die Bewegungen der Luft an der Erdoberfläche. Wiedemann Ann. (2) XVII. 128-148.

Die vorliegende Arbeit geht von derselben Annahme aus, die schon Guldberg und Mohn (cf. F. d. M. VIII. 1876. 617, XII. 1880. 709) ihren Untersuchungen zu Grunde gelegt haben. Dieselben bestehen darin, dass man die Luft als eine incompressible Flüssigkeit ansieht, während von äusseren Kräften nur ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand wirkt. Das in Betracht kommende Stück der rotirenden Erdoberfläche wird dabei als eben, für die geographische Breite wird ein Mittelwert angenommen. Die Betrachtung wird auf horizontale Strömungen beschränkt; es wird daher die verticale Geschwindigkeitscomponente w für einen Teil des in Betracht kommenden Gebiets gleich Null gesetzt, während für einen andern Teil $w = cz$ (c constant) angenommen wird. Für die horizontalen Geschwindigkeitscomponenten u, v gelten nun die allgemeinen hydrodynamischen

Gleichungen (ohne Reibung), nachdem darin der oben genannte Widerstand und der Einfluss der Erdrotation an Stelle der äusseren Kräfte eingeführt ist. Aus diesen Gleichungen werden zunächst durch einfache Umformungen einige Folgerungen gezogen, während die Hauptanwendungen derselben die stationäre Bewegung der Luft $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$ betreffen. Den Gleichungen der stationären Bewegungen kann man, wie bekannt, genügen, wenn man

$$(1) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y}$$

setzt. Betrachtet man zunächst das Gebiet reiner Horizontalbewegung ($w = 0$), so ist dort

$$(2) \qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Für φ nimmt der Verfasser nun die allgemeine Lösung der letztgenannten Gleichung, während von der entsprechenden Gleichung für W nur ein particuläres Integral

$$(3) \qquad W = -\frac{\lambda}{k}\varphi$$

in Betracht gezogen wird. Dabei ist $\lambda = 2\sigma \sin\beta$, σ die Winkelgeschwindigkeit der Erde, β die geographische Breite, k der constante Factor im Ausdruck für den Widerstand. Für dasjenige Gebiet, über dem ein verticaler Luftstrom aufsteigt, wo also $w = cz$, daher $\Delta\varphi = -c$ ist, lässt sich eine der obigen particulären Lösung analoge für W aufstellen, nämlich

$$(3a) \qquad W = -\frac{\lambda}{k-c}\varphi.$$

Wendet man indessen diese particuläre Lösung auf die Grenze beider Gebiete an (was für den Fall, wo die Grenze beider Gebiete ein Kreis ist, schon von Mohn und Guldberg gemacht ist), so ergiebt sich, dass dort die Geschwindigkeit sowohl nach Grösse als Richtung plötzliche Veränderungen von endlicher Grösse erleidet. Diese unzulässige Folgerung zeigt, dass die gefundene particuläre Lösung (3a) für W nicht ausreicht zur

Lösung des gestellten Problems. Die weitere Behandlung indessen wird nicht mehr allgemein durchgeführt, sondern nur unter der Annahme, dass das Gebiet $w = cz$ das Innere eines Kreises vom Radius R einnimmt, während das Gebiet $w = 0$ ausserhalb dieses Kreises liegt; ferner wird φ und W als nur vom Abstand r vom Mittelpunkte abhängig angenommen. Die partiellen Differentialgleichungen für φ und W gehen dann in gewöhnliche Differentialgleichungen über, die sich unmittelbar integriren lassen, und durch passende Wahl der Integrationsconstanten lässt sich den Continuitätsbedingungen genügen. Die so gefundene particuläre Lösung ist jedoch den Beschränkungen $k > c$ und $c > 0$ unterworfen. Nachdem die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und den Druck weiter discutirt sind, schliesst der Verfasser mit einer Anwendung seiner Formeln auf ein Zahlenbeispiel. Den Fall eines absteigenden Luftstroms (c negativ) hat der Verfasser nicht erledigt. Eine Bemerkung über die dabei sich darbietende Schwierigkeit trifft nach des Referenten Ansicht nicht das Wesen der Sache. Der Grund liegt vielmehr darin, dass in diesem Falle das particuläre Integral (3) für das äussere Gebiet nicht mehr ausreicht. Wn.

Sprung. Zur Theorie atmosphärischer Wirbel. Hamb. Mitt. No 2; 27-31.

Im ersten Teile wird die Beschleunigung der relativen Bewegung eines schweren Punktes auf der rotirenden Erdoberfläche bestimmt. Die Ableitung des bekannten Ausdrucks für diese Beschleunigung ist weder besonders elegant, noch streng. Mit Hülfe des gefundenen Ausdrucks werden dann die Differentialgleichungen für die Bewegung eines schweren Punktes auf der Erdoberfläche aufgestellt, auf den eine Centralkraft wirkt, während derselbe zugleich einen Reibungswiderstand proportional der Geschwindigkeit erleidet. Diese Gleichungen werden unter der Voraussetzung, dass die geographische Breite constant ist, auf Polarcoordinaten transformirt und der dadurch gewonnene Ausdruck für die Grösse der Centralkraft discutirt. Wn.

G. Schmidt. Analogien zwischen elektrischen und Wasserströmen, calorischer und elektrischer Kraftübertragung. Wien Ber. LXXXVI. 194-205; Wien. Anz. 1882. 136-137.

Als Analogon eines elektrischen Generators betrachtet der Verfasser ein Gefäss, dem in 1^s M_0 kg. Wasser zufliessen, und an das sich ein verticales cylindrisches, in horizontaler Richtung sich umbiegendes Rohr schliesst von dem Querschnitt f und solcher Gesammtlänge l, dass in Folge des dadurch hervorgerufenen Widerstandes die Ausflussmenge gleich der Zuflussmenge ist. Die Höhe H vom Wasserspiegel im Gefässe bis zum Schwerpunkte der Ausflussmündung ist die motorische Kraft des Elementes, die Ausflussmenge das Analogon der Stromstärke, und der Effect des Elementes ist $E = M_0 H$ mkg. in 1^s. Es ergiebt sich dann, dass der „Widerstand des Elementes" $r_0 = \frac{H}{M_0} = \frac{l}{kf}$ von demselben Typus ist wie der Widerstand eines elektrischen Stromes in einer Leitung von der Länge l, dem Querschnitte f und dem Leitungsvermögen k. Wird der horizontale Teil des Rohres um L mtr. verlängert, so fliesst eine kleinere Menge M in 1^s mit der constanten Geschwindigkeit u hindurch; ein Teil der motorischen Kraft wird durch den Widerstand des Elementes r, der andere z durch den Widerstand der Leitung λ verbraucht; es folgt: $\lambda = \frac{z}{M} = \frac{L}{kf}$, und $r = \frac{H-z}{M}$, also der Gesammtwiderstand $r + \lambda = \frac{H}{M}$, und die Stromstärke $J = \frac{H}{r+\lambda} = M$.

Für n über einander aufgestellte Elemente je von der motorischen Kraft H, bei denen nur das oberste Gefäss offen ist, wird die Stromstärke gefunden:

$$J = \frac{nH}{nr+\lambda} = M,$$

analog dem Ohm'schen Gesetze. Werden n Elemente über einander, und in jedem Niveau m Elemente neben einander verbunden, so erhält man für die Stromstärke den Wert

$$M = \frac{H}{\frac{r}{m} + \frac{\lambda}{n}},$$

welcher für einen bestimmten Wert von mn ein Maximum wird in dem Falle, dass der Widerstand der Leitung gleich dem der Kette ist.

Wenn durch eine Pumpe eine Wassermenge M kg. in 1^S auf die Höhe H mtr. gehoben und durch eine Röhrenleitung, deren Verlusthöhe z beträgt, dieselbe einem Wasserrade zugeführt wird, so bleibt von der erzeugten potentiellen Energie $E_a = MH$ der Teil $E_i = M(H-z) = Mh$ als der für das Rad verfügbare Effect übrig, und die durch den Röhrenwiderstand in 1^S verbrauchte und in Wärme umgesetzte Arbeit ist

$$E_w = Mz = M^2\lambda.$$

Diese Vorrichtung ist ein Analogon zu einem Elektromotor von der Stromstärke $J-i$, (λ der Gesammtwiderstand, $J\lambda = H$ die elektromotorische Kraft der Batterie, $i\lambda$ die des Elektromotors), für den der absolute Effect $E_a = (J-i)J\lambda$, der indirecte Effect $E_i = (J-i)i\lambda$, die in Wärme umgesetzte Arbeit

$$E_w = E_a - E_i = (J-i)^2 . \lambda$$

ist. Eine zweite Analogie erhält man, wenn man das Wasserrad ersetzt durch eine calorische Maschine, welche einen Carnot'schen Process zwischen den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 durchführt, wobei statt h die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$, statt M das Zeuner'sche Wärmegewicht $\frac{Q_1}{AT_1}$ zu setzen ist, und die indirecte Arbeit $E_i = \frac{Q_1}{AT_1}(T_1 - T_2)$ geliefert wird; wenn man ferner die Pumpe durch eine sogenannte calorische Pumpe, d. i. eine Maschine ersetzt, welche einen umgekehrten Carnot'schen Process zwischen den Temperaturen T_2 und T_3 ($> T_1$) ausführt, wobei die Arbeit $E_a = \frac{Q_3}{AT_3}(T_3 - T_2)$ erforderlich ist; die von der calorischen Pumpe abgeleitete Wärmemenge Q_3 geht auf dem Wege zur calorischen Maschine durch Ausstrahlung teilweise $(Q_3 - Q_1)$ verloren, so dass der verloren gegangene Wärmeeffect

$$E_w = \frac{Q_3-Q_1}{A} = \frac{Q_1}{AT_1}(T_3-T_1) = E_a-E_i$$

ist. Wenn also:

$$M = J-i = \frac{Q_1}{AT_1};\ H = J\lambda = T_3-T_2;$$

$$h = i\lambda = T_1-T_2 \text{ und } (H-h) = z = (J-i)\lambda = T_3-T_1$$

ist, so bestehen die Analogien:

$$E_a = MH = MJ\lambda \qquad = (J-i)J\lambda = \frac{Q_1}{AT_1}(T_3-T_2),$$

$$E_i = Mh = Mi\lambda \qquad = (J-i)\,i\lambda = \frac{Q_1}{AT_1}(T_1-T_2),$$

$$E_w = Mz = M(J-i)\lambda = (J-i)^2\lambda = M^2\lambda = \frac{Q_1}{AT_1}(T_3-T_1).$$

Aus der Vergleichung folgen (den Bestimmungen des Congresses gemäss) die Beziehungen:

1 Volt = Einheit der elektromotorischen Kraft = 10^6 mtr.,

1 Ampère = Einheit der Stromstärken = $\frac{10^{-6}}{g}$ kg. in 1^S,

1 Ohm = Einheit des Widerstandes für die Stromstärke von 1 kg. = $10^{12}.g$ mtr.

Sbt.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

E. Beltrami. Sul potenziale magnetico. Brioschi Ann. (2) X. 241-260.

Sir W. Thomson hat gezeigt, dass bei einem Magneten eine bestimmte, durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Gerade und ein eben solcher Punkt existirt, die er als Axe und Centrum des Magneten bezeichnet. (Vergl. Reprints of papers on electrostatics and magnetism, London 1872). Herr Beltrami gelangt nun,

indem er die Anziehung gleich einer beliebigen Function der Distanz setzt, zu dem Resultat, dass auch hier noch eine ausgezeichnete Gerade und ein ausgezeichneter Punkt oder Axe und Centrum existiren. Wählt man dann für das Anziehungsgesetz das Newton'sche, so stimmen die Definitionen der beiden Autoren für die Axe überein, für das Centrum dagegen nicht. Die Methode beruht darauf, dass das Potential zweier Systeme von Massenpunkten approximativ unter der Voraussetzung entwickelt wird, dass die Distanz beider Systeme sehr gross sei im Vergleiche mit ihren Dimensionen. An die ausführliche Discussion des so entstehenden Ausdruckes für das Potential schliesst sich die Vergleichung mit den Thomson'schen Ausdrücken. Den Schluss bildet eine Theorie der Trägheitsmomente von Massensystemen ohne Schwerpunkt. B.

TONELLI. Sopra la funzione potenziale in uno spazio di *n* dimensioni. Brioschi Ann. (2) X. 291-321.

Bezieht sich auf eine Arbeit von Beltrami, die 1869 in den Mem. di Bologna erschienen war. B.

F. ANGELITTI. Sull' attrazione secondo una potenza intera qualunqe della distanza. Batt. G. XX. 346-369.

Unter der Voraussetzung, dass die Anziehung einer ganzen positiven Potenz der Distanz umgekehrt proportional sei, werden folgende homogene Massenverteilungen behandelt:

1) Massen und angezogener Punkt in einer Ebene: unbegrenzte Gerade, Halbebene, Kreisbogen, Kreissector und Kreissegment (angezogener Punkt im Centrum), Parabelbogen, Ellipsenbogen.

2) Massen und angezogener Punkt nicht mehr in einer Ebene: unbegrenzte Ebene, Umdrehungsfläche und Umdrehungskörper (Punkt auf der Umdrehungsaxe). B.

J. Boussinesq. Sur un potentiel à quatre variables, qui rend presque intuitives l'intégration de l'équation du son et la démonstration de la formule de Poisson concernant le potentiel inverse à trois variables. C. R. XCIV. 1065-1069.

Um den Punkt (x, y, z) innerhalb oder ausserhalb eines Körpers wird mit beliebigem Radius r eine Kugel beschrieben; ist $d\sigma$ ein Element der Kugeloberfläche und ϱ die Dichtigkeit in $d\sigma$, so wird das über die ganze Kugel erstreckte Integral

$$\varphi = \int \frac{\varrho d\sigma}{r}$$

als das Potential mit vier Variablen bezeichnet. Dasselbe genügt der Bedingung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Verfasser giebt einige Andeutungen über den Nutzen, welchen man in der mathematischen Physik aus der Einführung von φ ziehen kann. B.

P. Opitz. Sätze über Anziehung. Göttingen. Vandenhoeck und Ruprecht.

E. J. Nanson. On the potential of a uniform spherical shell. Mess. (3) XII. 39-40.

Einfache Methode, das Potential einer sphärischen Scheibe zu bestimmen. Glr. (O.).

H. Résal. Sur la détermination du niveau potentiel de l'ellipsoide. Résal J. (3) VIII. 55-61.

De Saint-Germain. Extrait d'une lettre adressée à M. Résal. Résal J. (3) VIII. 297-299.

Unter Potential-Niveau ist der constante Potentialwert im Innern eines elektrisirten Leiters verstanden. Der erste Aufsatz leitet

auf directem Wege einen etwas schwerfälligen, und der weiteren Reduction nicht leicht zugänglichen Integral-Ausdruck für das Potential-Niveau eines dreiaxigen Ellipsoids ab, der für den Fall der Rotationsellipsoide ausgewertet wird, während der zweite Artikel zeigt, wie das Resultat sich unmittelbar in seiner einfachsten Gestalt aus dem bekannten Ausdrucke für das Potential eines homogenen Ellipsoids ergiebt. B.

St. Glaser. Ellipsoidische Flächenbelegungen, deren Wirkung auf innere Punkte der Richtung und Stärke nach constant ist. Hoppe Arch. LXVIII. 100-106.

Die Aufgabe wird behandelt, indem der Ausdruck für die Dichtigkeit der gesuchten Belegung direct aufgestellt und dann durch Rechnung die Eigenschaft verificirt wird, dass das innere Potential eine lineare Function der Coordinaten ist. B.

W. M. Hicks. On toroidal functions. Phil. Trans. CLXXI. 609-652.

Die Untersuchung wurde als Grundlage für gewisse andere in der Theorie der Wirbelbewegung betrachtet, mit specieller Berücksichtigung einer vom Verfasser in den Cambr. Phil. Soc. Proc. III. 276 aufgestellten Gravitationstheorie. Das Wort „Torus" wird als Name für „Ring" hier beschränkt auf solche, die durch Rotation eines Kreises entstehen, gebraucht. Unter „toroidal functions" sind Functionen zu verstehen, welche der Laplace'schen Gleichung genügen, und die geeignet sind, die für die Torus-Oberfläche gegebenen Bedingungen auszudrücken. Der erste Abschnitt behandelt die Theorie der Anwendung aequipotentialer Linien in der Ebene als orthogonaler Coordinaten in Problemen von drei Dimensionen, z. B. können die Linien bestehen aus dem durch zwei feste Punkte gehenden Kreissystem und dem dazu orthogonalen System. Durch Umdrehung um die Linie durch die zwei Punkte gewinnt man, wie bekannt, passende Functionen für Probleme, welche mit zwei Kugeln zusammenhängen; durch

Umdrehung um die Linie, welche die Entfernung zwischen den beiden Punkten rechtwinklig schneidet, bekommt man Functionen, die mit dem Torus zusammenhängen. Der zweite Abschnitt ist einer Entwickelung der „zonal toroidal“ Functionen gewidmet, d. h. derjenigen Functionen, die bei Symmetrie um die Axe eine Rolle spielen. Die ausserhalb und innerhalb des Torus liegenden Räume können einzeln betrachtet werden. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit sectorialen toroidalen Functionen, welche für den allgemeinsten Fall von nicht-symmetrischen Bedingungen gebraucht werden. Der vierte Abschnitt giebt kurz die passenden Functionen für einen Torus ohne centrale Oeffnung. Sie stehen zu den vorhergehenden Functionen in demselben Verhältnis, wie die Bessel'schen zu den Kugelfunctionen. Im fünften Abschnitt werden einige Beispiele zur Anwendung der Methode gegeben, wie das Potential eines Ringes, das elektrische Potential eines Torus und seine Capacität, das elektrische Potential eines Torus und eines elektrisirten kreisförmigen Drahtes, das Potential unter der Einwirkung eines elektrisirten Punktes und das Geschwindigkeitspotential eines Torus, der sich parallel zu seiner Axe bewegt, und endlich die Energie der Bewegung.

Der Verfasser erwähnt Riemann's „Ueber das Potential eines Ringes“, eine Note von W. D. Niven in Messenger 1880 und C. Neumann's „Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand u. s. w.“ (Halle), der in seiner Arbeit fast dieselben Orthogonalcoordinaten, wie der Verfasser braucht. Cly. (O.).

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

G. J. MICHAËLIS. Ueber die Theorie der elastischen Nachwirkung. Wiedemann Ann. XVII. 726-736.

Der Verfasser modificirt die Theorie der elastischen Nachwirkung, wie Warburg sie (Wied. Ann. IV. 1878. 232-249) gegeben hat, dadurch, dass er noch Kräfte einführt, welche die Molecüle in ihre ursprünglichen Richtungen zurückzutreiben suchen, wie W. Weber in seiner Theorie des inducirten Magnetismus ähnliche Kräfte, welche bestrebt sind, die Molecularmagnete in ihrer natürlichen Richtung festzuhalten, eingeführt hat. Darauf zeigt der Verfasser, wie verschiedene von Braun beobachtete Erscheinungen (Poggendorff Ann. CLIX. 1876. 337-389) aus dieser Theorie abgeleitet werden können. Rs.

L. SOHNCKE. Ableitung des Grundgesetzes der Krystallographie aus der Theorie der Krystallstructur. Wiedemann Ann. XVI. 489-500.

Zunächst wird gezeigt, dass das „Rationalitätsgesetz" kurz so ausgesprochen werden kann: „Wählt man drei mögliche

Kantenrichtungen als Axen, so sind die Indices aller Krystallflächen derselben Substanz ganze Zahlen." Da nun jede Theorie der Krystallstructur die Forderung stellen muss, dass dieselbe dieses Gesetz „der rationalen Flächenindices" als notwendige Folge ergiebt, löst der Verfasser die Aufgabe, im Anschluss an seine „Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur" (Leipzig, Teubner 1879) das Rationalitätsgesetz abzuleiten. Dabei wird von der Hypothese ausgegangen: „Als Krystallfläche kann nur eine solche durch das unendlich regelmässige Punktsystem gelegte Ebene auftreten, auf welcher unendlich viele Systempunkte liegen." Rs.

B. Elasticitätstheorie etc.

A. Castegliano. Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici. Atti d. Torino, XVII. 705-713.

Früher hatte der Verfasser den Satz bewiesen: „Die Ableitung derjenigen Arbeit, welche auf die Deformation eines elastischen Körpers oder Systemes verwendet ist, in Bezug auf eine der äusseren Kräfte wird dargestellt durch die Projection auf die Richtung der Kraft von der Verrückung ihres Angriffpunktes." Mit Benutzung dieses Satzes gewinnt der Verfasser in vorliegender Arbeit das Resultat: „Wenn P und Q zwei beliebige der äusseren Kräfte sind, welche auf einen elastischen Körper oder auf ein elastisches System wirken, und wenn p und q die Verrückungen ihrer Angriffspunkte sind, ist der Coefficient von Q in dem Ausdrucke von p gleich dem Coefficienten von P in dem Ausdrucke von q." Im Folgenden werden Anwendungen von diesem Satze gemacht. Rs.

W. J. C. Sharp. On the invariants of a certain orthogonal transformation, with special reference to the theory of the strains and stresses of an elastic solid. Lond., M. S. Proc. XIII. 216-239.

Die orthogonale Transformation bezieht sich auf drei Variable x, y, z, d. h. man geht von einem rechtwinkligen Coordinatensysteme im Raume zu einem zweiten solchen mit gleichem Anfangspunkt O über. Der Herr Verfasser giebt zunächst eine systematische Zusammenstellung aller in der Mechanik fester und flüssiger Körper, Elektricität, Magnetismus, Potentialtheorie etc. auftretenden Invarianten einer solchen Transformation, insbesondere von denen, die einer oder zwei Flächen zweiten Grades mit O als Mittelpunkt zugehören. Es mögen dies einige Beispiele erläutern.

Die Gleichung der Centralaxe (in der Statik) lautet

$$\frac{\xi-\frac{N\Sigma Y-M\Sigma Z}{R^2}}{\Sigma X}=\frac{\eta-\frac{L\Sigma Z-N\Sigma X}{R^2}}{\Sigma Y}=\frac{\zeta-\frac{M\Sigma X-L\Sigma Y}{R^2}}{\Sigma Z}.$$

Da sowohl die Zähler als die Nenner je drei mit x, y, z cogrediente Grössen sind, bleiben diese Gleichungen bei der Transformation ungeändert. Eine Fläche zweiten Grades mit O als Mittelpunkt lautet:

$$U\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy = \mu.$$

Hier werden die sechs Coefficienten linker Hand nach demselben Gesetz transformirt, wie $x^2, y^2, z^2, yz, zy, xy$. Dann giebt es bekanntlich drei Invarianten $D, S, \triangle$ in jenen Coefficienten, resp. vom ersten, zweiten, dritten Grade, sowie zwei unabhängige Covarianten (und zwar vom zweiten Grade in den Variabeln). Besonders wichtig für die Physik sind die beiden speciellen Fälle, wo die a, b, c, f, g, h einmal proportional sind mit

$$u^2, v^2, w^2, vw, wu, uv;$$

andererseits mit

$$uu', vv', ww', \frac{1}{2}(vw'+v'w), \frac{1}{2}(wu'+w'u), \frac{1}{2}(uv'+vu'),$$

(u, v, w cogredient mit x, y, z). Im ersten Falle verschwinden S und $\triangle$ identisch. D wird $u^2+v^2+w^2$, wie z. B. das Momentquadrat

$$(Yz-Zy)^2+(Zx-Xz)^2+(Xy-Yx)^2.$$

Im zweiten Falle verschwindet $\triangle$, D wird $uu'+vv'+ww'$, S wird $(vw'-v'w)^2+(wu'-w'u)^2+(uv'-u'v)^2$, wie z. B. die Functionen

$$udx+vdy+wdz,\ u\frac{\partial\varrho}{\partial x}+v\frac{\partial\varrho}{\partial y}+w\frac{\partial\varrho}{\partial z},\ u\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}+w\frac{dz}{ds}$$

in der Hydrostatik,

$$(yz'-z'x)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2$$

in der Geometrie. Ein anderer hervorragender Fall ist der, wenn a, b, c, f, g, h proportional sind mit

$$\Sigma Xx,\ \Sigma Yy,\ \Sigma Zz,\ \frac{1}{2}\Sigma(Yz+Zy)\ \text{etc.}\ (X_i, Y_i, Z_i \text{ cogredient mit } x, y, z).$$

Hier ist $D = \Sigma Xx + \Sigma Yy + \Sigma Zz$, wie z. B. die virtuelle Arbeit

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Hat man zwei Reihen von Grössen $a, b, c \ldots, a', b', c' \ldots$, so treten noch drei Combinanten E, θ, θ' auf. Ein Beispiel für E ist das Thomson'sche vollständige Differential

$$a'da+b'db+\cdots 2h'dh,$$

wo die $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$, die Zug- resp. Druckcomponenten sind. Unter die Form E fallen auch die beiden Ausdrücke

$$A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2,\quad A^2\omega_1^2+B^2\omega_2^2+C^2\omega_3^2$$

in den Euler'schen Bewegungsgleichungen. In der Hydrodynamik sind die $a, b, c \ldots$ proportional mit

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\ldots$$

Hier treten noch drei weitere Invarianten Ω, H, Z auf, deren Bedeutung nachgewiesen wird.

Nunmehr folgen noch einige Anwendungen dieser Invarianten. So wird in diesem Sinne der Beweis geführt, dass die Rotation eines starren Körpers um einen festgehaltenen Punkt auf die Rotation um eine Axe, und dass die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers auf eine Schraubenwindung zurückkommt. Zum Schluss wird entwickelt, wie sich die Invarianten der Druck-, sowie die Combinanten der Zug- und Druckkräfte vermöge der Invarianten der Zugkräfte allein ausdrücken lassen.

My.

R. R. WEBB. Stress and strain in cylindrical and polar coordinates. Mess. (2) XI. 146-155.

Der Verfasser giebt einen Ausdruck für die Spannung in cylindrischen Coordinaten (r, θ, z) und in Polarcoordinaten in drei Dimensionen; dann bildet er die Bewegungsgleichungen in beiden Coordinatensystemen. Er betrachtet ferner die folgenden besonderen Fälle: 1) die cylindrische radiale Spannung; 2) die cylindrische transversale Spannung; 3) die gleichförmig in einer senkrecht zur Axe liegenden Ebene verteilte Torsion; 4) die sphärische radiale Spannung. Glr. (O.).

J. BOUSSINESQ. Les déplacements qu'entraînent de petites dilatations ou condensations quelconques produites, dans tout milieu homogène et isotrope indéfini, sont calculables à la manière d'une attraction newtonienne. C. R. XCIV. 1648-1650.

Es wird der Satz gefunden: „Man kann sich vorstellen, dass die wirklichen Dilatationen in den verschiedenen Teilen eines Körpers von Verrückungen herrühren, welche in jedem Augenblicke und in jedem Punkte dieselbe Grösse, aber die entgegengesetzte Richtung der Newton'schen Attraction haben, die auf die Masseneinheit während derselben Zeit und in demselben Punkte von einer Masse ausgeübt werden würde, deren Dichte beständig proportional diesen Dilatationen wäre. Folglich ist die entgegengesetzte Verrückung, welche jedes Teilchen in die Lage des natürlichen Zustandes zurückbringen würde, in Grösse und Richtung durch die Anziehung dargestellt, welche es ausübt."

Gewisse totale Verrückungen, welche gewissen Dilatationen entsprechen, können daher nach dem Newton'schen Attractionsgesetze bei Benutzung des vorstehenden Satzes berechnet werden. Für eine Flüssigkeit gelangt man auch auf diesem Wege zu dem Resultate, welches der Verfasser in einer anderen Mitteilung (C. R. XCV. 1504) veröffentlicht hat. Rs.

J. Boussinesq. Équilibre d'élasticité d'un solide limité par un plan. C. R. XCV. 1052-1055.

J. Boussinesq. Sur la transmission d'une pression oblique, de la surface à l'intérieur, dans un solide isotrope et homogène en équilibre. C. R. XCV. 1149-1152.

1) In einer 1878 veröffentlichten Abhandlung (C. R. LXXXVI. 1260, siehe F. d. M. X. 1878. 674-675) hatte der Verfasser das Gleichgewicht eines homogenen und isotropen festen Körpers untersucht, welcher auf einer Seite von der Ebene xy begrenzt wird und auf allen anderen Seiten sich in's Unendliche ausdehnt, und welcher auf der Fläche $z = 0$ äusseren Drucken unterworfen ist, deren Componenten (p_x, p_y, p_z) in Bezug auf die Flächeneinheit für jeden Punkt gegeben sind; doch beschränkte der Verfasser sich damals auf den besonderen Fall, dass die äusseren Drucke sich auf die normalen Componenten p_z reduciren. Cerruti hat in seinen Ricerche intorno all' equilibrio de' corpi elastici isotropi (Acc. dei Lincei 1882) auch das Vorhandensein von p_x und p_y angenommen. Der Verfasser zeigt, dass die 1878 von ihm benutzten Principien in einfacher Weise auch zu den neuen Resultaten von Cerruti führen.

2) Zwei in 1) gefundene Formeln gestatten nachzuweisen, dass der im vorigen Jahre mitgeteilte Satz (C. R. XCIII. 703-706, s. F. d. M. XIII. 1881. 737), in welchem nur senkrecht gegen die Oberfläche wirkende Drucke berücksichtigt wurden, verallgemeinert werden kann: „Jede äussere Wirkung, die in einem Punkte der Oberfläche eines festen Körpers ausgeübt wird, pflanzt sich auf den zur Oberfläche parallelen Schichten nach dem Innern als Druck von genau entgegengesetzter Richtung fort, und jeder Druck ist einerseits proportional der Componente der gegebenen äusseren Kraft nach jener Richtung und anderseits umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung r vom Angriffspunkte und direct proportional dem Verhältnis ($z:r$) der Tiefe der Schicht zu dieser Entfernung.“ Ferner wird eine der Folgerungen angegeben, welche aus einer jener beiden Formeln gezogen werden kann. Es wird bestimmt, welche Gestalt die Oberfläche des

Körpers annimmt, wenn auf ein im Coordinatenanfangspunkte befindliches Element nur die tangentiale Elementarkraft dT in der Richtung der x-Axe wirkt: „Jeder Kreis vom Radius r, welcher um den Angriffspunkt der Kraft dT als Mittelpunkt auf der Oberfläche beschrieben ist, bleibt nach den Deformationen vollständig in derselben Ebene, welche sich nur um den zur Kraft senkrechten Durchmesser um den Winkel

$$\frac{z}{x} = \frac{dT}{4\pi(\lambda+\mu)r^2}$$

gedreht hat. Die Projectionen der Niveaulinien z = const., der deformirten Oberfläche auf deren ursprüngliche Ebene sind Kreise, welche durch den Anfangspunkt gehen und ihre Mittelpunkte auf der Richtung der angreifenden Kraft haben; hieraus folgt, dass die Linien grösster Neigung analoge Kreise sind, welche aber ihre Mittelpunkte auf der senkrechten Axe der y haben."

Rs.

H. Hertz. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. Kronecker J. XCII. 156-171.

Zwei elastische isotrope Körper berühren sich in einem sehr kleinen Teile ihrer Oberflächen und durch diesen Teil übt der eine auf den anderen einen endlichen, senkrechten Druck aus; für sie bestimmt der Verfasser aus der Elasticitätstheorie die Verschiebungen und Spannungen in der Nähe des Berührungspunktes. Das beiden Körpern nach der Deformation gemeinsame Stück der Oberfläche wird die Druckfläche, die Begrenzung dieser die Druckfigur genannt. Die Druckfläche wird als eine Fläche zweiten Grades betrachtet. Die Grössen, welche sich auf den einen oder den andern der beiden Körper beziehen, seien durch die Indices 1 und 2 von einander unterschieden, die Elasticitätsconstanten seien also K_1, θ_1 und K_2, θ_2. Zur Abkürzung wird gesetzt

$$\vartheta_1 = \frac{2(1+\theta_1)}{K_1(1+2\theta_1)} \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = \frac{2(1+\theta_2)}{K_2(1+2\theta_2)}.$$

Der Gesammtdruck sei p.

Als Druckfigur wird eine Ellipse gefunden, deren Axen a und b gegeben sind durch die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3(b^2+u)u}} = \frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2}\,\frac{16\pi}{3p},$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)^3u}} = \frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}\,\frac{16\pi}{3p},$$

oder, wenn die Grössen A und B durch die Hauptkrümmungen und einen Hülfswinkel τ ausgedrückt werden,

$$a = \mu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}},\quad b = \nu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}},$$

wo μ und ν transcendente Functionen des Winkels τ sind. In einer Tabelle sind die Werte dieser Functionen für die 10 Werte von $\tau:0^\circ, 10^\circ \dots 90^\circ$ mitgeteilt. Es ergiebt sich, „dass die Druckellipse immer länglicher ist, als die Ellipsen, in welchen der Abstand der beiden Körper constant ist. Für die absolute Grösse der Druckfläche folgt, dass dieselbe bei gegebener Form der Oberflächen proportional ist der dritten Wurzel aus dem Druck, sowie der dritten Wurzel aus der Grösse $\vartheta_1+\vartheta_2\dots$ Bei gleicher Gestalt der sich berührenden Oberflächen ist die Annäherung proportional der $\frac{2}{3}$ten Potenz des Druckes und der gleichen Potenz der Grösse $\vartheta_1+\vartheta_2$." Die Beanspruchung des Elementes, in welchem der Berührungspunkt liegt, wird bestimmt, überhaupt die Verteilung des senkrechten Druckes in der Druckfläche untersucht. Dabei ist die Bestimmung der Maximaldrucke von Wichtigkeit, welche in den auf einander gepressten Körpern vorkommen; denn von diesen hängt es ab, ob der Druck ohne bleibende Deformation ertragen wird, „...es ist bei unserer heutigen Kenntnis von der Festigkeit spröder Körper überhaupt nicht möglich, genau dasjenige Element zu bestimmen, in welchem die Bedingungen für das Zustandekommen eines Sprunges bei wachsendem Druck zuerst auftreten. Indessen zeigt eine eingehendere Discussion so viel, dass in Körpern, welche in ihrem elastischen Verhalten dem Glase oder harten Stahle ähnlich sind, bei weitem

die stärksten Zugkräfte in der Oberfläche und zwar am Rande der Druckfigur auftreten. Es wird durch eine solche Discussion wahrscheinlich, dass der erste Sprung an den Enden der kleinen Axe der Druckellipse entsteht und senkrecht zu dieser Axe am Rande der Druckellipse entlang läuft." Besonders einfach werden die Formeln für den Fall, dass beide sich berührende Körper Kugeln sind. Nachdem der Verfasser einige Beispiele gegeben hat, wendet er die Formeln auf den Stoss elastischer Körper an, d. h. dieses Problem wird näherungsweise gelöst. Die grösste Annäherung der Körper, der zwischen den Körpern gleichzeitig auftretende Maximaldruck, die Dimensionen der Stossfläche und die Dauer der Berührung (die Stosszeit) werden bestimmt. Die Werte dieser Grössen für den centralen Stoss zweier Stahlkugeln von gleichem Radius werden angegeben.

Rs.

G. H. Darwin. On the stresses caused in the interior of the earth by the weights of continents and mountains. Phil. Trans. CLXXIII. 187-230.

Der Verfasser betrachtet die Festigkeit und Härte der Erdmaterie von einem Gesichtspunkt aus, der bisher nicht berücksichtigt zu sein scheint. Der erste Teil (p. 188-218) ist einer mathematischen Untersuchung gewidmet, die sich auf eine bekannte Arbeit von W. Thomson stützt. Der zweite Teil enthält eine summarische Uebersicht und Discussion der vorangehenden Arbeit.

Cly. (O.).

R. R. Webb. On the equilibrium of a bent plate. Mess. (2) XI. 156-160.

Untersuchung des Gleichgewichtes einer geneigten Platte, unter den Bedingungen, dass dieselbe isotrope elastische Eigenschaften habe, und dass die Abweichung von einer ungespannten Platte von gleichmässiger Dicke unendlick klein ist.

Glr. (O.).

Rayleigh. On the infinitesimal bending of surfaces of revolution. Lond., M S. Proc. XIII. 4-16.

Es wird vorausgesetzt, dass bei der Biegung von Umdrehungsflächen die Deformation näherungsweise so erfolge, als wenn die dünne Schale im Ganzen unausdehnbar wäre. Die Rechnung wird hierdurch wesentlich erleichtert, die Untersuchung aber auf die centrale Schicht beschränkt. Der Verfasser stellt die Bedingungen dafür auf, dass die Grösse einer Kugelfläche ungeändert bleibt, und giebt die hierbei möglichen Verrückungen an. Daraus werden die möglichen Verrückungen einer Vollkugel abgeleitet. Die potentielle Energie der Biegung wird berechnet, und es wird bewiesen, dass die potentielle Energie V, welche irgend einer Zahl von Verrückungen gewisser Art entspricht, nur die Quadrate und nicht die Producte der Amplituden enthält. Nachdem noch die Werte von V für eine Halbkugel und für den Fall, dass der grösste Wert von θ statt 90° nur 60° beträgt, angegeben sind, hat sich der Verfasser Alles verschafft, was zur Lösung statischer Probleme in Bezug auf die Deformation von Kugelschalen unter der Wirkung gegebener Kräfte erforderlich ist. Um auch die Zahl der freien Schwingungen finden zu können, wird der Ausdruck für die kinetische Energie aufgestellt. Dies führt zu Bemerkungen über tönende Glocken von nahezu halbkugelförmiger Gestalt.

Endlich wird die Deformation einer allgemeinen Umdrehungsfläche unter der Voraussetzung untersucht, dass keine auf der Oberfläche gezogene Linie eine Längenänderung erleidet. Bei der Rechnung werden Cylindercoordinaten benutzt. Die einfachste Anwendung der erhaltenen Resultate bezieht sich daher auf den Kreiscylinder r = const. Eine ausgedehntere Klasse lösbarer Fälle erhält man bei der Annahme

$$r^3 \frac{d^2r}{dz^2} = \text{const.},$$

welcher Gleichung durch die Flächen zweiten Grades im Allgemeinen genügt wird. Rs.

W. VOIGT. Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen durch die Beobachtung der Biegung und Drillung von Prismen. Wiedemann Ann. XVI. 273-321, 398-416.

Die Hauptresultate dieser Untersuchung sind folgendermassen zusammengefasst:

1) Bei Prismen von doppeltsymmetrischem Querschnitt, die aus Krystallen geschnitten sind, ist im Allgemeinen die „freie" Biegung, — wie sie durch Zugkräfte normal zur Längsaxe oder durch Drehungsmomente um Axen, die in den Grundflächen liegen, hervorgebracht wird, — von einer Drillung um die Längsaxe begleitet; desgleichen die durch ein einziges Drehungsmoment um die Längsaxe erzeugte „freie" Torsion von einer Biegung. Es lassen sich für jedes Krystallsystem diejenigen Richtungen angeben, welche die Längsaxe und die beiden Hauptträgheitsaxen des Querschnitts des Prismas haben müssen, damit diese Nebenänderungen verschwinden und durch die angeführten Ursachen reine Biegung und reine Drillung hervorgerufen werden. Diese Lagen empfehlen sich besonders für die Beobachtung; bei der Benutzung anderer als dieser bestimmten Prismengattungen hat man Sorge zu tragen, dass jene Nebenänderungen unbehindert zu Stande kommen können, wenn man nicht, was sich nur bei der Biegung ausführen lassen dürfte, Veranstaltungen treffen will, sie gänzlich aufzuheben.

2) Die Theorie der freien gleichförmigen Biegung eines Prismas aus einem krystallinischen Medium lässt sich für jede Gestalt des Querschnitts und jede Orientirung des Prismas im Krystall „streng", (d. h. wenn der Querschnitt des Prismas so klein gegen seine Länge ist, dass man statt der in Wahrheit stattfindenden Verteilung der äusseren Kräfte auf den unterstützen Querschnitten eine beliebige einführen kann, die nur mit jener gleiche Componentensummen und Drehungsmomente ergiebt), durchführen, die der reinen Biegung (mit aufgehobener Torsion) wenigstens soweit, dass eine Formel zur Bestimmung einer Constanten durch die Beobachtung gewonnen wird.

3) Die Theorie der freien ungleichförmigen Biegung, wie sie bei einem an beiden Enden unterstützten, in der Mitte belasteten Prisma eintritt, lässt sich in derselben Allgemeinheit nur angenähert behandeln und führt, wenn man Glieder von der Ordnung der Quadrate der Querdimensionen gegen die der Länge vernachlässigt, zu der (analog auch für unkrystallinische Medien gültigen) Gleichung:

$$\sigma = \frac{E\Pi L^3}{48Qk^2},$$

worin σ die Senkung der Mitte des Prismas von der Länge L und einem doppeltsymmetrischen, übrigens beliebigen Querschnitt, dessen Trägheitsmoment um eine horizontale Axe durch seinen Schwerpunkt $= Qk^2$ ist, unter einer Belastung Π darstellt. Der Biegungscoefficient E ist das Reciproke des sogenannten Elasticitätscoefficienten, auf den die Dilatation durch einseitigen Zug führt; sein Wert in den Elastitätsconstanten des Krystalles ist für jedes Krystallsystem und jede Orientirung des Prismas bestimmt.

4) Das Problem der Drillung ist für einen Cylinder von elliptischem Querschnitt bei beliebiger gleichseitiger Biegung (von reiner Drillung bis zu reiner Biegung) allgemein für jedes krystallinische Medium durchführbar.

5) Das Gesetz für die freie Drillung des rechteckigen Prismas aus krystallinischer Substanz lässt sich ganz allgemein auf die Form bringen:

$$\tau = \frac{TNL}{\frac{4Qn^2}{3} - n^4 f\left(\frac{m}{n}\right)},$$

worin τ, der Drehungswinkel, bestimmt ist durch das wirkende Moment um die Längsaxe N, durch die Länge L, den Querschnitt Q und die halbe kleinere Querdimension n des Prismas. $f\left(\frac{m}{n}\right)$ ist eine Function des Verhältnisses der beiden Querdimensionen, die nur in gewissen speciellen Fällen völlig angebbar ist, aber allgemein die Eigenschaft hat, für einigermassen grosse Werte des Argumentes (5 bis 10 etwa) merklich constant zu

werden, was sich durch die Beobachtung prüfen lässt. Darum kann man sie bei geeigneter Wahl des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ als unbekannte Constante durch die Combination von Beobachtungen mit mehreren gleich orientirten Prismen eliminiren, und zugleich die Grösse T, den eigentlichen Torsionscoefficienten, bestimmen, dessen Wert in der Abhandlung gleichfalls durch die Elasticitätsconstanten des Krystalles für jedes Krystallsystem und eine beliebige Orientirung des Prismas angegeben ist.

6) Die Beobachtung der Biegung und Drillung von Prismen giebt für alle Krystallsysteme genug Daten, um alle Elasticitätsconstanten eines Minerals zu bestimmen, ja noch mehr als dies, so dass die Möglichkeit gegeben ist, unter allen Beobachtungsarten die vorteilhafteste auszuwählen. Da nach den Darlegungen des Verfassers die Beobachtungen der Biegung bequemer sind als die der Torsion, wird man so viel Daten, als möglich, durch die ersteren zu gewinnen suchen und nur die noch ausserdem nötigen vermittelst Torsionsbeobachtungen bestimmen.

Rs.

W. Voigt. Volumen- und Winkeländerung krystallinischer Körper bei all- oder einseitigem Druck. Wiedemann Ann. XVI. 416-427.

Der Verfasser zeigt, wie die Volumen- und Winkeländerungen von Körpern verschiedener Krystallsysteme bei allseitig gleichem oder bei einseitigem Drucke berechnet werden können, und zwar, wie in einer Anmerkung erwähnt ist, unter Anwendung von Gedanken, welche F. Neumann in seinen Vorlesungen über Elasticität entwickelt hat. Rs.

W. Voigt. Die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe. Berl. Ber. 1882. 683-702.

Die Lösung des Problems vom Stoss zweier cylindrischer elastischer Körper, wie sie von Poisson in seinem Traité de mécanique § 499-504 gegeben ist, wurde von F. Neumann in

den Vorlesungen bereits während der fünfziger Jahre verbessert und später unabhängig von diesem von de Saint-Venant (Mémoire sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de grosseurs et matières semblables ou différentes, et sur la proportion de leur force vive qui est perdue pour la translation ultérieure, et généralement sur le mouvement longitudinal d'un système de deux ou plusieurs prismes élastiques. Liouville J. (2). XII. 237-376. 1867) gelöst, welcher das Problem auch allgemeiner behandelte. Der Verfasser wollte diese Theorie experimentell prüfen; er fand, dass seine Beobachtungen, welche er in dieser Mitteilung zunächst giebt, der Theorie durchaus widersprechen. Die Annahme der Neumann-de Saint-Venant'schen Theorie, dass während des Stosses die Stäbe als Teile eines einzigen festen Systems angesehen werden können, scheint unrichtig zu sein; „denn die allgemeine Erfahrung, dass abgebrochene Stücke eines Körpers nicht durch blossen Druck wieder mit demselben zu verbinden sind, zeigt, dass entweder eine Annäherung der Teile, welche die Grenzschichten des einen in die Wirkungssphären derjenigen des anderen bringt, in Wirklichkeit unmöglich ist, oder wenn doch, die zunächst der Oberfläche liegenden Massenteilchen in einem anderen Zustande sind, als die inneren, und die auf die ihnen genäherten anders, nämlich weit schwächer wirken." Der Verfasser nimmt daher in der nun entwickelten Theorie an, dass auch während des Stosses zwischen den Körpern eine Schicht vorhanden ist. Um die Rechnung durchführen zu können, müssen bezüglich dieser Zwischenschicht einfache Annahmen gemacht werden; der dann in die Rechnung eingeführte Elasticitätscoefficient der Zwischenschicht hat „nur die Bedeutung eines Mittelwertes für die bei einem bestimmten Stosse allmählich eintretenden Werte" und wird „sich bei verschiedenen Stossgeschwindigkeiten verschieden finden, kleiner bei geringen, grösser bei bedeutenderen." Die erhaltenen Formeln geben die Beobachtungen gut wieder. Für verschieden dicke Stäbe stimmen die Beobachtungen von Boltzmann nicht mit der Theorie des Verfassers. Dieser hat daher auch einige Versuche mit Stäben von ungleichem Querschnitt angestellt und gefunden, dass die beobachteten

mit den nach seiner Theorie berechneten Werten sich in Einklang befinden.

In einem Nachtrage wird noch kurz erwähnt, dass in Folge der Abhandlung von Hertz „Ueber die Berührung fester elastischer Körper" der Verfasser einige Beobachtungen bezüglich des Einflusses der Krümmung der zusammenstossenden Flächen gemacht hat. Das Ergebnis wird mitgeteilt. Die Krümmung ist von Einfluss; doch meint der Verfasser, dass neben der Wirkung der Krümmung die von ihm erörterten Umstände sehr merklichen Einfluss haben. Daher hat er begonnen, die Elasticität der an verschiedenen Oberflächen haftenden condensirten Gasschichten beobachtend zu untersuchen." Rs.

L. Boltzmann. Experimente über den Stoss von Cylindern. Wiedemann Ann. XVII. 343-347.

Abdruck von Wien. Ber. LXXXIV. 1225-1229, s. F. d. M. XIII. 1881. 740. Rs.

Sebert et Hugoniot. Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. C. R. XCV. 213-215, 278-281, 338-340.

Sebert et Hugoniot. Sur le choc longitudinal d'une tige élastique fixée par l'une de ses extrémités. C. R. XCV. 381-384.

Sebert et Hugoniot. Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques et le mouvement d'une tige portant a son extrémité une masse additionnelle. C. R. XCV. 775-777.

1) Nachdem an die Arbeit von de Saint-Venant (siehe das Referat über die Abhandlung von Hertz, oben p. 809) erinnert ist, in welcher angenommen war, dass der betrachtete Stab dem Stosse eines zweiten prismatischen Stabes, der dieselbe Symmetrieaxe hat, unterworfen ist, wird das Problem gelöst: Die Schwingungs-

bewegung einer homogenen elastischen Stange von endlicher Länge zu bestimmen, deren eines Ende irgend welchen mit der Zeit veränderlichen Wirkungen (Drucken oder Spannungen) unterworfen ist, und deren anderes Ende frei oder befestigt ist. Für longitudinale Schwingungen elastischer Stäbe gilt die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{Eg}{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Das allgemeine Integral ist

$$u = \varphi(x+at) + \psi(x-at).$$

Die Functionen φ' und ψ' werden entsprechend den Bedingungsgleichungen des Problems (zunächst für den Fall, dass das eine Ende des Stabes fest ist) vollständig bestimmt. Die Functionen φ und ψ, deren Werte zu kennen jedoch selten erforderlich ist, können daher durch einfache Quadraturen erhalten werden. In der zweiten Note wird gezeigt, wie man die Spannung und die Geschwindigkeit irgend eines Stabpunktes bekommt. In der dritten Mitteilung wird das bisher als fest angenommene Stabende als frei vorausgesetzt. Um zu zeigen, wie die Methode bei Aufgaben über den Stoss angewendet wird, beschäftigen sich die Verfasser mit folgender Verallgemeinerung eines Problems, welches Navier 1823 in seiner Abhandlung über die Hängebrücken zuerst behandelt hat: Ein Stab sei am einen Ende befestigt und am anderen dem Stosse eines Körpers vom Gewichte Π unterworfen. Dieser Körper sei ziemlich kurz und starr, damit man dessen Vibrationsbewegung vernachlässigen kann, und auf diesen Körper wirke parallel zur Richtung des Stabes eine Kraft $F(t)$. Man soll die Bewegung des Systems bestimmen, indem man annimmt, dass die kleine Masse nach dem Stosse unveränderlich mit dem Stabe verbunden bleibt. Der Ausdruck für φ' wird gegeben, wenn $t < \frac{2l}{a}$ ist.

2) Die eben genannte Aufgabe wird für den Fall, dass $t > \frac{2l}{a}$ ist, weiter behandelt.

In 3) werden aus den mitgeteilten Formeln Folgerungen gezogen. Die Abhandlung von Philipps' „Solutions de divers

problèmes de Mécanique, dans lesquels les conditions imposées aux extrémités des corps, au lieu d'être invariables, sont des fonctions données du temps, et où l'on tient compte de l'inertie de toutes les parties du système. (Liouville J. (2). IX. 25-83. 1864)" war den Verfassern bei ihren früheren Mitteilungen noch unbekannt. Sebert und Hugoniot sehen als besonderen Vorteil ihrer Behandlung des Problems an, dass sie nicht die Functionen φ und ψ selbst, sondern deren Ableitungen φ' und ψ' bestimmen, weil dadurch die Elementarvorgänge der Phänomene klarer hervortreten. Einvon Philipps behandelter Fall wird benutzt, um das an einem Beispiele erkennen zu lassen. Rs.

De Saint-Venant. Du choc longitudinal d'une barre élastique libre contre une barre élastique d'autre matière ou d'autre grosseur, fixée au bout non heurté; considérations du cas extrême où la barre heurtante est très raide et très courte. C. R. XCV. 359-365, 422.

De Saint-Venant. Solution, en termes finis et simples, du problème du choc longitudinal, par un corps quelconque, d'une barre élastique fixée à son extrémité non heurtée. C. R. XCV. 423-427.

1) Die Mitteilungen von Sebert und Hugoniot veranlassten den Verfasser, eine Fortsetzung seiner 1867 veröffentlichten Abhandlung zu geben. Die Gleichungen des vorliegenden Problems können auf zwei Arten gelöst werden: 1) in endlichen Termen durch die Summe zweier willkürlicher Functionen von $(x \pm wt)$, deren Gestalt sich nach jeder Reflexion der Erschütterungen ändert; 2) durch trigonometrische Reihen. Es wird die zweite Lösungsart benutzt und im Speciellen angenommen, dass die Zeit, während welcher der Schall die Länge des stossenden Stabes, der prismatisch, elastisch, aber sehr kurz und hart sei, durchläuft, als unendlich klein gegen die entsprechende Zeit für den gestossenen prismatischen elastischen Stab betrachtet werden kann. Dann wird genau jener Ausdruck gefunden, welchen Navier 1823 für

die Verrückungen von Punkten einer elastischen Stange angegeben hat, welche am einen Ende befestigt und am anderen Ende von einem starren Körper von beliebiger Gestalt gestossen wird.

In 2) wird die erste Lösungsart benutzt, um für den praktisch wichtigen Fall, dass der am einen Ende gestossene Stab am anderen Ende befestigt ist, die Lösung in geschlossener Form zu geben. Rs.

J. Boussinesq. Résistance d'une barre prismatique et homogène, de longueur supposée infinie, au choc transversal et au choc longitudinal. C. R. XCIV. 1044-1047.

J. Boussinesq. Sur le choc d'une plaque élastique plane, supposée indéfinie en longueur et en largeur, par un solide qui vient la heurter perpendiculairement en un de ses points et qui lui reste uni. C. R. XCV. 123-125.

Transversal gegen die Mitte oder longitudinal gegen das eine Ende einer unendlich langen Stange stosse ein Körper, ohne abgelenkt zu werden, mit der Geschwindigkeit V. Die Verrückungen, welche in Folge dessen die einzelnen Punkte des Stabes erleiden, sind zu bestimmen. Für den ersten Fall der transversalen Bewegung sei der Querschnitt der Stange symmetrisch in Bezug auf eine Ebene senkrecht zur Richtung, in welcher die transversale Bewegung stattfindet. Nachdem die Differentialgleichung und die Grenzbedingungen aufgestellt sind, erfolgt die Integration nach einer Methode, welche der Verfasser in den C. R. XCIV. 33 (s. Seite 781) mitgeteilt hat. Ist w die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles längs der Stange, ∂ die Elasticitätsgrenze und k eine Zahl, welche allein vom Querschnitt der Stange abhängt, so darf die der Stange mitgeteilte Geschwindigkeit v niemals den Wert $\frac{\partial}{k} w$ übersteigen, wenn die Structur nicht geändert werden soll. Für einen kreisrunden oder elliptischen Stab ist $k = 2$, für einen rechteckigen $\sqrt{3}$. Darauf

wird der Fall longitudinaler Stösse behandelt, welcher zu dem bereits von Young aufgestellte Satze führt: Das Verhältnis der grössten Geschwindigkeit, welche der Stange durch longitudinale Stösse mitgeteilt wird, zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles darf die Elasticitätsgrenze nicht überschreiten, wenn die Structur keine Aenderung erleiden soll. Aus beiden Sätzen wird gefolgert: Die Geschwindigkeit eines transversalen Stosses, welcher eben fähig ist, die Structur zu ändern, ist im Verhältnis von $1:k$ kleiner, als diejenige eines longitudinalen Stosses, welcher dieselbe Wirkung durch Ausdehnung hervorbringt, und zwar ist das Verhältnis $1:2$ für einen runden Stab, und $1:\sqrt{3}$ für einen rechteckigen Stab, der senkrecht zu seiner Seitenfläche gestossen wird. Diese Sätze gelten auch für Stangen von endlicher Länge, so lange die durch den Stoss erzeugte Bewegung am nicht gestossenen Ende der Stange nicht bemerkbar ist.

In 2) werden analoge Betrachtungen für eine Platte angestellt. Dabei wird eine in den C. R. XCIV. 514 (s. Seite 302) mitgeteilte Integrationsmethode benutzt. Es bezeichne v die Geschwindigkeit des direct erschütterten Teiles der Platte, w die Geschwindigkeit, mit welcher sich longitudinale Schwingungen in der Platte fortpflanzen, ∂ und ∂' die linearen Hauptdilatationen, so wird gefunden

$$v = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(\partial - \partial')w = 0{,}9069(\partial - \partial')w.$$

Daraus schliesst der Verfasser, dass das Verhältnis $\frac{v}{0{,}9069w}$ den Wert der Elasticitätsgrenze des Stoffes nicht erreichen kann, ohne dass der Rand des Teiles, auf welchen der Stoss ausgeübt wird, eine bleibende Veränderung erleidet. Es sei μ die Masse des stossenden Körpers, bezogen auf die Masse der Oberflächeneinheit der Platte, V die Geschwindigkeit jener Masse zur Zeit $t = 0$, h die halbe Dicke der Platte und $a = \frac{hw}{\sqrt{3}}$, so ergiebt sich ferner: Die Verrückung des gestossenen Punktes strebt der Grenze $\frac{\mu V}{3a}$ zu, während für den Fall des transversalen Stosses

gegen eine unendlich lange Stange diese Verrückung beständig wächst, obgleich die Geschwindigkeit sich der Grenze Null nähert. „Wenn der gestossene Punkt in seine neue Ruhelage gekommen ist, haben sich die umgebenden concentrischen Ringe in der Platte um ihn in einer Ebene, welche der ursprünglichen Ebene parallel ist, am Ende von Zeiten gebildet, die proportional den Quadraten der Ringradien sind.“ Rs.

H. Résal. Sur un point de la théorie mathématique des effets du jeu de billard. C. R. XCIV. 1548-1551.

H. Résal. Sur une question de principe qui se rapporte à la théorie du choc des corps imparfaitement élastiques. C. R. XCV. 547-549.

H. Résal. Sur le choc des corps imparfaitement élastiques. C. R. XCV. 578-582.

H. Résal. Du choc de deux sphères en ayant égard à leur degré d'élasticité et au frottement développé au contact. C. R. XCV. 615-619.

H. Résal. Du choc de deux billes posées sur un tapis de billard. C. R, XCV. 655-659.

H. Résal. De l'effet d'un coup de queue incliné sur une bille. C. R. XCV. 700-703.

H. Résal. Remarques sur la théorie des chocs. C. R. XCV. 745-747.

1) Es handelt sich um den Stoss eines Balles, welcher sich auf einer Ebene S gegen eine zu dieser senkrechte Ebene bewegen muss. Der Ball besteht aus homogenen Kugelschalen, deren Dichte sich in der Richtung vom Mittelpunkte zur Oberfläche ändern kann. Die Masse wird der Einfachheit wegen gleich 1 gesetzt. Von der Componente der Rotation des Balles um seinen Schwerpunkt in der Richtung der Normale von S', welche während des Stosses constant bleibt und bei den durch

die Reibung erzeugten Wirkungen keine Rolle spielt, wird abgesehen. Es sei C die Lage des Ballmittelpunktes während des Stosses, A der Berührungspunkt mit S', Ay die durch A gehende Parallele zur Schnittlinie der beiden Ebenen, Az die äussere Normale zu S, v die zu Ax parallele Componente der Geschwindigkeit v von C zu irgend einer Zeit während des Stosses, p und q die Componenten der Rotation um C parallel zu Ay und Az. Der Verfasser bestimmt v, p, q für das Ende des Stosses, betrachtet dann den einfachen Fall, dass zu Anfang des Stosses $p = 0$ ist, und fügt die Bemerkung hinzu, dass die angestellten Betrachtungen sich auch auf den Fall anwenden lassen, wenn die Ebene S' durch eine zur Ebene S normale Cylinderfläche ersetzt wird, wie beim „billard forain".

2) Navier's Raisonnement wird nach dessen Darstellung in L'architecture de Belidor. 1819. Tome I. p. 121 wiedergegeben. Den Formeln von Navier entsprechen die, welche der Verfasser 1873 in seinem Traité de Mécanique générale Tome I. gegeben hat. Der Verfasser kennt genaue Experimente über den Stoss unvollkommen elastischer Körper nur von Coriolis (Théorie mathématique des effets du jeu de billard, p. 89). Diese Experimente scheinen die Hypothese von Navier, welche für den directen Stoss auf die des Verfassers zurückkommt, zu rechtfertigen. Nach dem Verfasser kann man bezüglich des Stosses zweier unvollkommen elastischer Körper von beliebiger Gestalt eine Gleichung aufstellen, welche ausdrückt, dass der Verlust an lebendiger Kraft sich aus zwei Teilen zusammensetzt, von welchen der eine proportional der lebendigen Kraft der verlorenen Geschwindigkeiten, d. i. dem Doppelten der im Innern erzeugten Moleculararbeit, und der andere gleich dem Doppelten der durch die Reibung verbrauchten Arbeit ist. Die Auswertung dieses zweiten Gliedes bietet im Allgemeinen grosse Schwierigkeiten dar.

In 3) wird zunächst der Verlust an lebendiger Kraft beim Zusammenstoss zweier unelastischer Körper berechnet. Es bezeichne m ein Massenmolecül der beiden Körper, Ov_0, Ov_1, Ou die von einem Punkte O aus gezogenen Geraden, welche beziehungsweise die Geschwindigkeiten v_0 vor dem Stosse, v_1 nach dem

Stosse, u im Augenblicke der grössten Zusammendrückung darstellen, $U = \overline{v_0 v_1} = \overline{v_0} - \overline{v_1}$ die während des Stosses verlorene Geschwindigkeit, $\varphi_0 = \overline{v_0 u} = \overline{v_0} - \overline{u}$ die im ersten Teile des Stosses verlorene Geschwindigkeit, $\varphi_1 = \overline{v_1 u} = \overline{v_1} - \overline{u}$ die im zweiten Teile des Stosses gewonnene Geschwindigkeit, J_0 und J_1 die Projectionen der Punkte v_0 und v_1 auf die Richtung Ou. Es wird angenommen, dass φ_1 direct entgegengesetzt φ_0 ist, dass folglich die Punkte v_0, u, v_1 in einer geraden Linie liegen, und dass $U = \varphi_0 + \varphi_1$ ist. Indem dann $\varphi_1 = n\varphi_0$ gesetzt wird, wo n zwischen 0 und 1 liegt, gelangt der Verfasser schliesslich zu der Gleichung

$$\Sigma m v_0^2 - \varepsilon m v_1^2 = \varepsilon \Sigma m U^2 - 2Jw,$$

in welcher $\varepsilon = \frac{1-n}{1+n}$ ist, J den Impuls bedeutet, welcher von der im Stosspunkte entwickelten tangentialen Moleculararbeit herrührt, und w die Projection der Gleitungsgeschwindigkeit in der Richtung von J bezeichnet. Darauf berechnet der Verfasser die Wirkung eines horizontalen Queuestosses auf einen Billardball.

4) enthält eine weitere Anwendung der in 3) veröffentlichten allgemeinen Formel. Jede der beiden Kugeln soll frei beweglich und aus concentrischen homogenen Schichten zusammengesetzt sein, deren Dichte von Schicht zu Schicht sich ändern kann. Es wird gefunden: Während der ganzen Dauer des Stosses hat die Reibung dieselbe Richtung, sie hängt von der relativen Bewegung der beiden Körper zu Anfang des Stosses ab. Für zwei genau gleiche Kugeln hat bereits Coriolis diesen Satz ausgesprochen. In 7) wird mitgeteilt, dass dies ein specieller Fall des Satzes ist, welchen Philipps 1849 in Liouville J. gegeben hat.

In 5) zeigt sich: Wenn zwei gleich grosse Bälle auf einer Billardfläche zusammenstossen, ist die Richtung der Reibung nicht constant, entgegen der Annahme von Coriolis. Die Rechnung wird nur für den Fall weitergeführt, dass es sich um eine erste Annäherung handeln soll, und dass der angestossene Ball anfänglich in Ruhe ist.

6) Mit Coriolis wird angenommen, dass die Elasticität der Billardfläche gering genug ist, damit sie vernachlässigt werden

kann. Bereits Coriolis fand, dass die Gleichungen für diesen Fall mit einander wohl vereinbar sein würden, wenn man annehme, dass die Reibung zwischen Ball und Billardfläche während des Stosses dieselbe Richtung habe. Für diesen Fall werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt, aus welchen sich ergiebt, dass die Bewegung des Ballmittelpunktes parallel zu Cx rechtläufig oder rückläufig sein wird, je nachdem $\cos\gamma \lesseqgtr f \cot i$ ist. Hierbei bedeutet Cx die durch den Mittelpunkt C des Balles gelegte Horizontale in der verticalen Ebene, welche parallel zur Queueaxe durch C geht, γ die auf die constante Richtung der Reibung bezügliche Constante, f den Reibungscoefficienten für den Ball auf der Billardfläche, i die Neigung der Queueaxe gegen die Billardfläche. Wenn diese Neigung nicht genügend gross ist, kann folglich keine rückläufige Bewegung eintreten.

7) Philipps schlug vor, das Problem des Stosses unvollkommen elastischer Körper dadurch zu lösen, dass angenommen wird, die Grösse der normalen gegenseitigen Wirkung im zweiten Teile des Stosses, d. h. nach dem Augenblicke, wann die grösste Zusammendrückung stattgefunden hat, sei ein Bruchteil der entsprechenden Grösse im ersten Teile des Stosses. Unter dieser Annahme behandelt der Verfasser den directen Stoss zweier Körper, welche parallele Translationsbewegungen ausführen, und gelangt zu den Formeln, welche er in 1) gegeben hat. Die Hypothese von Philipps ist durch ihre Einfachheit sehr verführerisch und der Verfasser ist geneigt, sie bei der Lösung der verschiedenen Probleme des Billardspieles, welche er schon behandelt hat, anzuwenden. Rs.

H. Lamb. On the vibrations of an elastic sphere.

L. M. S. Proc. XIII. 189-212.

Dieselbe Methode, welche der Verfasser in einer etwas früher veröffentlichten Mitteilung (On the Oscillations of a Viscous Spheroid. Proc. L.M.S. XIII. 51-66 s.p. 789) angewendet hat, wird für die Untersuchung der Schwingungen einer elastischen Kugel benutzt. Die wichstigsten der Resultate sind bereits durch Järisch

auf anderem Wege gefunden worden (siehe F. d. M. XI. 1879. 723-724). Es genüge daher dieser Hinweis auf die Arbeit.

Rs.

M. DA T. P. VIANNA. Influencia das cargas un movimento sobre as nigas rectas. Lisboa. 1882.

Im ersten Capitel untersucht Herr Vianna die Vibration von geraden Balken, wenn die Belastung auf einem Punkt vereint ist. Im zweiten Capitel beschäftigt er sich mit den Schwingungen gerader Balken, wenn die Belastung gleichmässig auf ihnen verteilt ist. Für beide Aufgaben benutzt Herr Vianna die Methoden der Herren Philipps und Bernandot, aber er dehnt die Genauigkeit weiter aus, als die beiden Ingenieure.

Tx. (O.).

TRESCA. Théorie de la résistance des étoffes tissées à l'extension. C. R. XCV. 1315-1321.

Durch Beobachtungen hat der Verfasser gefunden, dass das bekannte Gesetz der Elasticität des Zuges, wonach die Ausdehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze der Belastung proportional ist, nicht mehr für Riemen aus Geweben (und Leder) gilt, dass vielmehr hier die Ausdehnungen geringer sind, als jenes Gesetz erfordern würde. Um diese Abweichung theoretisch zu erklären, denkt er sich die Fäden des Einschlaggarns als (unzusammendrückbare) Cylinder, welche zwischen die der Kette eingeschaltet sind, so dass die letzteren jene längs ihres halben Umfanges umfassen. Bei einer Belastung entfernen sich die Cylinder von einander, und die Fäden lösen sich von ihnen. Das Gewebe erfährt hierbei eine grössere Verlängerung als die Fäden. Wenn α den Bogen bezeichnet, längs dessen sich der Faden von dem Cylinder trennt, so ist die Relation zwischen der für die Längeneinheit zu verstehenden Verlängerung i des Gewebes und der Belastung f derselben gegeben durch die Gleichungen:

$$i = \frac{1}{\cos\alpha} - 1, \quad f = \frac{2E\omega \sin\alpha}{\pi}(\operatorname{tang}\alpha - \alpha),$$

worin ω den Querschnitt, ϱ den Elasticitätscoefficienten bedeutet. Die Berechnung von i und f für eine Reihe von Werten des Winkels α bestätigt die Ergebnisse der Beobachtung. Je dichter das Gewebe ist, desto grösser wird bei einer gleichen Belastung die Verlängerung. Wären die Fäden des Einschlaggarns abgeplattet, so würde die Ausdehnung eine geringere werden. Diese kann auch von einer Deformation derselben abhängen.

Sbt.

H. Léauté. Sur l'application de la résistance des matériaux aux pièces des machines. C. R. XCIV. 843-845.

Die Hypothese, dass man die Componenten und Momente der äusseren Kräfte berechnen könne, wie wenn die Teile keine Deformation erführen, von der man bei der Bestimmung des Widerstandes der Baumaterialien Gebrauch macht, ist nicht mehr zulässig für die Bestandteile von Maschinen; hier hängen die Kräfte wesentlich von deren Deformation ab. Das Problem führt in Folge dessen nicht auf einfache Quadraturen, sondern auf Differentialgleichungen, welche vom Verfasser aufgestellt werden.

Sbt.

C. Capillarität.

P. Volkmann. Ueber die Molecularanziehung von Flüssigkeiten auf einander. Wiedemann Ann. (2) XVI. 321-335.

Es werden folgende Definitionen aufgestellt und physikalisch begründet: 1) Die Capillaritätsconstante

$$\alpha = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}H = \frac{1}{8}\pi\varrho^2\int_0^\infty r^4\varphi(r)dr$$

kann als Mass der Cohäsion oder der Anziehung zweier gleich-

artiger Flüssigkeitsteile dienen. 2) Ein dem obigen vollkommen entsprechender Ausdruck

$$\alpha_{12} = \frac{1}{8} \pi \varrho_1 \varrho_2 \int_0^\infty r^4 \varphi_{12}(r) dr$$

dient als Mass der Adhäsion oder der Anziehung zweier verschiedenartiger Flüssigkeiten. 3) Ein solches Mass lässt sich aufstellen, gleichviel, ob die Flüssigkeiten mischbar sind oder nicht. So lange $\alpha_{12} < \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, sind die Flüssigkeiten nicht mischbar; sie sind es dagegen, wenn $\alpha_{12} \geqq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ ist. Es kann aber sehr wohl α_{12} grösser sein als eine der beiden Grössen α_1 oder α_2, ohne dass eine Mischung eintritt. Dabei sind jedoch die Fälle einer bei der Mischung stattfindenden Contraction, sowie einer nur teilweisen Mischung der Flüssigkeiten ausgeschlossen. Wn.

Van der Mensbrugghe. Interprétation théorique de l'effet produit par une couche mince d'huile, répandue à la surface de la mer, pour calmer l'agitation des flots. C. R. XCV. 1055-1056.

Breitet sich eine dünne Schicht reinen Wassers über einer Oelschicht aus, so wird die Oberflächenspannung, damit also die potentielle Energie der ganzen Masse vermehrt. Hierdurch aber ist ein Verlust an lebendiger Kraft bedingt. Das ist der Grund der im Titel genannten Erscheinung. Die Vermehrung der potentiellen Energie lässt sich aus vorhandenen Messungen numerisch bestimmen. Wn.

Capitel 2.
Akustik und Optik.

A. Akustik.

W. MATZKA. Kritische Berechnungen der musikalischen Töne und der diatonischen Tonleitern. Prag. Abh. (6) XI. B.

Eine sehr breite, elementare Erörterung, um die Intervalle der diatonischen Tonleiter zu ermitteln. Zunächst geht der Verfasser von einer gespannten Saite aus, die er um $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ etc. ihrer Länge verkürzt denkt. Die Verhältnisse der Schwingungszahlen der resultirenden Töne geben successive die gesuchten Intervalle. Eine zweite Art der Ermittelung stützt sich darauf, dass die einzelnen Töne durch Zahlenwerte repräsentirt werden, die Mittelwerte zwischen 1 und 2 darstellen, und deren Zähler und Nenner durch keine andern Primzahlen, als 2, 3, 5 teilbar sind. Für die Quinte und die unterhalb liegenden Töne werden die Mittelwerte so gebildet, dass die Zähler und die Nenner zweier Töne addirt werden, z. B. ergiebt sich für die Quinte als Mittelwert zwischen dem Grundton $\left(\frac{1}{1}\right)$ und der Octave $\left(\frac{2}{1}\right)$ die Zahl $\frac{3}{2}$ etc. An Stelle von $\frac{1}{1}$ wird dabei nach Bedürfnis $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$ etc. genommen. Die zwischen der Quinte $\left(\frac{3}{2}\right)$ und der Octave $\left(\frac{2}{1}\right)$ liegenden Mittelwerte dagegen werden nach dem Schema $\frac{3m+2n}{2m+n}$ gebildet. Endlich wird gezeigt, wie sich auch ohne den Begriff der Mittelwerte die gesuchten Zahlen aus den der zweiten Ermittelung zu Grunde liegenden Principien finden lassen. Wn.

— — —

E. BELTRAMI. Sulla teoria della scala diatonica. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 61-66.

Ist für den Grundton das Intervall der Octave bekannt $= \frac{1}{2}$, das der Terz und der Quinte unbekannt und resp. $= r, s$, so erhält man dadurch, dass man von s und von $\frac{1}{s}$ um Terz und Quint weiter geht, für die einzelnen Töne der Tonleiter die Intervalle

$$1,\ 2s^2,\ r,\ \frac{1}{2s},\ s,\ \frac{r}{2s},\ rs,\ \frac{1}{2}.$$

Es muss dann

$$1 > 2s^2 > r > \frac{1}{2s}$$

sein. Die einfachsten rationalen Zahlen, welche diese Aufstellungen erfüllen, sind $s = \frac{2}{3}$, $r = \frac{4}{5}$.

Wn.

SCHNELL. Harmonische Teilung und consonirender Dreiklang. Grunert Arch. LXVIII. 219-222.

Bei dem Durdreiklang (c, e, g) bilden die Schwingungszahlen, bei dem Molldreiklang ihre reciproken Werte (die entsprechenden Saitenlängen des Monochords) eine arithmetische Reihe erster Ordnung. Wn.

B. Theoretische Optik.

A. BEER. Einleitung in die höhere Optik. Zweite umgestaltete Auflage, bearbeitet von V. v. Lang. Braunschweig. Vieweg.

Der Bearbeiter der neuen Auflage des seit dreissig Jahren wohlbekannten Buches hat den bei der ersten Auflage verfolgten

Gang der Darstellung Abschnitt für Abschnitt beibehalten und im Allgemeinen auch an dem Inhalt nur geringe Aenderungen vorgenommen. Eine völlige Umarbeitung mussten jedoch, in Berücksichtigung der neueren Literatur, die Abschnitte erfahren, welche folgende Gegenstände behandeln: Die Brechungsverhältnisse der Gase, die Frauenhofer'schen Linien, das natürliche (nicht polarisirte) Licht, die analytische Ableitung der allgemeinen Gesetze der Lichtbewegung in Krystallen (hier ist statt der Cauchy'schen Darstellung diejenige gewählt, über die F. d. M. XII. 1880. p. 749-751 berichtet ist), das Dispersionsgesetz, die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Fortgelassen ist die in der ersten Auflage enthaltene Tabelle mit den Brechungsquotienten einfach brechender Körper und die Zusammenstellung der optischen Constanten krystallisirter Körper, weil diese Tabellen mit dem eigentlichen Zwecke des Buches in keinem Zusammenhange standen. In einem Anhange finden sich ziemlich vollständige Literaturverzeichnisse über Doppelbrechung und Dispersion; auch im Text enthält die neue Auflage mehr, resp. genauere Literaturnachweise, als die frühere. Jedenfalls hat das Buch durch die angeführten Aenderungen nichts von seiner Brauchbarkeit verloren. Wenn dasselbe auch nach wie vor nicht die ganze theoretische Optik behandelt, sondern einige wichtige Capitel ganz übergeht, ist es zur Einführung in das Studium jener Disciplin doch empfehlenswert. Wn.

E. Lecher. Ueber Ausstrahlung und Absorption. Wien. Ber. LXXXV. 441-490; Wien. Anz. 1882. 57-59; Wiedemann Ann. (2) XVII. 477-518.

Siehe Abschn. XI. Cap. 4. C.

G. Kirchhoff. Zur Theorie der Lichtstrahlen. Berl. Ber. 1882. 641-669.

Der vorliegende Aufsatz, dessen wesentlichen Inhalt Herr Kirchhoff schon seit Jahren in seinen Vorlesungen vorgetragen

hat, will die Theorie der Bildung der Lichtstrahlen, ihrer Reflexion und Brechung, sowie die Theorie der Beugungserscheinungen in strengerer Weise begründen, als dies bisher geschehen ist. Das wesentliche Hülfsmittel bei diesen Untersuchungen bietet ein Satz dar, der sich aus der Anwendung des Green'schen Satzes auf solche Functionen ergiebt, welche der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\}$$

genügen. Dieser Satz, der eine Präcisirung und Verallgemeinerung des sogenannten Huygens'schen Princips bildet, ist folgender: Genügt $\Phi(t)$ der Gleichung (1) innerhalb eines vollständig begrenzten Raumes, der frei von leuchtenden Punkten ist, ist ferner O ein Punkt im Innern dieses Raumes, ist r_0 die Entfernung des Punktes O von einem Punkte x, y, z der Grenzfläche s, ist endlich $\Phi_0(t)$ der Wert von $\Phi(t)$ im Punkte O, so ist

$$(2) \qquad 4\pi\, \Phi_0(t) = \int ds\, \Omega,$$

wo

$$(3) \qquad \Omega = \frac{\partial}{\partial N} \left\{ \frac{1}{r_0}\, \Phi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) \right\} - \frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)$$

ist. In (2) und (3) ist N die nach dem Innern des Raumes gerichtete Normale, ds ein Oberflächenelement der Grenzfläche s und

$$f(t) = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial N}.$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt, dass die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche s umschlossenen Raume angesehen werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche s. Der Satz lässt sich leicht ausdehnen auf den Fall, dass die leuchtenden Punkte innerhalb der Fläche s, der Punkt O ausserhalb liegt, ferner auf den Fall zweier geschlossener Flächen, die einen Teil gemeinsam haben und beide den Punkt O, aber nicht die leuchtenden Punkte umschliessen, oder umgekehrt.

Während in Gleichung (2) die Function Φ_0 eine beliebige

Lösung von (1) ist, die nur den bekannten Continuitätsbedingungen zu genügen hat, wird in Folgendem für Φ der Wert angenommen:

$$(4) \qquad \varphi = \frac{D}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \frac{D'}{r_1}\sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi.$$

Darin ist r_1 die Entfernung des Punktes x, y, z von einem festen Punkte x_1, y_1, z_1, D und D' hängen von der Richtung der Linie r_1 ab, sind aber im Uebrigen constant. Man kommt auf den Ausdruck (4), wenn man die bekannte particuläre Lösung von (1), welche einfache Kugelwellen darstellt, einmal oder mehrmals nach t differentiirt und dabei λ als eine kleine Grösse betrachtet, deren höhere Potenzen zu vernachlässigen sind. Ein Punkt 1 mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1, welcher transversale Wellen von der Art aussendet, dass die einzelnen Componenten die Form (4) haben, wird als leuchtender Punkt bezeichnet und im Weiteren stets als Lichtquelle angesehen. Es wird nun der Wert des in (2) vorkommenden $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über eine begrenzte Fläche s, abgeleitet für den Fall, dass die Function Φ durch φ ersetzt wird, wobei zunächst $D = 1$, $D' = 0$ gesetzt, nachher D als in beliebiger Weise von der Richtung abhängig angenommen wird. Wenn λ unendlich klein ist, wenn ferner für keinen endlichen Teil der Fläche s oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ constant ist, wenn endlich die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 nicht durch die Grenze der Fläche oder unendlich nahe an ihr vorbei geht, so verschwindet jenes Integral, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Fläche s nicht schneidet; dagegen hat das Integral den Wert $\pm 4\pi\varphi_0$, wenn ein solches Schneiden stattfindet. Dabei gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem die Normale N in dem Schnittpunkte einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der von 1 nach 0 gezogenen Geraden bildet.

Nach diesen Vorbereitungen (§§ 1-3) wird untersucht, wie das von einem leuchtenden Punkte 1 ausgehende Licht durch einen fremdartigen Körper modificirt wird. Zunächst wird (§ 4) der Fall betrachtet, dass jener Körper völlig schwarz ist, also Licht weder reflectirt, noch hindurchlässt. Es wird erörtert, welche

Werte die Functionen φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ an der Oberfläche des Körpers annehmen, und wie daraus die Erscheinung des Schattens, also die geradlinige Fortpflanzung der Lichtstrahlen folgt. Dass an der Grenze des Schattens Bewegungserscheinungen auftreten, ergiebt sich aus der Beschränkung, unter der oben der Wert des $\int ds.\Omega$ abgeleitet ist. Jene Ableitung gilt nicht mehr, wenn die Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 unendlich nahe an der Grenze der Fläche s vorbeigeht. Die genauere Erörterung dieses Ausnahmefalles führt (§ 5) auf die Grundformeln für die Beugungserscheinungen; diese werden unter Voraussetzung einer kleinen Oeffnung in einem ebenen Schirme und unter den üblichen vereinfachenden Annahmen abgeleitet. Für die durch Gitter hervorgebrachten Beugungsspectren gelten die zuletzt erwähnten Formeln nicht mehr, weil die Spalten des Gitters nicht mehr als sehr gross gegen eine Wellenlänge angenommen werden können. Welche Modification hier eintritt, wird im folgenden Abschnitt (§ 6) gezeigt. Die Lichtquelle sei ein leuchtender Punkt, der in unendlicher Entfernung auf dem in der Mitte des Gitters auf der Gitterebene errichteten Lothe liegt. Man kann die Grössen, die in diesem Falle an Stelle von D und D' der Gleichung (4) treten, als periodische Functionen von x (x in der Gitterebene senkrecht zu den einzelnen Spalten) annehmen und nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $\frac{x}{e}2\pi$ (e die Breite einer Spalte) entwickeln. Die einzelnen dadurch in φ_0 auftretenden Integrale verschwinden im Allgemeinen, wenn die ganze Gitterbreite gross gegen λ ist. Nur einzelne Richtungen sind ausgenommen. Daraus folgt, dass in einzelnen Punkten des Gesichtsfeldes, deren Lage sich leicht ergiebt, die Lichtintensität unendlich gross ist gegen die in allen andern Punkten des Gesichtsfeldes stattfindende.

Den Schluss (§ 7) der Arbeit bilden Auseinandersetzungen zur Erklärung der Reflexion. Als bekannt werden angenommen die Gesetze der Reflexion ebener Lichtwellen an einer Ebene;

man kann diese als eine Folge davon ansehen, dass zwischen den Verrückungen der Aetherteilchen in beiden Mitteln und deren Differentialquotienten, beide auf Punkte der Grenze bezogen, lineare homogene Gleichungen mit constanten Coefficienten bestehen. Unter Benutzung der obigen Hülfssätze ergeben sich daraus die Gesetze der Reflexion von Strahlen der Form (4) an beliebigen Flächen. Die analoge Betrachtung für die Brechung ist nicht ausgeführt, würde sich aber in derselben Weise erledigen lassen. Wn.

J. Fröhlich. Experimentaluntersuchungen über die Intensität des gebeugten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XV. 576-613.

Die Arbeit beginnt mit einem experimentellen Teile, in dem gezeigt wird, dass die beobachteten Intensitäten der Hauptmaxima mit der gewöhnlichen Beugungstheorie in Widerspruch stehen. Daran schliesst sich eine theoretische Erörterung zur Aufklärung dieses Widerspruchs. Zu dem Zwecke wird nach dem Vorgange von Kirchhoff mit Hülfe des Green'schen Satzes der Schwingungszustand in einem beliebigen Punkte eines allseitig begrenzten Raumes ausgedrückt durch den Schwingungszustand an der Grenze, resp. dessen Differentialquotienten nach der Normale. Der so gefundene Ausdruck wird angewandt auf den Fall, dass der betrachtete Punkt von der Lichtquelle durch ein Gitter getrennt ist. Dabei wird die Voraussetzung gemacht, dass Kugelwellen, die das Gitter treffen, dort eine sehr schnelle Aenderung der Amplitude und Phase erleiden. Diese Aenderung denkt der Verfasser durch eine Fourier'sche Reihe ausgedrückt, deren unbekannte Coefficienten auch in dem schliesslichen Ausdruck für die Lichtintensität des betrachteten Punktes auftreten. Vergleicht man diesen Intensitätsausdruck mit den Beobachtungen, so findet sich, was wohl von vorn herein zu vermuten, dass von jenen unbekannten Coefficienten so viele berechnet werden können, als Beobachtungsdata vorliegen, dass man daher unendlich viele verschiedene Functionen für die oben genannten Aenderungen

annehmen kann, deren jede die Beobachtungsdaten mit gleicher Genauigkeit wiedergiebt. Jene nicht näher zu bestimmenden Aenderungen erklären die Abweichungen der Beobachtungen von der früheren Theorie, die zwar die Lage der Maxima und Minima genügend genau ergiebt, nicht aber die Grösse der Intensitäten.

Zu dem Aufsatze des Herrn Fröhlich ist zu bemerken, dass dasselbe Problem von Herrn G. Kirchhoff in seiner Arbeit über die Lichtstrahlen (cf. das vorhergehende Referat) absolvirt ist, und zwar nach des Referenten Ansicht in eleganterer und strengerer Weise. Wn.

H. Struve. Fresnel's Interferenzerscheinungen theoretisch und experimentell bearbeitet. Diss Dorpat. 1881. Wiedemann Ann. (2) XV. 49-80.

Der Verfasser geht von demselben Grundgedanken aus, den zuerst Herr H. F. Weber in seiner Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen (Wiedemann Ann. (2) VIII. 401-444, cf. F. d. M. XI. 1879. 741-744) ausgesprochen, dass nämlich die Berücksichtigung der Diffraction für diese Theorie wesentlich sei. Er gelangt jedoch zu den Weber'schen Endformeln auf viel einfacherem Wege, und ausserdem gelingt es ihm, die Weber'schen Resultate nach zwei Seiten hin zu verallgemeinern. Es geschieht dies dadurch, dass von vorn herein das Problem als eine Verallgemeinerung einer bekannten Aufgabe aus der Theorie der Fresnel'schen Beugungserscheinungen aufgefasst wird. Während nämlich bei den Beugungserscheinungen die Intensität in einem Punkte P zu bestimmen ist, wenn die von einem leuchtenden Punkte L ausgehenden Lichtstrahlen durch eine rechteckige Oeffnung gebeugt sind, so treten hier nur an Stelle der einen zwei gleiche rechteckige Oeffnungen, deren längere parallele Seiten durch einen kleinen Zwischenraum, die beugende Kante, getrennt sind. Ferner sind zwei leuchtende Punkte vorhanden, deren jeder sein Licht nach einer der Oeffnung sendet. Diese Punkte, die verschiedene Entfernungen von der beugenden Kante haben, machen gleichartige Schwingungen, aber von verschiedener Phase.

In Folge dieser Fassung des Problems ist die weitere Behandlung desselben in ebenso einfacher Weise möglich, wie bei den gewöhnlichen Beugungserscheinungen. Ebenso wie bei diesen ergiebt sich der Ausdruck für die Intensität in einem beliebigen Punkte, ein Ausdruck, der dann durch die üblichen vereinfachenden Annahmen weiter reducirt wird. Dadurch wird die Betrachtung der complicirten, den Bessel'schen Functionen verwandten Transcendente, auf die Herr Weber das Problem zurückgeführt hatte, überflüssig. Statt dieser Transcendente treten hier vielmehr, und das ist eine wesentliche Vereinfachung, in dem Ausdruck für die Lichtintensität die beiden Functionen

$$M(v) = \int_v^\infty \cos(\xi^2 - v^2)\,d\xi, \quad N(v) = \int_v^\infty \sin(\xi^2 - v^2)\,d\xi$$

auf, welche mit den gewöhnlichen Fresnel'schen Integralen durch einfache Relationen zusammenhängen, sich aber vor denselben dadurch auszeichnen, dass sie für positive Argumente v keine periodische, sondern eine stetige Abnahme besitzen. Dies wird daraus abgeleitet, dass für positive Argumente v jene Functionen auf die Form gebracht werden können:

$$M(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2 c^{-v^2 x^2} dx}{1+x^4}, \quad N(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-v^2 x^2} dx}{1+x^4}.$$

Weiter folgen aus dieser Form unmittelbar die Cauchy'schen semiconvergenten Reihen zur Berechnung von M und N für positive v, während die Functionswerte für negative Argumente mit denjenigen für positive Argumente durch die Relationen zusammenhängen:

$$M(-v) = \sqrt{\pi} \sin\left(v^2 + \frac{\pi}{4}\right) - M(v),$$

$$N(-v) = \sqrt{\pi} \cos\left(v^2 + \frac{\pi}{4}\right) - N(v).$$

Auf die besprochenen Eigenschaften der Functionen M und N stützt sich die Discussion des Intensitätsausdrucks; und aus dieser Discussion ergeben sich nicht nur die Weber'schen Resultate, sondern auch Verallgemeinerungen derselben, die darin bestehen,

dass die virtuellen Lichtpunkte nicht gleiche, sondern verschiedene Abstände von der beugenden Kante haben, und dass die beugende Kante keine mathematische Linie ist, sondern eine im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts nicht zu vernachlässigende Breite besitzt. In dem Falle, wo der Interferenzapparat ein Doppelspiegel ist, sind diese Annahmen gleichbedeutend damit, dass die mathematische Durchschnittslinie der Spiegelebenen nicht mit der beugenden Kante zusammenfällt, und dass die beiden Spiegel nicht vollständig an einander grenzen. Die Untersuchung des Einflusses, den eine gewisse Breite der beugenden Kante auf die Erscheinungen ausübt, ist aber nötig, wenn man die Fresnel'schen Interferenzerscheinungen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ mit der Theorie vergleichen will.

Den Schluss der Arbeit, deren Resultate im Einzelnen mitzuteilen hier zu weit führen würde, bilden Messungen zur Vergleichung der theoretischen Ergebnisse mit der Erfahrung.

Wn.

A. Lindstedt. Zur Theorie der Fresnel'schen Integrale. Wiedemann Ann. (2) XVII 720-725.

Der Verfasser hat eine Tafel für die mit den Fresnel'schen Integralen verwandten Functionen $M(v)$, $N(v)$ (vergleiche das vorhergehende Referat) berechnet, die für $v = \sqrt{\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\pi}$ das Intervall $\beta = 0$ bis $\beta = 8{,}9$ umfasst. Zur Berechnung dienen für grosse Werte von v die bekannten semiconvergenten Reihen, während für kleinere Werte des Arguments neue Recursionsformeln aufgestellt werden, die eine bequeme Berechnung gestatten.

Wn.

H. Struve. Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. Petersb. Mém. XXX. No. 8.

H. Struve. Beitrag zur Theorie der Diffraction an Fernröhren. Wiedemann Ann. (2) XVII. 1008-1016.

In der ersten der beiden Arbeiten, die dem Referenten nicht zugänglich war, hat der Verfasser, wie er im Eingang der zweiten Arbeit erwähnt, unter anderem die Intensitätsverteilung in der Focalebene eines Fernrohrs für den besonderen Fall untersucht, dass das geometrische Focalbild der Lichtscheibe geradlinig begrenzt ist und in allen Teilen dieselbe specifische Intensität besitzt. Die Aufgabe führte auf die Bestimmung eines Doppelintegrals der Bessel'schen Function $J_1(z)$ und wurde mit Hülfe von Reihenentwickelungen ausgeführt. Dieselbe Aufgabe nun wird in der zweiten Arbeit auf directerem Wege und in eleganterer Form gelöst. Aus dem bekannten Ausdruck für die Intensität, welche ein Lichtpunkt bei der Beugung durch die kreisförmige Oeffnung des Fernrohrs in einem beliebigen Punkte der Focalebene hervorbringt, ergiebt sich durch Integration für die von einer Lichtlinie herrührende Intensität ein Ausdruck von der Form

$$(1) \qquad I = C\int_z^\infty \frac{[J_1(x)]^2 dx}{x\sqrt{x^2-z^2}}.$$

Durch verschiedene Umformungen, bei denen neben anderen bekannten Formeln die Neumann'sche Darstellung von $[J_1(x)]^2$ durch ein Integral von $J_2(x)$, sowie das Mehler'sche Integral für $J_0(x)$ (cf. F. d. M. IV. 1872. p. 227) benutzt werden, gelangt man zu dem Resultate:

$$(2) \qquad I = \frac{3}{8}\pi\frac{H_1(2z)}{z^2},$$

wo

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\sin\beta)\cos^2 s\, d\beta$$

eine mit den Bessel'schen Functionen nahe verwandte Function ist. Für $H_1(z)$ wird noch eine andere Integraldarstellung mitgeteilt, ferner eine convergente und eine semiconvergente Reihenentwickelung, endlich eine Recursionsformel, die $H_1(z)$ mit der Function

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\sin\beta)\, d\beta$$

verbindet. Aus (2) folgt durch Integration nach z zwischen den Grenzen z und ∞ die Intensitätserteilung an einer geradlinig begrenzten homogenen Lichtscheibe (Kreisscheibe von unendlich grossem Radius). Für dies Integral ergeben sich aus den oben erwähnten Reihen für $H_1(z)$ analoge Reihen, die unmittelbar zu genäherten Ausdrücken für die gesuchte Intensität führen.

Zum Schluss wird angedeutet, wie man auf analoge Weise ein allgemeineres Integral entwickeln kann, das aus (1) entsteht, wenn dort $J_n(ax).J_n(bx)$ an Stelle von $\{J_1(x)\}^2$ tritt. Dies allgemeinere Integral würde seine Anwendung bei einer ringförmigen Objectivöffnung finden. Wn.

J. Delsaux. Sur une propriété de la diffraction des ondes planes dans les systèmes de petites ouvertures. Brux. S. sc. VI. B. 1-8.

Verallgemeinerung von Eigenschaften, die für einen besondern Fall aufgestellt waren. Man vergleiche „Billet, Optique physique" I. p. 224. Mn. (O.).

W. König. Ueber die elliptische Polarisation des reflectirt gebeugten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XVII. 1016-1036.

Die wesentlich experimentelle Arbeit enthält eine theoretische Entwickelung, die sich eng an eine Arbeit von Réthy (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 770) anschliesst. An Stelle der von Réthy betrachteten Kugelwellen geradlinig polarisirten Lichts treten hier nur solche elliptisch polarisirten Lichts. Wn.

Gouy. Sur la propagation des ondes lumineuses, en égard à la dispersion. Résal J. (3) VIII. 335-356.

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit war vom Verfasser bereits im Jahre 1880 in den C. R. ohne Beweis veröffentlicht und von Herrn Cornu bekämpft (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 749). Hier tritt nun deutlicher hervor, was der Verfasser meint;

er unterscheidet nämlich in Bezug auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwei verschiedene Begriffe, 1) die individuelle Geschwindigkeit einer einzelnen Welle, die $= \frac{\lambda}{T}$ ist, wenn λ die Wellenlänge, T die Vibrationsdauer; 2) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtintensität bei dem Zusammenwirken einer Zahl von Wellen, die zusammen nahezu homogenes Licht ergeben. Diese soll

$$= \frac{\lambda}{T} - \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda}$$

sein. Es wird dies folgendermassen begründet. Die Bewegung, welche eine einzelne ebene Welle von der Fortpflanzungsrichtung x hervorbringt, sei dargestellt durch die Gleichung

$$(1) \qquad \eta = A\sin(Kx - St) + B\cos(Kx - St),$$

wobei zwischen den Constanten S und K eine Gleichung von der Form

$$(2) \qquad S = F(K)$$

stattfindet. Wirken unzählig viele ebene Wellen mit verschiedenem K zu gleicher Zeit, so ist die Verrückung eines Punktes

$$(3) \qquad \eta = \int_0^\infty \{\varphi_1(K)\sin(Kx - St) + \varphi_2(K)\cos(Kx - St)\}\, dK;$$

die Functionen φ_1 und φ_2 sind durch den Anfangszustand des Mediums bestimmt. Die durch (3) dargestellte Lichtbewegung erzeugt nahezu homogenes Licht, wenn die Functionen φ_1 und φ_2 für alle Werte von K verschwinden, ausser für solche K, die zwischen $K_0 - \varepsilon$ und $K_0 + \varepsilon$ liegen, unter ε eine kleine Grösse verstanden. Unter der Voraussetzung, dass diese Bedingung erfüllt ist, wird die Gleichung (3) in die Form gebracht

$$(4) \qquad \eta = \mathfrak{F}(x,t)\sin[K_0 x - S_0 t + \chi(x,t)].$$

Die hierdurch repräsentirte Bewegung, deren Intensität

$$(5) \qquad I = \frac{1}{2\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 dt$$

ist, wird gedeutet als eine Wellenbewegung mit veränderlicher

Wellenlänge, Amplitude und Phase; und zwar sind die Aenderungen dieser Grössen langsame. Denkt man nun die rechte Seite von (2) nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von $K-K_0$ entwickelt und bricht schon nach der ersten Potenz von $K-K_0$ ab, so enthalten die in (4) vorkommenden Functionen F und χ die Variabeln x und t nur in der Verbindung $x-tF'(K_0)$, und auch die Intensität I wird ein Ausdruck der Form

$$I = f[x-tF'(K_0)].$$

Die Gleichung (4) stellt dann eine Wellenbewegung dar, die sich mit der Geschwindigkeit $v = F'(K_0)$ fortpflanzt. Diese Näherung genügt indessen nur, wenn das Licht sehr nahe homogen ist; in den meisten Fällen wird eine weitere Näherung nötig. Behält man daher in der obigen Entwickelung von S noch das Glied $(K-K_0)^2$ bei, so erhält man für die Functionen $F(x,t)\cos\chi(x,t)$ und $F(x,t)\sin(\chi(x,t))$ Reihen, die nach Potenzen von t fortschreiten, während ihre Coefficienten Functionen des Arguments $x-tF'(K_0)$ sind. Vernachlässigt man hier die zweiten und höheren Potenzen von t, so folgt für die Fortpflanzungeschwindigkeit, die vorher $F'(K_0)$ war, der Wert:

$$V = F'(K_0) + F''(K_0)\frac{d\chi(x-tF'(K_0))}{dx}$$

$$= F'(K_0) + \left(\frac{2\pi}{\lambda} - K_0\right)F''(K_0) = F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right),$$

falls λ die Wellenlänge der durch (4) repräsentirten Bewegung ist. Vermöge der Bedeutung von F kann man schreiben

$$V = \frac{dS}{dK} = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda}{T} - \lambda\frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda}.$$

Ist $n = \frac{\lambda}{\lambda'}$ der Brechungsexponent beim Uebergang von einem Medium in ein andres, so ist das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in beiden Medien

$$\frac{V}{V'} = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}.$$

Referent hält die Resultate der Arbeit noch immer für unannehmbar, die oben skizzirte Begründung für nicht stichhaltig.

Wn.

E. Lommel. Theorie der elliptischen Doppelbrechung. Wiedemann Ann. (2) XV. 378-390.

Die Grundlage der Untersuchung bilden, abgesehen von geringen hier angebrachten Modificationen, die Gleichungen, von denen der Verfasser in seiner Theorie der Doppelbrechung ausgegangen war (cfr. F. d. M. X. 1878. 696). Die Modificationen bestehen darin, dass 1) die Gleichungen nicht auf die Hauptelasticitätsaxen bezogen werden, sondern auf solche Axen, dass z die Fortpflanzungsrichtung ist, und dass 2) jeder der beiden Gleichungen für die Bewegung der ponderablen Molecüle noch ein Zusatzglied hinzugefügt ist, herrührend von dem schraubenförmigen Bau der Molecüle, während die Gleichungen für die Bewegung der Aethermolecüle ungeändert bleiben. Die eben erwähnten Zusatzglieder sind von derselben Form, wie in der im vorigen Bande des Jahrbuchs besprochenen Arbeit des Verfassers (cfr. F. d. M. XIII. 1881. p. 751). Für die Componenten der Schwingungen der Aether- und Körpertheilchen wird der Ausdruck

$$l = e^{-\left(\kappa + \frac{q}{c}i\right)z + qit}$$

angenommen, je mit einer Constanten multiplicirt, und es wird dann untersucht, unter welchen Bedingungen diese Ausdrücke den obigen Grundgleichungen genügen. Es ergiebt sich, dass die Bewegungen der Aethermolecüle in zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirten Wellen bestehen, deren Bahnellipsen einander ähnlich, aber um einen rechten Winkel gegen einander gedreht sind, und die mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortschreiten. Weiter werden die Ausdrücke für die Axenrichtungen, das Axenverhältnis der Ellipsen, der Phasenunterschied beider Wellen etc. genauer discutirt und mit Beobachtungen von Jamin verglichen.

Wn.

E. Ketteler. Einige Bemerkungen zu Arbeiten der Herrn Lommel, Glazebrook und Mathieu. Wiedemann Ann. (2) XV. 613-623.

E. Lommel. Zur Theorie des Lichts. Wiedemann Ann. (2) XVI. 427-441.

Die Bemerkungen des Herrn Ketteler sind vorzugsweise gegen Herrn Lommel's optische Arbeiten (cfr. F. d. M. X. p 692, XI. p. 739, XII. p. 772, XIII. p. 751, sowie das vorhergehende Referat) gerichtet. Gegen die darin erhobenen Angriffe vertheidigt Herr Lommel seine Theorie und weist jene Bemerkungen sämmtlich als ungerechtfertigt zurück. Es handelt sich um folgende Einwände. Ketteler bemerkt, Lommel's zweiconstantige Dispersionsformel sei nicht leistungsfähig und stimme mit den Beobachtungen nicht überein, da sie mit seiner, Ketteler's, Dispersionsformel nicht übereinstimme. Diesen Schluss weist Lommel durch directe Vergleichung seiner Formel mit den Beobachtungen als falsch nach. Ketteler setzt ferner an Lommel's Theorie aus, dass sie nur einfache Mittel (solche mit einem einzigen Absorptionsgebiet) behandeln könne, und diese kämen in der Natur nicht vor. Demgegenüber bemerkt Lommel, dass, da er jedem Molecül drei Eigenschwingungen von verschiedener Periode beilege, ein aus solchen Molecülen bestehendes Medium drei Absorptionsstreifen besitze. Auch sei der Uebergang auf Körper, die aus Molecülen beliebig verschiedener Arten bestehen, sehr nahe liegend. Eine nebenbei gemachte Bemerkung Ketteler's, Lommel's Theorie fordere, dass ein Gas an der Grenze seiner Verdünnung einen unendlich grossen Extinctionscoefficienten habe, wird als völlig unzutreffend zurückgewiesen.

Eine weitere Bemerkung Ketteler's sagt, Lommel könne ihm auf das katoptrische Gebiet der undurchsichtigen Mittel nicht folgen; Lommel kenne nur Fresnel's Intensitätsformeln für das gespiegelte Licht, nicht aber die allgemeinen Formeln für Reflexion an absorbirenden Medien, auch nicht die Abhängigkeit des Extinctions- und Refractionscoefficienten vom Einfallswinkel. Lommel erwidert, er habe nur über diesen Teil der Theorie bis-

her noch nichts veröffentlicht, da er zuvor das Einfachere, die Lichtbewegung innerhalb eines einzelnen Mediums habe absolviren wollen. Er habe aber auch schon den Uebergang aus einem Medium in ein anderes behandelt. Aus einer darüber demnächst zu veröffentlichenden Arbeit teilt er als erwähnenswertes neues Resultat mit, dass zu dem Brechungsgesetze der Wellennormale ein analoges Gesetz für die Brechung der Absorptionsnormale hinzutrete. Dadurch gelange er zu Formeln, die noch allgemeiner seien, als die Ketteler's. Uebrigens stehe er, was die Reflexionstheorie betreffe, im Wesentlichen auf Ketteler's Standpunkt, dessen Verdienste in diesem Teile er anerkenne. Dagegen müsse er sich seinerseits gegen die Grundlagen von Ketteler's Dispersionstheorie wenden. Die von Ketteler an die Spitze seiner Theorie gestellten Gleichungen (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 758, 759; gegen die Begründung dieser Gleichungen hat auch Referent wiederholt Bedenken geäussert) seien nicht aus der Mechanik abgeleitet, sondern Forderungen, die Ketteler formulirt habe, um ihnen ohne weitere Begründung den Rang dioptrischer Grundgesetze zu vindiciren. Ferner arbeite Ketteler mit Differentialgleichungen, welche eine willkürliche Constante, die erst im Integral auftreten sollte, bereits enthielten.

Ein letzter Einwurf von Ketteler, der sich gegen Lommel's Fluorescenztheorie richtet, wird gleichfalls als unhaltbar nachgewiesen.

Ausser gegen Lommel wendet sich Ketteler auch gegen die Reflexionstheorieen von Glazebrook und Mathieu (cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 749). Er findet es verwunderlich, dass diese Autoren auf den Standpunkt F. Neumann's zurückgehen. Auch halte er für falsch, dass Mathieu bei der Reflexion einen Verlust an lebendiger Kraft postulire. Eine genügende Begründung dieses Urteils wird nicht mitgeteilt. Wn.

W. Voigt. Bemerkungen zu Herrn E. Lommel's Theorie der Doppelbrechung, der Drehung der Polarisationsebene und der elliptischen Doppelbrechung. Wiedemann Ann. (2) XVII. 468-476.

Herr Voigt erhebt gegen die Grundlagen der Lommel'schen Lichttheorie Einwände, die nach des Referenten Ansicht gewichtiger sind, als die von Ketteler (cf. das vorhergehende Referat) erhobenen. In Lommel's Theorie ist es unerlässlich, die Dichtigkeit des Aethers als sehr klein gegenüber derjenigen ponderabler Körper anzunehmen. Diese Annahme führt aber zu der Folgerung, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes den grössten Wert hat für Licht von kleinster Schwingungsdauer, sowie dass mit verschwindender Absorption auch die Dispersion verschwindet. Beide Folgerungen stehen in directem Widerspruch mit der Erfahrung.

Ein weiteres Bedenken knüpft sich daran, dass die Kräfte, welche nach Lommel zwischen den ponderablen Molecülen wirken, solche sind, die ihrerseits die Erscheinungen der Elasticität nicht erklären. Abgesehen davon, dass die Einführung dieser Kräfte bei Lommel nicht genügend motivirt ist, beruht auch die einzig mögliche Deutung jener Kräfte, die Helmholtz in seiner Arbeit über anomale Dispersion (cfr. F. d. M. VI. 1874. p. 654) giebt, auf Vorstellungen, die denjenigen widersprechen, welche der erprobten allgemeinen Elasticitätstheorie zu Grunde liegen. Ein ganz analoges Bedenken wird gegen die Widerstandskraft erhoben, die Lommel einführt, um die Drehung der Polarisationsebene zu erklären. Eine letzte Bemerkung bezieht sich auf die Reibungskraft, die Lommel zwischen Aether- und Körpertheilchen wirkend annimmt. Diese ist von Lommel mit falschem Vorzeichen eingeführt. Die Einführung des richtigen Vorzeichens würde eine umständliche Correctur aller Formeln erfordern. Wn.

E. Ketteler. Theorie der circular- und elliptisch-polarisirenden Mittel. Wiedemann Ann. (2) XVI. 86-128.

Der erste Abschnitt behandelt die Lichtbewegung in einem gewöhnlichen circular polarisirenden Medium. Die zu Grunde gelegten Gleichungen haben wesentlich die schon früher von Herrn Ketteler benutzte Form (cfr. F. d. M. XII. 1880. p. 758), nur dass für die Bewegung der Körpermolecüle Kräfte ähnlicher

Art hinzugefügt werden, wie sie von Lommel (cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 751) benutzt sind. Fällt die z-Axe mit dem Lichtstrahle zusammen, so ergiebt das sogenannte Gesetz der Verwandlung der Schwingungsarbeit des Aethers die Gleichungen

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} m \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta s + \Sigma m' \dfrac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} \delta s' = e\left(\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) \delta s, \\ m \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta s + \Sigma m' \dfrac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} \delta s' = e\left(\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right) \delta s, \end{cases}$$

während das Gesetz der Verwandlung der Schwingungsarbeit der Molecularkräfte der Körperteilchen für jede einzelne Molecularqualität Gleichungen der Form ergiebt:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} m \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta\mathfrak{s} + m' \dfrac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} \delta\mathfrak{s}' \\ \qquad = -\left(\varkappa \xi' + \gamma \dfrac{\partial \xi'}{\partial t}\right) \delta\mathfrak{s}' - \left(\mathfrak{f} \eta' + \mathfrak{g} \dfrac{\partial \eta'}{\partial t}\right) \delta\mathfrak{s}', \\ m \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta\mathfrak{s} + m' \dfrac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} \delta\mathfrak{s}' \\ \qquad = -\left(\varkappa \eta' + \gamma \dfrac{\partial \eta'}{\partial t}\right) \delta\mathfrak{s}' + \left(\mathfrak{f} \xi' + \mathfrak{g} \dfrac{\partial \xi'}{\partial t}\right) \delta\mathfrak{s}'. \end{cases}$$

Darin bedeuten ξ, η die Schwingungscomponenten der Aether-, ξ', η' die der Körperteilchen, m, m' ihre Massen. Die Grössen e, $\varkappa$, γ, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ sind Constanten. Endlich bedeuten δs, $\delta s'$, $\delta\mathfrak{s}$, $\delta\mathfrak{s}'$ kleine Verrückungen, deren resp. Verhältnisse als für das Mittel charakteristisch gleichfalls als gegeben vorausgesetzt werden. Die vier, die Constanten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ enthaltenden Glieder sind zu den früheren Gleichungen des Verfassers neu hinzugetreten. Es wird nun untersucht, unter welchen Bedingungen man den Gleichungen (I), (II), (denen nach des Referenten Ansicht eine genügende mechaniche Begründung bisher noch fehlt) genügen kann durch

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} bz} \cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{az}{\lambda}\right)\right], \\ \eta = \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} bz} \sin\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{az}{\lambda}\right)\right], \\ \xi' = \mathfrak{A}'_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} bz} \cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{az}{\lambda}\right) - \Delta_x\right], \\ \eta' = \mathfrak{A}'_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} bz} \sin\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{az}{\lambda}\right) - \Delta_y\right]. \end{cases}$$

Im Allgemeinen beschreiben die Aether- und Körperteilchen confocale Ellipsen in demselben Sinne. In den besonderen Fällen $\mathfrak{f} = 0$ oder $\mathfrak{g} = 0$ gehen diese in Kreise über. Je nach dem Sinne, in dem diese Kreise durchlaufen werden, ist das Amplitudenverhältnis der Aether- und Körperteilchen nebst dem Gangunterschiede Δ verschieden; somit ist für beide Fälle auch der Refractionscoefficient a und der Extinctionscoefficient b für rechtsläufige Schwingungen ein anderer, als für linksläufige. Die für die Abhängigkeit dieser Coefficienten von der Wellenlänge λ sich ergebenden Formeln werden eingehend discutirt.

Im zweiten Abschnitt werden die magnetischen Mittel betrachtet. Die zu Grunde liegenden Gleichungen sind von ganz ähnlicher Form wie die obigen Gleichungen (I) und (II), nur dass $\mathfrak{f} = 0$ gesetzt wird. Dieselben Gleichungen, nur wenig modificirt, dienen sodann (dritter Abschnitt) zur Untersuchung einaxig krystallinischer Mittel, welche elliptisch polarisiren, während in den beiden letzten Abschnitten die Gleichungen des ersten zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene, sowie der circularen Reflexion und Refraction für senkrechte Incidenz angewandt werden. Die Einzelresultate dieser Untersuchungen hier mitzuteilen, würde zu weit führen. Wn.

A. Wüllner. Zur Dispersion farblos durchsichtiger Medien. Wiedemann Ann. (2) XVII. 580-587.

Der von Helmholtz in seiner Theorie der anomalen Dispersion (cf. F. d. M. VI. 1874. p. 654) abgeleitete Dispersionsformel wird umgeformt und dann auf farblos durchsichtige Medien, d. h. auf solche, für die der Absorptionscoefficient verschwindet, angewandt. Für diese ergiebt sich folgende Dispersionsformel:

$$n^2 - 1 = -P\lambda^2 + Q\frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Eine Vergleichung dieser Formel mit den Beobachtungen ergiebt weiter, dass für alle untersuchten Substanzen P und Q sehr nahe gleich sind. Setzt man beide gleich, so geht die Formel in

eine schon von Lommel abgeleitete über (cfr. F. d. M. XI. 1879. p. 739). Wn.

R. F. Glazebrook. On the refraction of plane polarised light at the surface of a uniaxal crystal. Phil. Trans. CLXXIII. 595-620.

Die Arbeit ist grösstenteils experimentell. Der Verfasser bemerkt, dass die Gesetze der Reflexion und Brechung des polarisirten Lichtes an einer Krystallfläche aus der elektromagnetischen Lichttheorie von Lorentz (Schlömilch Z. XXII.; s. F. d. M. X. 1878. 689), Fitzgerald (Phil. Trans. CLXXI.; cf. F. d. M. XII. 1880. 751) und ihm selbst (Camb. Proc. 1881) abgeleitet sind. Er recapitulirt die Formeln, zu denen er früher gelangt war, und formt sie so um, wie es die besonderenBeobachtungsbedingungen erfordern. Zwei längere Beobachtungsreihen, die im Herbst 1880 und im Sommer 1881 angestellt sind, führen dann zu dem Ergebnis, dass die Formeln, zu denen die elektromagnetische Lichttheorie hinsichtlich der Beziehung gelangt, in welcher die Polarisationsebene des einfallenden zu der des an der Oberfläche eines einaxigen Krystalls gebrochenen Strahles steht, nicht genau sind, sondern die Erscheinung nur angenähert wiedergeben. Die Formeln sind dieselben, wie die von Neumann, MacCullagh, Kirchhoff und Anderen aus verschiedenen Hypothesen über die Natur des Aethers abgeleiteten. Im Falle eines isotropen brechenden Mediums stimmen dieselben, was die Lage der Polarisationsebene des reflectirten Strahles betrifft, mit Fresnel's Formeln überein, nicht aber für den gebrochenen Strahl. Cly. (Wn.).

R. J. Glazebrook. On some equations connected with the electromagnetic theory of light. Cambr. Proc. IV. 155-167.

Das Problem der Reflexion und Refraction des Lichtes nach Maxwell's Theorie ist von Lorentz behandelt worden (Schlömilch Z. XXII.), dann von J. J. Thomson (Phil. Mag. 1880), wenigstens

insofern, als isotrope Medien in Betracht kommen, und dann auch von Fitzgerald (Phil. Trans. 1881). Die vorliegende Arbeit giebt eine Methode, die Intensität der reflectirten und gebrochnen ebenen Wellen im allgemeinsten Falle zu gewinnen, nämlich die einer Welle, welche in einem krystallinischen Medium auf die Oberfläche eines anderen Krystalls einfällt. Diese Methode ist einfacher als die Methode von Lorentz oder Fitzgerald. Einige Resultate sind in einer Form ausgedrückt, dass sie sofort experimentell verificirt werden können. Glr. (O.).

A. C. VAN RIJN VAN ALKEMADE. De elliptische polarisatie bij de terugkaatsing van het licht door doorschynende middenstoffen. Diss. Leiden.

Die Dissertation handelt über die elliptische Polarisation bei der Reflexion des Lichtes an der Oberfläche durchscheinender Mittel. Der bekannte Satz von Fresnel lässt einige Umstände, welche auf diese Reflexion von Einfluss sind, ausser Acht. Cauchy hat dies zu verbessern gesucht, indem er longitudinale Schwingungen einführte, was aber nicht ausreicht wegen der Schwierigkeiten, welche seine Aethertheorie mit sich bringt. Deshalb giebt der Verfasser der elektromagnetischen Theorie von Maxwell den Vorzug, wobei aber die Schwierigkeit entsteht, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Oscillationen von einer Constanten abhängt, welche von Helmholtz in die Formel für die Inductionswirkung dreier Stromelemente eingeführt ist, und deren Wert man noch nicht hat bestimmen können, so dass damit die Existenz von longitudinalen Schwingungen zweifelhaft wird. Es wird gezeigt, dass, wenn longitudinale Schwingungen möglich sind, ihr Einfluss jedenfalls klein ist im Vergleich zu dem von Lorentz in Kopenhagen gefundenen Umstand, dass beide Mittel, an deren Grenzfläche das Licht reflectirt wird, nicht scharf von einander getrennt sind, sondern dass daselbst ein allmählicher Uebergang stattfindet. Weiter wird untersucht, in wiefern eine wenn auch noch so schwache Absorption des Lichtes zu der beobachteten elliptischen Polarisation beitragen kann, zunächst,

weil die elliptische Polarisation bei Metallen aus ihrer Undurchdringlichkeit erklärt wird, und ferner, weil u. A. nach den Versuchen von Wiedemann auch andere stark absorbirende Mittel eine starke elliptische Polarisation zeigen. Aus der ausführlichen Bezeichnung ergiebt sich indessen, dass diese Absorption zur Erklärung der elliptischen Polarisation nicht beitragen kann. Die Dissertation zeichnet sich durch klare Auseinandersetzung und gründliche Behandlung des wichtigen Gegenstandes aus.

G.

F. Lippich. Ueber polaristrobometrische Methoden.
Wien Ber. LXXXV. 268-326.

Bringt man zwei Polarisatoren in gekreuzter Stellung vor das Auge, so erscheint das Gesichtsfeld nicht gleichmässig dunkel, sondern von den dunkelsten Stellen aus nimmt die Helligkeit in verschiedener Weise zu. Der Grund dafür liegt darin, dass ein Polarisator entweder nur für eine einzige Strahlenrichtung genau geradlinig polarisirtes Licht giebt, oder dass, wenn für alle Strahlenrichtungen innerhalb gewisser Grenzen das Licht geradlinig polarisirt ist (wie es bei Anwendung doppelbrechender Medien der Fall ist), die Polarisationsebenen der einzelnen Strahlenrichtungen in ihrer Orientirung von einander abweichen. Welchen Einfluss dieser Umstand auf die Helligkeitsverteilung im Gesichtsfelde gekreuzter Polarisatoren hat, wie ferner die Helligkeitsverteilung von der Natur der Polarisatoren und der speciellen Versuchsanordnung abhängt (die Erscheinung ist z. B. verschieden, je nachdem die Polarisatoren in paralleles Licht gestellt sind oder nicht), wird in der vorliegenden Arbeit eingehend erörtert. Damit wird eine theoretische Grundlage für die Construction eines Polarimeters geschaffen, sowie auch manche Wahrnehmungen, die bei Verwendung der üblichen Polarimeter gemacht sind, ihre Erklärung finden. Da die Resultate mehr von physikalischem, als mathematischem Interesse sind, so übergehen wir die Einzelheiten.

Wn.

A. MICHELSON. Sur le mouvement relatif de la terre et de l'éther. C. R. XCIV. 520-523.

In der Theorie der Aberration des Lichtes wird angenommen, dass der Aether sich in stationärem Zustande befindet. Der Verfasser legt dar, wie er hoffte, die Richtigkeit dieser Hypothese dadurch prüfen zu können, dass er zwei Strahlen interferiren liess, welche in der Luft dieselbe Strecke zurückgelegt haben, aber der eine in der Richtung oder entgegengesetzt der Richtung, wie sich die Erde bewegt, und der andere in dazu senkrechter Richtung. Das Resultat war negativ, „die Hypothese eines stationären Aethers ... würde daher falsch sein."

Man vergleiche: Mascart, Recherches expérimentales des modifications qu'éprouve la lumière par suite du mouvement de la source lumineuse et du mouvement de l'observateur. Ann. de l'école norm. (2) III. 363-420. 1874. Rs.

F. BOAS. Ein Beweis des Talbot'schen Satzes und Bemerkungen zu einigen aus demselben gezogenen Folgerungen. Wiedemann Ann. (2) XVI. 359-362.

Der der physiologischen Optik angehörende Talbot'sche Satz sagt aus, dass, wenn eine Stelle der Netzhaut von einem periodisch veränderlichen Lichte getroffen wird, bei genügend kurzer Dauer der Periode ein continuirlicher Eindruck entsteht, der dem gleich ist, welcher entstehen würde, wenn das während einer Periode eintreffende Licht gleichmässig über die ganze Dauer der Periode verteilt würde. Der hier mitgeteilte Beweis beruht darauf, dass nach dem Fechner'schen Gesetze zwei dieselbe Stelle der Netzhaut treffende Reize durch Addition zusammengesetzt werden; dass man ferner für die resultirende Empfindung ihren Mittelwert setzen kann, da bei kurzer Dauer der Periode die Schwankungen für die Empfindung unmerkbar werden.

Wn.

C. Geometrische Optik.

F. Hoffmann. Ueber Linienpaare mit optischen, denen der Brennpunkte entsprechenden Eigenschaften. Schlömilch Z. XXVII. 189-192.

„Ist ein Kegelschnitt K und ein beliebig gelegener Punkt P gegeben, so giebt es zwei reelle und ausserhalb K verlaufende Gerade x, y von folgender Eigenschaft: Ist durch P und einen beliebigen Punkt A von K ein Spiegel senkrecht zur Ebene von K aufgestellt, sind ferner X und Y die Schnittpunkte der Geraden x, y mit der Tangente g des Punktes A, so wird ein von X nach P gelangender Lichtstrahl vom Spiegel nach Y reflectirt."

Diese beiden Geraden, für die eine einfache Construction mitgeteilt wird, haben die Eigenschaft, dass immer zwei auf ihr gelegene, in Bezug auf K conjugirte Punkte von P aus unter rechtem Winkel erscheinen. Ueberhaupt lässt jeder Satz über Brennpunkte sofort eine Uebertragung in Bezug auf diese beiden Geraden zu. Wn.

J. Morawetz. Zur Reflexion und Refraction des Lichtes an Curven und Flächen. Schlömilch Z. XXVII. 310-313.

Die Zeit, welche ein von einem Punkte ausgehender Lichtstrahl bedarf, um nach der Reflexion an einer Curve oder Fläche nach einem zweiten Punkte zu gelangen, ist im Allgemeinen kleiner oder grösser, als jene Zeit, welche das Licht brauchen würde, wenn es vom ersten Punkte über irgend einen dem reflectirenden benachbarten Curven- oder Flächenpunkt zum zweiten Punkte ginge. Dieser bekannte Satz wird hier bewiesen mit Hülfe derjenigen Ellipse (resp. des Rotationsellipsoids), welche die beiden oben genannten Punkte zu Brennpunkten hat und die gegebene Curve (resp. Fläche) berührt. Ein analoger Satz für die Brechung des Lichtes ergiebt sich auf ähnliche Weise aus bekannten Eigenschaften des Cartesischen Ovals.

Wn.

F. Kessler. Ueber das Minimum der Zeit bei der Brechung des Lichts. Wiedemann Ann. (2) XV. 334-335

F. Kessler. Ueber das Minimum der Rotation des Lichtstrahls bei combinirter Brechung und Spiegelung an einer Kugel. Wiedemann Ann. (2) XV. 330-333.

F. Kessler. Das Minimum der Ablenkung eines Lichtstrahls durch ein Prisma. Wiedemann Ann. (2) XV. 333-334.

In der erstgenannten der obigen Arbeiten wird zunächst die einfache Construction eines an einer Kugel gebrochenen Lichtstrahls mit Hülfe zweier concentrischer Kugeln von dem n-fachen und $\frac{1}{n}$-fachen Radius erörtert. Diese Construction ist indessen nicht, wie der Verfasser meint, neu. Aus derselben ergiebt sich, bei Anwendung auf die Brechung an einer Ebene, durch einfache Betrachtungen der Satz vom Minimum der Zeit bei Erfüllung des Brechungsgesetzes.

Eine ähnliche, rein geometrische Lösung wird in der zweiten Aufgabe für die Frage nach dem Minimum der Ablenkung eines Strahles mitgeteilt, der in eine Kugel ein- und nach mehrmaliger Reflexion im Innern derselben wieder austritt. (Der Verfasser braucht für Ablenkung den ungewöhnlichen Namen Rotation.) Diese constructive Methode hat den Vorteil, den Gang der Strahlen beim Regenbogen anschaulich zu machen.

In der dritten Arbeit wird der Satz vom Minimum der prismatischen Ablenkung dadurch bewiesen, dass das Viereck, mittelst dessen der Gang eines Lichtstrahls im Prisma dargestellt wird, in seiner Lage geändert wird, und zwar so, dass der brechende Winkel und die Ablenkung constant bleiben, während n bis zu einem Maximum wächst; und dass sodann dasselbe Viereck bei unveränderter Lage wieder auf die ursprüngliche Grösse reducirt wird. Wn.

H. Hammerl. Ueber Regenbogen, gebildet durch Flüssigkeiten von verschiedenen Brechungsexponenten. Wien. Ber. LXXXVI. 206-215.

Der theoretische Teil der Arbeit ist nur eine Reproduction der bekannten Newton'schen Theorie, wie man sie in den meisten physikalischen Lehrbüchern findet. Wn.

J. Delsaux. Sur la théorie de l'arc en ciel. Brux. S. sc. VI. B. 9-16.

Vereinfachung der Theorie von Airy. Mn. (O.).

K. Moser. Die Grundformeln der Dioptrik für den praktischen Gebrauch entwickelt. Prag. Ber. 1881. 141-166.

Die wichtigsten und bekanntesten Sätze der Linsentheorie werden abgeleitet, ohne dass irgend welche neuen Resultate oder neuen Gesichtspunkte dabei zu Tage treten. Den Ausgangspunkt bildet für die Brechung an einer einzelnen Kugelfläche die Betrachtung des Doppelverhältnisses folgender vier Strahlen: Einfallender Strahl, gebrochener Strahl, Einfallslot, Einfallstangente. Hieraus ergiebt sich das Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit einem in ihrer Ebene liegenden, ungebrochen durch die Kugelfläche gehenden Strahle, und weiter folgen Beziehungen zwischen den Coordinaten jener Schnittpunkte. Diese werden benutzt, um die bekannten Sätze über die Brechung centraler Strahlen aufzustellen, während der weitere Gang in allem Wesentlichen der übliche ist. Ein Schlussabschnitt behandelt die sphärische Abweichung, entwickelt aber auch lediglich bekannte Resultate.

Wn.

F. Kessler. Ueber den Ersatz eines centrirten Systems brechender Kugelflächen durch eine einzige dieser Art. Wiedemann Ann. (2) XVI. 362-366.

Eine Linse kann, was die Lage ihrer conjugirten Punkte

anbetrifft, durch eine einzige brechende Fläche ersetzt werden. Derartige Flächen giebt es zwei, die so liegen, dass der Scheitel der einen zugleich Mittelpunkt der zweiten ist. Die Scheitel sind aber nichts anderes, als Listing's Symptosen, d. h. die Punkte, in denen Object und Bild an demselben Ort liegen. Die ersetzende Fläche giebt jedoch ein anderes Bildgrössenverhältnis β als die ursprüngliche Linse, für die jenes Verhältnis $= b$ sei; und zwar ist

$$\frac{b}{\beta} = v,$$

wenn v die Vergrösserung ist, welche die Linse im Scheitel der ersetzenden Fläche hervorbringt. Zugleich ist $\nu = v^2$ der Brechungsquotient der ersetzenden Fläche; endlich ist das der einen ersetzenden Fläche angehörige ν der reciproke Wert des ν der andern Fläche.

Für diese Resultate, die der Verfasser zunächst empirisch aus einer Zeichnung ermittelt hatte, wird ein von Herrn V. v. Lang herrührender Beweis mitgeteilt. Wn.

K. W. Zenger. Berechnung des Endomersions-Objectivs für Fernrohr- und Mikroskopobjective. Prag. Ber. 1881. 467-479.

K. W. Zenger. Dioptrische Studien. Prag. Ber. 1881. 479-492.

Es handelt sich in beiden Arbeiten um die Berechnung des sogenannten „symmetrischen Endomersionsobjectivs“. Dasselbe besteht aus einer biconvexen Crownglas- oder Bergkrystalllinse und einer planconvexen Flüssigkeitslinse. Die Radien der drei krummen Flächen dieser beiden Linsen sind gleich, die letzte Fläche eben. Der Verfasser verfolgt den Weg eines beliebigen Strahles durch die beiden Linsen mittelst genauer trigonometrischer Rechnung und bestimmt dadurch, welche Brechungsexponenten die Flüssigkeit für die einzelnen Spectrallinien haben muss, damit vollständige Aplanasie und Achromatismus des Systems erreicht wird. Passende Flüssigkeit stellt er durch Auf-

lösen von stearinsauren oder ölsauren Salzen in ätherischen und fetten Oelen her, und zwar nehmen diese Lösungen eine gallertartige Form an. Die Symmetrie des Objectivs soll die günstigsten Bedingungen für Helligkeit, Tiefe der Schärfe und Ebenheit des Gesichtsfeldes darbieten. Wn.

F. Meisel. Ueber die Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel. Schlömilch Z. XXVII. 65-86.

Es handelt sich um die Bestimmung der Lichtintensität in einem Elemente einer Kugelfläche, die von einer andern Kugelfläche beleuchtet wird. Es wird dabei angenommen, dass alle Elemente der leuchtenden Kugel gleiche Lichtmengen ausstrahlen, unabhängig vom Emanationswinkel, dass also die Intensität, die ein leuchtendes Flächenelement in einem bestrahlten Elemente P hervorbringt, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung der beiden Elemente und direct proportional dem Cosinus des Winkels zwischen dem Strahl und der Normale in P ist. Liegt P so, dass von ihm aus die ganze zugewandte Seite der leuchtenden Kugel übersehen werden kann, so ergiebt sich leicht die Intensität in P. Dagegen führt die Bestimmung auf elliptische Integrale, wenn die in P an die beleuchtete Kugel gelegte Tangentialebene die leuchtende Kugel schneidet. Da die Berechnung dieser Integrale für die Anwendung zu mühsam sein würde, so hat der Verfasser folgendes Näherungsverfahren benutzt. Man denke sich von P an die leuchtende Kugel den Berührungskegel gelegt, diesen durch eine Ebene senkrecht zu seiner Axe geschnitten, dann in jedem Punkte innerhalb des Schnittkreises ein Lot auf der Ebene des Kreises errichtet, dessen Länge gleich der Intensität ist, welche das entsprechende Element der leuchtenden Kugel in P hervorbringt. Die Endpunkte aller Lote begrenzen einen Rotationskörper, dessen Volumen die ganze in P stattfindende Intensität giebt, falls von P die Kugel als ein voller Kreis erscheint. Ist das Letztere nicht der Fall, so ist nicht das gesammte Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, sondern nur ein Teil desselben. Die Näherung besteht

nun darin, die wirkliche Meridiancurve des genannten Rotationskörpers durch eine zweckmässig gewählte Ellipse zu ersetzen, und dann den in Frage kommenden Teil des Volumens zu berechnen.

Weiter wird die Intensitätsvariation im Halbschatten der beleuchteten Kugel untersucht. Der Verfasser denkt sich eine Ebene senkrecht zur Centrale beider Kugeln gelegt und berechnet die Intensität in einem Flächenelemente dieser Ebene, das im Halbschatten liegt, näherungsweise in derselben Art, wie oben; nur wird hier die Meridiancurve des in Frage kommenden Rotationskörpers durch eine Parabel ersetzt, statt durch eine Ellipse. Ein Zahlenbeispiel schliesst die Arbeit, deren Ergebnisse im Einzelnen mitzuteilen zu weit führen würde. Wn.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

A. Maxwell. Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsch von B. Weinstein. Berlin. J. Springer. 1883.

Während die zweite Auflage des berühmten Lehrbuchs erschien, ist der Verfasser gestorben, so dass derselbe nur die neun ersten Capitel durchsehen konnte. Die englische, zweite Auflage wurde von Dr. Niven besorgt. Bei der hohen Bedeutung des Werkes für die Entwickelung der Elektricitätslehre, vielleicht für unsere gesammte Naturerkenntnis, ist eine Uebertragung desselben in die deutsche Sprache mit Dank zu begrüssen. Die Uebersetzung ist von sachkundiger Hand gemacht; besonders sind alle Rechnungen nochmals durchgesehen worden. Auf die neueste Literatur hat der Uebersetzer noch besonders in Anmerkungen hingewiesen. Den Inhalt des Werkes: die consequente, mathematische Bearbeitung der Faraday'schen Ideen über die Elektricität dürfen wir wohl als bekannt voraussetzen. Ok.

G. WIEDEMANN. Die Lehre von der Elektricität. Braunschweig. 1882. Band I.

Bei Herstellung der dritten Auflage des bekannten Handbuchs des Galvanismus und Elektromagnetismus ist dasselbe zu einem Werke umgearbeitet worden, welches jetzt die ganze Elektricitätslehre umfasst. Der vorliegende erste Band enthält ausser einer historischen Einleitung die Grundbegriffe der Elektrostatik, die Elektricitätserregung durch Contact und die Gesetze der constanten Ströme. Ueber das Verhältnis des Werkes zur mathematischen Theorie sagt der Verfasser in dem Vorwort: „Auf die mathematische Behandlung des Gegenstandes bin ich so weit eingegangen, als ihr Schwerpunkt in der Physik liegt, so weit sie also zur Feststellung der allgemeinen Principien und zur Discussion der Methoden und Begründung ihrer Resultate dient."

Ok.

R. CLAUSIUS. Ueber die verschiedenen Maasssysteme zur Messung elektrischer und magnetischer Grössen. Verh. d. naturh. Ver. f. Rheinl. und Westf. XXXIX., Wiedemann Ann. (2) XVI. 529-551.

H. HELMHOLTZ. Ueber absolute Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen. Wiedemann Ann. (2) XVII. 42-55.

R. CLAUSIUS. Ueber den Zusammenhang zwischen den Einheiten der Elektricität und des Magnetismus. Wiedemann Ann. (2) XVII. 713-719.

Bekanntlich bedient man sich bei der Zurückführung elektrischer und magnetischer Grössen auf absolutes Mass entweder des elektrostatischen oder des elektromagnetischen Masssystems. In dem ersten bildet die Elektricitätsmenge den Ausgangspunkt, welche gemessen wird durch die Kraftwirkung, welche sie auf eine andere Elektricitätsmenge ausübt. In ganz ähnlicher Weise geht das andere Masssystem von der Menge des Magnetismus aus. Während die Ableitung aller Grössen nach dem zweiten Mass-

system ohne Bedenken stattfindet, kann es zweifelhaft erscheinen, in welcher Weise der „Magnetismus" im ersten System auf absolute Einheiten zurückgeführt wird. Maxwell hat in seinem „Treatise on Electricity" hierzu die Kraft benutzt, welche ein Stromdraht auf einen Magnetpol ausübt, und gelangt dabei zu der symbolischen Formel für eine magnetische Menge:

$$[m_s] = [M^{\frac{1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}].$$

In derselben bedeutet M die Masse, L die Länge. Clausius hält diese Art der Ableitung für nicht zutreffend. Nach seiner Auffassung soll bei beiden Masssystemen die bekannte Beziehung herangezogen werden, nach welcher das magnetische Moment gleich ist dem Product aus einer Fläche und dem dieselbe umfliessenden Strom. Hieraus folgt die Gleichung:

$$[m_s] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}].$$

Die Abhandlung enthält dann weiter eine Discussion der Zurückführung der beiden Maasssysteme auf einander, sowie Vorschläge, die Grössen nach dem in der Pariser Conferenz eingeführten, praktischen Maasssystem in besonders einfacher Weise auszudrücken. Dies würde geschehen, wenn man als Gewichtseinheit 1 gr $\cdot 10^{-11}$ oder ein Undecimogramm, als Längeneinheit $1^m \cdot 10^7$ oder ein Hebdomometer einführt. Den Vorwurf, welchen Clausius gegen Maxwell, wie oben besprochen, erhoben, eine unrichtige Formel in seinem Maasssystem benutzt zu haben, weisen verschiedene englische Physiker zurück, und auch Helmholtz sucht in der oben angegebenen Abhandlung darzutun, dass beide Auffassungen als gleichberechtigt anzusehen sind. In seiner letzten Erwiderung wiederholt Clausius im wesentlichen seine früheren Einwände, und weist darauf hin, dass nach Helmholtz noch eine dritte abweichende Formulirung für die Menge des Magnetismus möglich ist. Eine grosse Bedeutung glauben wir der Discussion dieses Gegenstandes nicht zuschreiben zu sollen, da man wohl selten mit Quantitäten vom Magnetismus im elektrostatischen System rechnen, sondern der Natur der Sache nach in diesem Fall das elektromagnetische System zu Grunde legen wird. Ok.

P. Volkmann. Zum absoluten Masssystem. Wiedemann Ann. (2) XVI. 481-489.

Der. Verfasser schlägt zur besseren Veranschaulichung der elektrischen Grössen eine veränderte Fassung der Definition der Einheit der Elektricitätsmenge vor. Er definirt dieselbe derart, dass sie mit einer ponderablen Masse gleiche Dimension hat.

Daraus folgen andere Dimensionen für die übrigen Fundamentalgrössen, als man denselben gewöhnlich giebt.

Ok.

A. Ledieu. Objections d'ordre mécanique à la théorie actuelle de l'électricité. C. R. XCV. 619-623.

A. Ledieu. Conception rationnelle de la nature et de la propagation de l'électricité. C. R. XCV. 669-673, 753-757.

C. Decharme. Conclusions des expériences hydrodynamiques d'imitation des phénomènes d'électricité et de magnétisme. Réponse à une Note de M. Ledieu. C. R. XCV. 913-914.

A. Ledieu. Réponse aux objections de M. Decharme sur ma conception rationnelle de la nature de l'électricité. C. R. XCV. 1026-1030.

C. Decharme. Réponse à M. Ledieu, au sujet des analogies entre les phénomènes hydrodynamiques et électriques. C. R. XCV. 1273-1275.

Ledieu hebt die Schwierigkeiten hervor, welche in der Auffassung eines elektrischen Stromes als Flüssigkeitsstrom oder als Doppelstrom vom Standpunkt der Mechanik aus liegen. Dieselben sind indess nicht neu und auch von anderen Seiten schon präciser ausgesprochen worden. Nachdem in der zweiten Mitteilung die verschiedenen in der Elektricitätslehre vorkommenden Grössen, besonders in ihren Beziehungen zu den absoluten Maasssystemen besprochen worden sind, setzt der Verfasser in der dritten Mitteilung seine eigene Theorie auseinander. Die-

selbe beruht auf der Annahme, dass alle Veränderungen auf der Wechselwirkung der Atome und des Aethers beruhen. Nimmt man an, dass zwischen den ponderablen Atomen und den Aetherteilen unter sich und gegen einander nur conservative Kräfte wirken, so kann der Satz der Erhaltung der Energie für jedes körperliche System benutzt werden. Die potentielle Energie kann dann als Summe von drei Gliedern aufgefasst werden: Energie der Atome, Energie des Aethers, Energie der Wechselwirkung. Der Veränderung der letzteren Grösse schreibt Ledieu Veränderungen des elektrischen Zustandes zu. Den elektrischen Strom betrachtet er als eine Leitung von potentieller Energie. Ueber diese nur sehr skizzenhaft angedeutete Theorie hat sich eine Discussion zwischen Ledieu und Decharme entsponnen, indem Letzterer auf Grund seiner Versuche an der Analogie des elektrischen Stroms mit einer Flüssigkeitsbewegung festhält.

Ok.

C. Decharme. Expériences hydrodynamiques. C. R. XCIV. 440-442, 527-529, 643-646, 722-727, 1067; XCV. 340-342, 387-388, 913-914, 1273-1275.

Angeregt durch die interessanten Versuche von Bjerknes, welcher magnetische, elektrische und elektromagnetische Fernewirkungen durch die Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit nachgeahmt hat, hat der Verfasser es versucht, in anderen, hydrodynamischen Erscheinungen Analogien mit der Elektricität zu entdecken. So wird z. B. die Anziehung, welche eine Platte durch einen dieselbe vertical treffenden Strahl erfährt in Parallele mit einer elektromagnetischen Anziehung gesetzt. Dass ferner zwei unter einem spitzen Winkel sich treffende Wasserstrahlen sich zu einem Strahl vereinigen, soll eine Analogie der Anziehung zweier paralleler Ströme sein. Wird ein Wasserstrahl vertical gegen eine Platte gerichtet, welche mit einem feinen Pulver und einer dünnen Wasserschicht bedeckt ist, so häuft sich das Pulver in concentrischen Ringen um das Centrum des Strahls an. Diese Erscheinung vergleicht der Verfasser mit den Nobili'-

schen Farbenringen. Wie man aus den angeführten Beispielen zur Genüge erkennt, sind die Aehnlichkeiten zwischen den beiden Erscheinungsgruppen rein äusserliche und jedenfalls in keiner Weise geeignet, irgend eine Aufklärung über elektrische und magnetische Phänomene zu geben. Ok.

-- ---

H. A. Lorentz. De grondformules der electrodynamica. Versl. en Meded. XVII. 144-161; Arch. Néerl. XVII. 83-100

Einige Betrachtungen über die Grundformeln der Elektrodynamik, welche durch die Abhandlungen Korteweg's über denselben Gegenstand angeregt sind (s. F. d. M. XII. 1880. 783). Es wird hier ein einfacherer Weg eingeschlagen, um zu den dort erlangten Resultaten zu kommen, und es werden nicht mehr unbekannte Functionen eingeführt, als zum Endergebnis bestehen bleiben. Zuerst wird dargetan, auf welche Weise aus den Beobachtungen die Wirkung eines geschlossenen Stromkreises auf ein unvollständiges Stromelement abgeleitet werden kann, ohne von einer Formel für die Wirkung zweier Stromelemente auf einander Gebrauch zu machen. Hieraus werden sodann die allgemeinen Ausdrücke für die Wirkungen zweier Stromelemente auf einander aufgestellt, welche dem Grassmann'schen Gesetze genügen. Auch die secundäre Wirkung wird bestimmt und dabei von der Hypothese der Spiegelbilder Gebrauch gemacht, wodurch sich Ausdrücke für die allgemeinste Wirkung, die zwischen zwei Stromelementen angenommen werden kann, ergeben, welche drei unbekannte Funktionen enthalten. Diese werden auf nur eine zurückgeführt, wenn man die Bedingung einführt, dass Wirkung und Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt sind. Schliesslich wird die Uebereinstimmung dieser Resultate mit denen Korteweg's nachgewiesen. G.

- - -

M. Lévy. Sur le mouvement d'un système de deux particules de matière pondérable électrisées et sur l'intégration d'une classe d'équations à dérivées partielles. C. R. XCV. 956-988.

Der Verfasser nimmt an, dass zwei Massenteile, welche elektrisirt sind, sich bewegen und dabei in Wechselwirkung stehen. Letztere kann nach dem Weber'schen, Riemann'schen oder Clausius'schen Gesetz erfolgen. Es wird dann der Satz der lebendigen Kraft aufgestellt und daran einige Betrachtungen über die Möglichkeit einer weiteren Integration des Problems geknüpft. Ok.

H. Résal. Théorie de l'électrostatique. Liouville J. (3) VIII. 217-251.

Der Verfasser beginnt mit den Worten: „Die folgende Abhandlung macht keinen Anspruch auf Neuheit der Erfindung. Ich beabsichtige nur die Untersuchungen Poissons und seiner gelehrten Nachfolger Gauss, Green, etc. darzustellen". Wir haben also einen kurzen, übrigens klar und verständlich geschriebenen Abriss der Theorie des Potentials und seiner Anwendung auf die Elektrostatik vor uns. Ok.

R. Clausius. Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence. Liouville J. (3) VIII. 73-79.

Vergl. F. d. M. IX. 1877. p. 740-741. Ok.

Croullebois. Sur quelques conséquences du principe de Gauss en électrostatique. C R XCIV. 74-76.

Als Princip von Gauss bezeichnet der Verfasser den Satz:

$$\Sigma(eV') = \Sigma(e'V).$$

In dieser Formel bedeuten die e Ladungen von Conductoren, die e' beliebige, andere Ladungen derselben, die V und V' die Potentialconstanten bei den entsprechenden Systemen von Ladungen. Mit Hilfe dieser Gleichung beweist der Verfasser den folgenden Satz von Maxwell: „Wenn ein System von Leitern seinen gegenseitigen Einwirkungen überlassen wird, so strebt die Energie des Systems einem Maximum zu." Ok.

Y. Machai. Sur quelques théorèmes d'électricité, démontrés d'une manière inexacte dans les ouvrages didactiques. C. R. XCV. 210-213.

Die betreffenden Lehrsätze befinden sich in den Handbüchern von Maxwell und von Mascart und Joubert. Der erste Satz bezieht sich auf einen Punkt in einem elektrischen Kraftfeld, für welches die partielle Differentialgleichung:

$$\Delta V = 0$$

gilt. Legt man durch den Punkt eine Tangentialebene und wählt das Coordinatensystem so, dass die Normale derselben der z-Axe parallel ist, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{F}{R_x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{F}{R_y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -F\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right) = -F\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

während Mascart die drei zweiten Differentialquotienten einzeln gleich Null setzt. Hier ist F die wirksame Kraft, R_x und R_y sind die Krümmungsradien der Normalschnitte der Niveaufläche. Bei einem zweiten Satz wird nur eine Verbesserung des Beweises, bei einem dritten (dem Earnschaw'schen Satz) ein correcterer Ausdruck gegeben. Ok.

E. Beltrami. Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizati. Rend. Ist. Lomb. (2) XIV. 400-407.

Bezeichnet man mit L die Potentialwerte einer Reihe von Conductoren, welche mit den Elektricitätsmengen M geladen sind, so ist das Potential des ganzen Systems auf sich selbst:

$$P = \frac{1}{2} \Sigma LM.$$

Verändert man die Ladungen und die Potentialwerte, so ist hierzu eine äussere Arbeit nötig, deren Ausdruck:

$$dQ = \frac{1}{2} \Sigma(LdM - MdL).$$

Sind L und M rechtwinklige Coordinaten, so wird der Zustand eines geladenen Conductors durch einen Punkt der Ebene vollständig bestimmt. Die bei einer kleinen Aenderung jener beiden Grössen zu leistende Arbeit ist dann geometrisch dargestellt durch ein kleines Dreieck, dessen Ecken der Anfangspunkt und die beiden Punkte L, M und $L+dL$, $M+dM$ sind.

Nach einer Reihe von Zustandsänderungen dieser Art kann die Summe aller äusseren Arbeiten von Null verschieden sein. Der Verfasser erläutert diesen Satz durch das Beispiel einer Kugel, mit welcher er einen Carnot'schen Kreisprocess ausführt, wobei an Stelle der Veränderungen von Druck und Volumen hier Potential und Ladung treten. Eine Veränderung des Potentials bei gleichbleibender Ladung denkt sich der Verfasser durch Veränderung des Kugelradius bewirkt.

Aus den beiden obenstehenden Gleichungen folgt ferner, wenn man sich auf einen Leiter beschränkt:

$$\frac{dQ}{P} = \frac{dM}{M} - \frac{dL}{L} = d\log\frac{M}{L}.$$

Also für einen Kreisprocess:

$$\int \frac{dQ}{P} = 0.$$

Der Ausdruck $\log\frac{M}{L}$ entspricht der Emtropie in der Wärmelehre und ist nichts anderes als der Logarithmus der Capacität des Conductors. Ok.

A. G. Greenhill. On functional images in Cartesians. Quart. J. XVIII. 231-245, 346-363.

Die Arbeit schliesst sich an eine Abhandlung von Hicks an (F. d. M. XIII. 1881. 784). Es werden verschiedene Probleme der Strömung in einer Ebene behandelt, bei welchen das Strömungsgebiet durch zwei Curven eingeschlossen ist. Die hierbei in Betracht kommenden Functionen (Geschwindigkeitspotential und Strömungsfunction) lassen sich durch elliptische Functionen complexer Variabeln ausdrücken. Ok.

W. D. Niven. On a method of approximating to the solution of electrostatic problems. Quart. J. XVIII. 266-270.

Wird in die Laplace'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

anstatt v die Coordinate z als abhängige Variable eingeführt, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$-2\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial v}\right)=0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich erheblich, wenn die Differentialquotienten von z nach x und y so klein sind, dass ihre Quadrate und Producte vernachlässigt werden können. Der Verfasser macht hiervon eine Anwendung auf die Verteilung der Elektricität auf einem Condensator, bei welchem die belegten Flächen nur wenig von zwei parallelen Ebenen abweichen. In ähnlicher Weise kann man in die auf Polarcoordinaten bezogene Gleichung an Stelle des Radius vector v einführen. Diese Transformation wird benutzt, um die Elektricitätsverteilung auf einem nahezu kugelförmigen Conductor zu berechnen. Ok.

R. Colley. Ueber die Existenz einer diëlektrischen Polarisation in Electrolyten. Wiedemann Ann. (2) XV. 94-112.

Wenn ein galvanischer Stromkreis eine Flüssigkeitszelle enthält, so findet an den Elektroden eine Potentialdifferenz statt, entsprechend der elektromotorischen Kraft der Polarisation. Man muss hierbei das Vorhandensein von je zwei sehr nahen, elektrischen Doppelschichten an den Elektrodenflächen annehmen. Bestehen letztere aus grossen, einander parallelen Platten, sieht man ferner die Flüssigkeit als diëlektrisch an, so bilden die beiden Elektroden ausserdem noch einen Condensator gewöhnlicher Art. Der Verfasser untersucht nun theoretisch und experimentell den Verlauf eines Ladungs- und eines Entladungs-

stromes, indem er die beiden oben angegebenen Umstände gleichzeitig berücksichtigt.

Die diëlektrische Polarisation lässt sich deutlich bei einer Reihe von schlecht leitenden Flüssigkeiten nachweisen.

Ok.

J. Klemenčič. Ueber die Capacität eines Plattencondensators. Wien. Sitzungsber. LXXXVI. (2. Abth.). 1190-1200

Die Capacität eines aus zwei kreisförmigen Platten bestehenden Condensators ist annähernd:

$$c = \frac{F}{4\pi\delta},$$

wenn die Entfernung der Platten δ sehr klein ist im Vergleich zu dem Radius der Platten. Die Ableitung einer genaueren Formel durch G. Kirchhoff wurde F. d. M. IX. 1877. 741-744 besprochen. Verfasser prüft dieselbe durch Versuche, indem er die Capacitäten bestimmt, wenn zwei Platten in verschiedene Entfernungen gebracht werden. Zu dem Zweck wurden die Condensatoren durch 15 Daniell 63 Mal in einer Secunde geladen und entladen und die Ladungsströme an einem Galvanometer gemessen. Die Versuche ergaben, dass die Formel sehr genau die Capacität wiedergiebt. Die Capacität einer einzelnen isolirten Metallscheibe ist $\frac{2R}{\pi}$. Auch diese Beziehung wurde in gleicher Weise geprüft. Die Uebereinstimmung war hier eine weniger gute, da in diesem Fall der Einfluss des Zuleitungsdrahts ein bedeutender ist.

Ok.

E. Budde. Bemerkungen über die mechanischen Grundlagen der Gesetze von Ohm und Joule. Wiedemann Ann. (2) XV. 558-576.

Unsere in ihren Grundzügen von G. Kirchhoff entwickelte Theorie der constanten, galvanischen Ströme enthält trotz ihrer unbestrittenen Uebereinstimmung mit der Erfahrung eine Reihe

von Fragen, welche noch als offen zu betrachten sind. Eine besondere Schwierigkeit bereitet zunächst die Tatsache, dass der Strom stationär ist, obgleich fortdauernd eine beschleunigende Kraft auf denselben wirkt. Man ist dabei gezwungen, einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand einzuführen. Ferner bleibt unentschieden, ob die Elektricität als compressibles oder incompressibles Fluidum anzusehen ist. Endlich ist fraglich, ob die an der Oberfläche der Leiter befindliche freie Elektricität an der Strömung teilnimmt. Obgleich der Verfasser keine endgültige Entscheidung dieser Fragen zu geben vermag, so ist es doch von Interesse, dass derselbe auf diese Lücken der bisherigen Theorie hingewiesen hat. Ok.

R. Colley. Ueber die in einem geschlossenen Stromkreise geleistete Arbeit äusserer Kräfte. Wiedemann Ann. (2) XVI. 39-56.

Der Verfasser weist nach, dass die durch einen galvanischen Strom geleistete mechanische oder chemische Arbeit eine electromotorische Gegenkraft in dem Stromkreis bedingt.

Ok.

G. Lippmann. Sur la théorie des couches doubles de M. Helmholtz. Calcul de la grandeur d'un intervalle moléculaire. C. R. XCV. 686-689.

Wenn das elektrische Potential auf beiden Seiten der Berührungsfläche heterogener Substanzen verschiedene Werte hat, so muss man annehmen, dass in der Berührungsfläche eine elektrische Doppelschicht sich befindet. Die Entfernung der beiden Schichten kann als Entfernung der Molecüle der einen und der anderen Substanz angesehen werden. Der Verfasser hat zur Erklärung früherer electrocapillarer Versuche (Annales de chemie et de phys. 1875) die Gleichung aufgestellt:

$$X = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

In derselben bedeutet A die Capillarspannung einer Quecksilberfläche in Berührung mit Wasser, welche bis zu dem Potential x geladen ist. X ist eine Constante, und repräsentirt die Capacität der Flächeneinheit der Doppelschicht oder ist: $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$, wo ε die Entfernung der Schichten ist. Aus seinen Versuchen berechnet der Verfasser dieselbe zu $\frac{1}{35\,000\,000}$ mm.

Ok.

A. König. Ueber die Beziehungen zwischen der galvanischen Polarisation und der Oberflächenspannung des Quecksilbers. Wiedemann Ann. (2) XVI. 1-39.

Der Verfasser bestimmt nach einer sinnreichen, von v. Helmholtz angegebenen Methode die Oberflächenspannung des Quecksilbers in Berührung mit verschiedenen leitenden Flüssigkeiten und die Veränderungen, welche dieselbe durch die galvanische Polarisation, also durch Beladung der Quecksilberfläche mit Gasen erfahren. Zur Berechnung der Oberflächenspannung werden Formeln aus der Poisson'schen Capillaritätstheorie benutzt. Als Resultat der Versuche ergiebt sich, dass die Oberflächenspannung ein Maximum für einen mittleren Polarisationszustand zeigt und nach beiden Seiten mit wachsender Beladung abnimmt. Durch einfache theoretische Betrachtungen zeigt von Helmholtz im Anschluss an diese Untersuchung, dass die Oberflächenspannung T, der Potentialsprung P und die Ladung ε durch die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial P} = -\varepsilon$$

verbunden sind. Daraus folgt, dass für $\varepsilon = 0$ die Oberflächenspannung ein Maximum sein muss. Ok.

C. Hildebrand. Ueber die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene und einer Kugeloberfläche. Diss. Göttingen. Pr Gandersheim.

Der Verfasser bespricht den Zusammenhang zwischen dem Problem der conformen Abbildung zweier Ebenen, resp. einer Ebene auf eine Kugeloberfläche und der Theorie der stationären, elektrischen Strömung und giebt hierzu eine grössere Anzahl von Beispielen, bei denen er die isoëlektrischen und die Strömungscurven berechnet und construirt. Ok.

W. Voigt. Theorie der electrochemischen Experimente des Herrn Guébhard. Wiedemann Ann. (2) XVII. 257-272.

E. Mach. Ueber Herrn A. Guébhard's Darstellung der Aequipotentialcurven. Wien. Ber. LXXXVI. 8-14, Wiedemann Ann. (2) 858-865.

H. Meyer. Ueber die von Guébhard vorgeschlagene Methode der Darstellung aequipotentialer Linien. Gött. Nachr. 1881. 666-676.

Weitere Discussion der in F. d. M. XII. 1880. 796 beschriebenen Versuche. Die drei Physiker, deren Arbeiten oben angegeben sind, stimmen mit der damals auch schon von dem Referenten geäusserten Ansicht überein, dass es sich bei den Guébhard'schen Farbencurven nur um eine in einzelnen Specialfällen zutreffende Aenlichkeit mit den Curven gleichen Potentials handeln kann. Diese Ansicht wird von W. Voigt theoretisch begründet, welcher die Formeln neben einander stellt, welche in dem Fall einer reinen Horizontalströmung in der Platte und einer Strömung in der Flüssigkeit mit partiellem Uebergang in die Metallplatte gelten. Die Guébhard'schen Curven sind danach complicirtere Fälle der Nobili'schen Ringe, d. h. Curven gleicher Stromintensität. Die Berechnung derselben gelingt nur unter einfachen Annahmen. Für den Fall von zwei punktförmigen Elektroden von entgegengesetztem Zeichen würde den Guébhard'schen Curven die Gleichung:

$$K = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2},$$

den Potentialcurven dagegen die Gleichung:

$$C = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

entsprechen. Hierin bedeuten ϱ_1 und ϱ_2 die horizontalen Entfernungen eines Punktes der Metallplatte von den Elektroden. Einen etwas anderen Standpunkt vertritt Mach. Derselbe glaubt aus Versuchen und Rechnungen schliessen zu sollen, dass der Hauptteil des Stromes durch die Flüssigkeit geht und dabei nahezu horizontale Strömung stattfindet. Die Curven gleichen Potentials und gleicher Stromstärke an der Metallfläche würden hierbei nahezu zusammenfallen. Endlich hat H. Meyer einige Curven von Guébhard direct mit den von der Theorie geforderten Potentialcurven verglichen und dabei keine befriedigende Uebereinstimmung erhalten. Ok.

L. Ditscheiner. Ueber die Guébhard'schen Ringe. Wien. Anz. LXXXVI. 676-708.

Das in dem vorigen Referat auseinandergesetzte Problem wird von dem Verfasser ebenfalls ausführlich behandelt. Derselbe geht von der Voraussetzung aus, dass zwei punktförmige Elektroden sich in einem nach der einen Seite zu unbegrenzten, nach der anderen von einer dünnen, ebenen Platte begrenzten Medium befinden. Die Platte hat eine erheblich grössere Leitungsfähigkeit, wie das Medium. Die Potentiale, von welchen die gesammten Strömungen in den beiden Leitern abhängen, lassen sich durch Summen reciproker Entfernungen ausdrücken. Die entsprechenden Punkte erhält man durch fortgesetzte Spiegelung.

Berücksichtigt man, dass das Leitungsvermögen der Flüssigkeit sehr klein ist im Vergleich zu demjenigen des Metalls, so erhält man für die Curvensysteme angenähert die folgenden Gleichungen:

a) wenn die Metallplatte dick ist:

$$\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho_2^3} = \text{const.}$$

(übereinstimmend mit dem Resultat von W. Voigt),

b) wenn die Metallplatte sehr dünn ist,

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \text{const.}$$

Der Verfasser discutirt beide Resultate unter der allgemeinen Annahme, dass es sich um ebene Curven handelt, deren Gleichung durch

$$\frac{1}{\varrho_1^n} - \frac{1}{\varrho_2^n} = \text{const.}$$

ausgedrückt ist.

Es werden auch noch andere Fälle behandelt, welche den Guébhard'schen Versuchen entsprechen, wobei der Verfasser zu dem Resultat kommt, dass dieselben im Allgemeinen vollständig durch die Theorie erklärt werden, dass ferner zwischen den Guébhard'schen Curven und den Curven gleichen Potentials zwar eine gewisse Aehnlichkeit besteht, aber von einer Identität beider keine Rede sein kann. Ok.

- - - -

A. Witkowski. Ueber den Einfluss der Deformation auf die elektrische Leitungsfähigkeit. Wiedemann Ann. (2) XVI. 161-166.

Wird ein homogener Leiter durch allseitigen Druck comprimirt, so dass sein Volumen im Verhältnis $\frac{1}{1-\vartheta}$ verkleinert wird, so wächst seine Leitungsfähigkeit im Verhältnis $\frac{1}{1+\varrho\vartheta}$, wo ϱ eine für den Leiter charakteristische Constante ist. Tritt eine Verlängerung eines Leiters um $\frac{\alpha}{2}$ in einer Richtung und eine entsprechende Compression in einer dazu senkrechten Richtung ein, so nimmt die Leitungsfähigkeit im Verhältnis $\frac{1}{1-\sigma\alpha}$ in der ersten Richtung ab, und im Verhältnis $\frac{1}{1+\sigma\alpha}$ in der zweiten zu.

Der Verfasser hat nach Methoden, welche W. Thomson an-

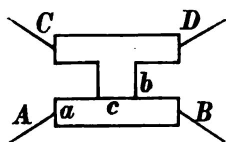
gegegeben hat, Versuche zur Bestimmung der Constanten ϱ und σ angestellt und findet für dieselben die Zahlenwerte bei Messing:

$$\sigma = 0{,}158,$$
$$\varrho = 0{,}217.$$

Ok.

E. Dieterici. Ueber Messung kleiner elektrischer Widerstände. Wiedemann Ann. (2) XVI, 234-247.

Der Widerstand eines kurzen, dicken Kupferdrahts wird mit einem Normalwiderstand nach der Methode von Kirchhoff (F. d. M. XII. 1880. 791-793) verglichen, indem von beiden Widerständen Zweigleitungen zu den beiden Rollen eines Differentialgalvanometers geführt werden und durch Einschaltung passender Widerstände in die beiden Zweige eine Ablenkung der Magnetnadel verhindert wird.



Als Vergleichswiderstand benutzte der Verfasser eine Quecksilberschicht, welche in der Form eines doppelten *T* (vergl. die beistehende Figur) auf einer Glasplatte ausgebreitet war und durch passende Stücke von Glasplatten begrenzt wurde. Der Hauptstrom steht mit den Punkten *A* und *B*, die Zweigleitung mit *C* und *D* in Verbindung.

Der Widerstand der Quecksilberschicht kann dann dadurch berechnet werden, dass das Feld *ABCD* conform auf einer unendlich grossen Halbebene abgebildet wird.

Dies geschieht mit Benutzung einer Methode von Kirchhoff (F. d. M. IX. 1877. 741-744), wenn zwischen den complexen Veränderlichen t und z die Differentialgleichung

$$N\frac{dz}{dt} = \lambda^2\mu^2\,\frac{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}{(1-\lambda^2t^2)(1-\mu^2t^2)}$$

besteht. Dieselbe liefert bei passender Bestimmung der Constanten:

$$z = c\,\frac{u}{K} - \frac{a}{\pi}\log\frac{\vartheta(\beta-u)\,\vartheta_1(\beta-u)}{\vartheta(\beta+u)\,\vartheta_1(\beta+u)},$$

wo $t = \sin\mathrm{am}(u, k)$ gesetzt ist. Zur Berechnung der übrigen Grössen dienen die Gleichungen:

$$\frac{\pi\beta}{2K} = \gamma, \; q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

$$\frac{c}{a} = \mathrm{tg}\gamma - 4\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^m q^m \sin(2m\gamma)}{1-q^m},$$

$$\log\frac{1}{q} = \frac{b}{c}\pi + 4\gamma\frac{a}{c}.$$

Für den Widerstand des Leiterstücks mit Rücksicht auf die Zweigleitung BC erhält man schliesslich den angenäherten Ausdruck:

$$P = \frac{2}{\pi\lambda\varepsilon}\cdot\lg\frac{1}{\sqrt[4]{q}\,.\,\sin\mathrm{am}\beta}.$$

In demselben bedeutet λ die Leitungsfähigkeit, ε die Dicke der Quecksilberschicht. Die Grössen q und β hängen von den horizontalen Dimensionen der Schicht ab, indem c die Breite und b die Länge des Querstreifens, a die Breite der beiden Längsstreifen bedeutet. Ok.

E. Dorn. Die Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass. Wiedemann Ann. (2) XVII. 773-816.

Die von dem Verfasser benutzte Methode ist als eine Modification der Dämpfungsmethode von W. Weber anzusehen. Versetzt man den Magnet eines Galvanometers in Schwingungen und beobachtet Schwingungsdauer (T_0 und T) und logarithmisches Decrement (λ_0 und λ) bei offenen und bei geschlossenen Galvanometerrollen, so hängt der Widerstand w des Kreises mit diesen Grössen durch die Formel

$$q^2 = 2wK\left\{\frac{\lambda}{T} - \frac{\lambda_0}{T_0}\right\}$$

zusammen. Hierin bedeutet noch K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, und q das Drehungsmoment der Rollen, auf den Magnet, wenn dieselben vom Strom 1 durchflossen werden.

Diese letzte Grösse wird bestimmt, indem ein Strom durch eine Tangentenbussole und ein Zweigstrom davon durch das Galvanometer geleitet und beide Ablenkungen beobachtet werden. Die Messung des Stromes nach absolutem Mass erfordert gleichzeitig die Kenntnis der Horizontalcomponente.

Die einzelnen Messungen erfordern besondere Vorsichtsmassregeln, auf welche einzugehen hier nicht der Ort ist. Ebenso müssen wir die Einzelheiten der vollständig mitgeteilten Beobachtungsdaten übergehen.

Als Endresultat ergiebt sich:

$$1 \,.\, S \,.\, E = 0{,}9482 \,.\, 10^{10}\ \frac{\text{mm.}}{\text{sec.}}.$$

Ok.

F. Kohlrausch. Ueber die Messung der Windungsfläche einer Drahtspule auf galvanischem Wege und über den absoluten Widerstand der Quecksilbereinheit. Gött. Nachr. 1882. 654-661.

Leitet man einen galvanischen Strom durch eine Drahtrolle, so ist die Wirkung derselben aus grosser Entfernung vergleichbar mit derjenigen eines Magnets. Indem der Verfasser denselben Strom gleichzeitig durch eine Tangentenbussole mit einem Drahtkreis und die zu untersuchende Rolle gehen lässt und die ablenkende Wirkung derselben auf die Magnetnadel beobachtet, kann er hieraus die Windungsfläche der Rolle im Vergleich zu der leicht genau zu messenden Fläche des Drahtkreises bestimmen. Ok.

H. Weber. Der Rotationsinductor, seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung des Ohm in absoluten Maassen. Leipzig. G. Teubner. 1882.

Eine mehrfach angewandte Methode der absoluten Widerstandsbestimmung beruht auf der Rotation einer Rolle um eine Axe, während in ihrem Mittelpunkt eine Nadel aufgehängt ist,

welche durch die in der Rolle entstehenden Inductionsströme abgelenkt wird. Der Verfasser entwickelt zunächst die allgemeinen Formeln, welche bei der Ausführung eines solchen Versuches zu verwenden sind, indem er annimmt, dass die Rotationsaxe der Rolle einen beliebigen Winkel mit der magnetischen Axe der Nadel bildet. Es ergiebt sich aus dieser Rechnung, dass es am zweckmässigsten ist, die Rolle um eine horizontale Axe rotiren zu lassen, welche fortdauernd mit der Nadelaxe zusammenfällt. Bei dieser Anordnung werden in der Rolle Ströme nur durch die Verticalcomponente des Erdmagnetismus und durch gegenseitige Einwirkung der Windungen auf einander, nicht aber durch die Nadel inducirt. Die Berücksichtigung der erwähnten Selbstinduction bereitet bei solchen Versuchen die Hauptschwierigkeit. Die Berechnung des Inductionscoefficienten der Rolle nach Formeln von Maxwell liefert wesentlich andere Werte, als der Versuch. Die getroffene Versuchsanordnung wird auf die Bestimmung eines Widerstandes nach absolutem Maass angewandt. Der Verfasser hat hierzu einen Etalon der British Association gewählt und findet für denselben:

$$0{,}9877 \,.\, 10^{10} \frac{\text{Millimeter.}}{\text{Secunde}}.$$

Ok.

E. Dorn. Zur Multiplications- und Zurückwerfungsmethode. Wiedemann Ann. (2) XVII. 654-673.

Werden auf eine in Schwingung befindliche Magnetnadel in dem Augenblick ihres Durchgangs durch die Gleichgewichtslage Stösse durch momentane Inductionsströme ausgeführt, so nähern sich die beobachteten Ausschläge bei Fortsetzung dieses Verfahrens nach einiger Zeit einem gewissen Grenzwerte. Aus demselben erhält man ein Maass für die Stärke der angewandten Inductionsstösse.

Die Ausdrücke, nach denen dieselben aus den Ablenkungen berechnet werden können, werden gewöhnlich unter der Voraussetzung entwickelt, dass die Inductionsstösse genau im Augen-

blick des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage erfolgen. Dies ist praktisch schwer auszuführen. Der Verfasser giebt daher allgemeinere Formeln, bei welchen eine gewisse Abweichung von dem angegebenen Augenblick vorausgesetzt wird. Er gelangt hierbei zu dem folgenden Resultat.

Ist die Schwingungsgleichung des Magnets von der Form:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\varphi}{dt} + \beta^2\varphi = 0,$$

setzt man ferner:

$$\varrho^2 = \beta^2 - \alpha^2,$$

so ist die Ablenkung der Nadel zur Zeit t:

$$\varphi = e^{-\alpha t}\left\{\varphi' \cos\varrho t + \frac{v' + \alpha\varphi'}{\varrho}\sin\varrho t\right\},$$

seine Geschwindigkeit

$$v = e^{-\alpha t}\left\{v' \cos\varrho t - \frac{\alpha v' + (\varrho^2 + \alpha^2)\varphi'}{\varrho}\sin\varrho t\right\}.$$

Hierin bedeutet:

$$\varphi' = \varphi_0 - \frac{1}{\varrho}\sum_1^n h\gamma_h e^{\alpha t_h}\sin\varrho t_h,$$

$$v' = v_0 + \sum_1^n h\gamma_h e^{\alpha t_h}\left\{\cos\varrho t_h + \frac{\alpha}{\varrho}\sin\varrho t_h\right\},$$

wo φ_0 und v_0 Ablenkung und Geschwindigkeit für $t = 0$ bedeuten; und angenommen wurde, dass die Geschwindigkeit v in den Zeitmomenten $t_1, t_2 \dots t_n$ um $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ vermehrt wurde. Die Constanten φ' und v' erhalten etwas andere Werte, wenn die Induction nicht durch Momentanstösse, sondern durch Drehung eines Erdinductors erfolgte. Aus den allgemeinen Formeln werden dann weiter passende Näherungsformeln entwickelt und für specielle Fälle durchgerechnet. Es zeigt sich dabei, dass bei der Multiplicationsmethode die Ausschläge stets zu klein sind, wenn die Stösse nicht momentan und rechtzeitig erfolgen, während bei der Zurückwerfungsmethode die Ausschläge bei unrechtzeitigen Momentanstössen zu gross werden, bei Benutzung eines Erdinductors aber Abweichungen nach beiden Seiten erfolgen können. Ok.

M. BRILLOUIN. Comparaison des coëfficients d'induction. Ann. d. l'Éc. N. (2) VI. p. 339-425, C. R. XCIV. 436-437.

Die umfangreiche Abhandlung enthält eine experimentelle Prüfung verschiedener von Maxwell (Treatise on electricity II. 355-357) angegebenen Methoden, die Inductionscoefficienten von Rollen zu prüfen. Hierbei kann es sich handeln entweder um die Inductionswirkung einer Rolle auf eine zweite, wenn durch erstere ein Strom geleitet wird, oder um die Selbstinduction einer Rolle, bei Oeffnung und Schliessung eines durch dieselbe fliessenden Stromes. Man kann daher vergleichen:

1) Die gegenseitigen Inductionscoefficienten zweier Rollenpaare,

2) die Selbstinductionscoefficienten zweier Rollen,

3) einen Coefficienten der ersten und der zweiten Art.

Eine eingehendere Besprechung der hierbei angewandten Methoden dürfte hier nicht am Orte sein. Wir wollen daher nur kurz erwähnen, dass die beiden letzten Bestimmungen durch eine Wheatstone-Brückenanordnung ausgeführt werden, bei welcher durch passende Widerstandsbestimmung der Brückendraht nicht allein bei einem constanten Strom, sondern auch bei Oeffnung und Schliessung desselben stromlos bleibt. Die Berechnung der in Frage kommenden Coefficienten geschieht nach den schon von Maxwell gegebenen Formeln. Eine nicht unwichtige Fehlerquelle hat der Verfasser ausführlicher untersucht. Dieselbe besteht in der Eigenschaft enggewundener Rollen, als Condensatoren zu wirken. Der Einfluss dieser Erscheinung auf die Bestimmung der Inductionscoefficienten wird in dem letzten Abschnitt der Abhandlung erörtert. Ok.

A. OBERBECK. Ueber die Phasenunterschiede elektrischer Schwingungen. Berl. Ber. 1882. 125-131, 1065-1074.

A. OBERBECK. Ueber elektrische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Phasen. Wiedemann Ann. (2) XVII. 816-841, 1040-1042.

Durch Versuche mit schnell wechselnden elektrischen Strö-

men, welche der Verfasser nach dem Vorgange von W. Weber als elektrische Schwingungen bezeichnet, wurde derselbe darauf geführt, eine bisher nicht beachtete Eigenschaft des Electrodynamometers zu Untersuchungen auf den verschiedensten Gebieten der Elektricität zu benutzen. Bei dem genannten Instrument wird bekanntich eine aufgehängte Drahtrolle durch die electrodynamische Wirkung fester Rollen gedreht. Das Drehungsmoment ist dem Product der Intensitäten der beiden Ströme proportional. Wechseln dieselben schnell ihr Vorzeichen, so erfolgt auch dann noch eine Ablenkung, welche dem Mittelwerte dieses Products proportional ist. Lassen sich die Stromintensitäten durch die Formeln

$$J = A \cdot \cos\frac{\pi t}{T}, \quad J' = A' \cos\left(\frac{\pi t}{T} - \varepsilon\right)$$

ausdrücken, so ist.

$$\frac{1}{T}\int_0^T JJ'\,dt = \frac{AA'\cos\varepsilon}{2}.$$

Wenn daher der Phasenunterschied ε den Wert $\frac{\pi}{2}$ beträgt, so erfolgt keine Ablenkung.

Elektrische Schwingungen mit regulirbarem Phasenunterschied kann man auf verschiedene Weise experimentell herstellen. In der ersten Abhandlung (ausführlicher in Wiedem. Ann. (2) XVII.) entwickelt der Verfasser zunächst die Theorie der Verbreitung elektrischer Schwingungen in einem verzweigten Leitersystem. Es wird dabei angenommen, dass in den Zweigen Selbstinduction vorkommt und dass Condensatoren mit Verzweigungspunkten verbunden sind. Von besonderem Interesse ist dabei die Verzweigung nach dem Schema der Wheatstone'schen Brücke, speciell die Untersuchung des Phasenunterschieds zwischen dem Hauptzweig und dem Brückenzweig. Die Bedingungen für den Phasenunterschied $\frac{\pi}{2}$ zwischen den Schwingungen in den genannten beiden Zweigen führen in speciellen Fällen zu einer Reihe bemerkenswerter Formeln, welche die Bestimmung und Vergleichung von Inductionscoefficienten und Condensatorcapacitäten ge-

statten. Diese Formeln werden durch Versuche geprüft, auf welche hier nicht näher eingegangen werden kann.

In der zweiten Abhandlung wird eine directere Methode beschrieben, zwei elektrische Schwingungen mit Phasenunterschieden herzustellen. Ein Magnet wird in schnelle Rotation versetzt, während derselbe sich im Innern zweier Drahtrollen befindet, welche gegen einander um die Rotationsaxe des Magnets gedreht werden können.

Eine einfache Rechnung liefert Formeln für den Verlauf der beiden inducirten Wechselströme. Aus denselben ergiebt sich zunächst eine neue Methode, Inductionscoefficienten von Drahtrollen zu messen.

Durch Einschaltung einer Flüssigkeitszelle in einen der Stromkreise erfolgt eine schnell wechselnde Polarisation der Elektroden. Diese erzeugt eine Phasenverschiebung in dem Stromkreis. Auch hier wird eine Berechnung derselben auf Grund einer einfachen Annahme über die Natur der galvanischen Polarisation gegeben. Die Versuche zeigen indess, dass dieselbe nicht genau zutreffend ist, so dass weitere Untersuchungen hierüber auszuführen sind. Ok.

— —

M. Deprez. Des actions électriques dans les systèmes conducteurs semblables. C. R. XCIV. 431-434.

M. Deprez. Sur le transport de la force aux grandes distances. C. R. XCIV. 434-436.

M. Deprez. Nouvelles expressions du travail et du rendement économique des moteurs électriques. C. R. XCV. 778-781.

Mit Rücksicht auf das Problem der Kraftübertragung behandelt der Verfasser in der ersten Notiz die Frage, in welcher Weise die elektrodynamische Wirkung eines Systems von Leitern sich ändert, wenn die Dimensionen derselben, bei gleichbleibender Stromintensität, sämmtlich in einem bestimmten Verhältnis verändert werden. Die zweite Notiz enthält eine kurze Wieder-

gabe der Versuchsresultate bei einer Kraftübertragung auf grosse Entfernungen, während in der letzten Mitteilung der öconomische Coefficient bei demselben Vorgang durch die Tourenzahl der empfangenden Maschine und eine an derselben zu messende Arbeitsgrösse ausgedrückt wird. Ok.

M. Lévy. Sur la solution pratique du problème du transport de la force à de grandes distances. C. R. XCIV. 511-512.

Um das Verhältnis der nutzbaren Arbeit an der einen Station zu der aufgewandten Arbeit an der anderen Station möglichst gross zu machen, schlägt der Verfasser vor, an der einen Station mehrere Maschinen neben einander zu setzen und eine entsprechende Anordnung an der anderen Station zu treffen. Dann soll man den öconomischen Coefficienten bis nahezu zur Einheit steigern können. Von praktischem Nutzen dürfte eine solche Anordnung kaum sein. Ok.

M. Lévy. Sur la relation entre la force électromotrice d'une machine dynamo-électrique et sa vitesse de rotation. C. R. XCV. 832-864.

M. Deprez. Sur les moteurs électriques. C. R. XCV. 1056-1058.

M. Levy. Sur une communication de M. M. Deprez, relative au transport de la force. C. R. XCV. 1230-1232.

In der ersten Mitteilung führt der Verfasser den Beweis, dass die elektromotorische Kraft einer dynamo-elektrischen Maschine nicht der Winkelgeschwindigkeit proportional gesetzt werden darf, sondern dass dieselbe jedenfalls eine complicirtere Function derselben ist und etwa in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen entwickelt werden kann. Deprez bestreitet dies und behauptet, dass das Gesetz der Proportionalität wenigstens für die Praxis durchaus zureichend ist, eine Behauptung, welche Lévy in der letzten Mitteilung in Zweifel zieht. Ok.

G. Basso. Sopra un caso particolare d'equilibrio per un solenoide soggetto all' azione magnetica terrestre ed a quella d'una corrente elettrica. Torino Atti XVII. 358-368.

Ein Solenoid ist so aufgehängt, dass es sich um eine verticale Axe frei drehen kann. In der Ebene des magnetischen Meridians befindet sich ein Strom, welcher drei Seiten eines Rechtecks durchläuft. Die eine Seite desselben fällt mit der Axe des Solenoids im Ruhezustand zusammen, die zweite ist vertical über derselben; die beiden andern sind vertical. Der Strom soll nur die drei letzten Seiten durchlaufen. Der Verfasser berechnet die neue Gleichgewichtslage des Solenoids unter dem gemeinsamen Einfluss des Erdmagnetismus und des Stromes.

Ok.

F. Kohlrausch. Absolute Messungen mittels bifilarer Aufhängung, insbesondere zwei Methoden zur Bestimmung der erdmagnetischen Horizontal-Intensität ohne Zeitmessung. Wiedemann Ann. (2) XVII. 737-773.

Die im Principe so schöne Gauss'sche Methode der Messung des Erdmagnetismus nach absolutem Maass hat bei der Ausführung den Nachteil, dass die Gesammtheit aller Beobachtungen eine verhältnismässig lange Zeit in Anspruch nimmt, innerhalb deren die zu messende Grösse möglicher Weise sich verändern kann. Deshalb ist die hier beschriebene Methode (eigentlich sind es zwei Modificationen einer Methode) von Wichtigkeit, da bei derselben diejenigen Messungen, bei denen der Erdmagnetismus direct betheiligt ist, in sehr kurzer Zeit ausgeführt werden können.

Die vom Verfasser als bifilar galvanometrische bezeichnete Methode besteht in Folgendem. Eine Drahtrolle ist bifilar aufgehängt. Die Windungsebene fällt mit dem magnetischen Meridian zusammen. Durch die Windungen wird ein Strom i geleitet. In Folge der Wirkung des Erdmagnetismus wird die Rolle

um einen kleinen Winkel gedreht, welcher zu beobachten ist. Gleichzeitig wirkt die vom Strom durchflossene Rolle ablenkend auf einen Magnetstab, welcher nördlich oder südlich davon im Meridian hängt. Es gelten dann die beiden Gleichungen:

$$D.\mathrm{tg}\alpha = fiH,$$

$$a^3.\mathrm{tg}\varphi = \frac{fi}{H}.$$

In denselben ist D das bifilare Drehungsmoment, α die Ablenkung der Bifilarrolle, φ diejenige des Magnetometers, a die Entfernung der Rollen- und Magnetmittelpunkte. Aus beiden Gleichungen lässt sich die Horizontalcomponente H berechnen.

Ersetzt man die vom Strom durchflossene Rolle durch einen Magnetstab, so erhält man die andere bifilar magnetische Methode. Die Abhandlung enthält ausführlich alle bei beiden Methoden in Betracht kommenden Rechnungen, besonders die Bestimmung des bifilaren Drehungsmoments mit Berücksichtigung der Elasticität der Drähte. Zwei ausgeführte Messungen gaben gut übereinstimmende Resultate. Ok.

J. Stefan. Ueber die magnetische Schirmwirkung des Eisens. Wien. Ber. LXXX.; Wiedemann Ann. (2) XVII. 928-956.

Die Poisson'sche Theorie der magnetischen Induction führt zu dem Schluss, dass ein in einer eisernen Hohlkugel befindlicher Magnet nach aussen eine viel schwächere Wirkung ausübt, als ohne die Hülle. Da diese Schirmwirkung bei der Gramme'schen Maschine eine wichtige Rolle spielt, so hat der Verfasser dieselbe experimentell untersucht. Zu dem Zweck wurde zuerst die ablenkende Wirkung eines Magnetstabs auf eine Nadel beobachtet und dann ein Eisenring um den Stab gelegt, wodurch die Wirkung erheblich geschwächt wurde.

Ferner wurde die Schwingungsdauer eines aufgehängten Magnetstabes bestimmt und derselbe ebenfalls mit einem eisernen Hohlcylinder umgeben. Hierdurch wurde die Schwingungsdauer vergrössert. Die erhaltenen Resultate werden durch ein-

fache Rechnungen erklärt. Zunächst zeigt der Verfasser, dass die Poisson'sche Theorie und die Faraday'sche Vorstellung der Kraftlinien zu demselben Ergebnis führen. Es wird dann angenommen, dass ein unbegrenzter eiserner Hohlcylinder in ein gleichförmiges, magnetisches Kraftfeld gebracht wird. Es zeigt sich, dass die magnetische Wirkung im Innern des Cylinders erheblich verkleinert ist. Die Rechnungen, zu welchen das erwähnte Problem führt, geben gleichzeitig die Lösung eines Strömungsproblems. Denkt man sich in ein mit geradlinigen Strömen erfülltes Feld einen unendlich grossen Hohlcylinder von anderem resp. besserem Leitungsvermögen eingeführt, so werden dadurch die Stromlinien verändert. Das berechnete magnetische Potential giebt in diesem Fall das Potential der elektrischen Strömung. Zum Schluss beschreibt der Verfasser noch einige Inductionsversuche, welche ebenfalls einen Beweis der Schirmwirkung einer hohlen Eisenmasse liefern.

Ok.

J. STEFAN. Ueber die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes. Wien. Anz. 1882. 116-117; Wien. Ber. LXXXV. 987-996; Wiedemann Ann. (2) XVII. 956-964.

Ist die betreffende Axe die x-Axe und setzt man

$$\varrho^2 = y^2 + z^2,$$

so nimmt bekanntlich die Laplace'sche Differentialgleichung die Form an:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = 0.$$

Das System der Kraftlinien, welche die Potentialflächen senkrecht schneiden, ist dann durch eine Function $U =$ Const. gegeben, welche den Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\varrho\frac{\partial V}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varrho} = \varrho\frac{\partial V}{\partial x}$$

genügen muss.

Der Verfasser bespricht eine Reihe naheliegender Beziehungen zwischen den beiden Functionen.

1) Gehören zu den Potentialfunctionen V_1, V_2, $V_3 \dots$ die Stromfunctionen U_1, U_2, $U_3 \dots$, so entspricht auch dem Potential $V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots$ die Stromfunction $U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots$.

2) Ist V in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickelt, so dass

$$V = \frac{A_0}{r} + \frac{A_1 P_1}{r^2} + \frac{A_2 P_2}{r^3} + \cdots,$$

wo $P_n(\cos\vartheta)$ eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung bedeutet, so ist die zugehörige Strömungsfunction

$$U = A_0 \frac{dr}{dx} - \frac{A_1}{1} \frac{d^2r}{dx^2} + \frac{A_2}{1.2} \frac{d^3r}{dx^3} - \cdots.$$

3) Ist endlich das Potential durch die Reihe

$$V = Q - \frac{\varrho^2}{2^2} \frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{\varrho^4}{2^2 4^2} \frac{d^4Q}{dx^4} - \cdots$$

gegeben, so ist die zugehörige Strömungsfunction

$$U = \frac{\varrho^2}{x} \frac{dQ}{dx} - \frac{\varrho^4}{2^2.4} \frac{d^3Q}{dx^3} + \frac{\varrho^6}{2^2.4^2.6} \frac{d^5Q}{dx^5} - \cdots.$$

Für diese allgemeinen Beziehungen giebt der Verfasser noch eine Anzahl von Beispielen. Ok.

M. Abria. Sur les unités de Gauss. Bord. Mém. (2) V. 15-27.

Der Verfasser bespricht die Gauss'sche Methode, den Erdmagnetismus nach absolutem Maass zu bestimmen, und legt besonderes Gewicht auf die genauere Feststellung der zu Grunde liegenden Einheiten. Ok.

A. Wassmuth. Ueber eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung. Wien. Ber. (2) LXXXVI. 539-550.

A. Wassmuth. Ueber den inneren aus der mechanischen Wärmetheorie sich ergebenden Zusammenhang einer Anzahl von elektromagnetischen Erscheinungen. Wien. Ber. (2) LXXXVII. 82-97.

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen des Verfassers bilden einige Versuche über die Einwirkung eines allseitigen Drucks auf die Magnetisirung eines Eisenstabs, wobei derselbe zu dem Resultat gelangt ist, dass eine Vermehrung des Drucks die entgegengesetzte Wirkung wie eine Erhöhung der Temperatur hat. Der Verfasser wendet nun hierauf die beiden Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie an. Von grösserem Interesse ist der Fall, wo von Druckänderungen abgesehen wird. Hierbei lässt sich die Temperaturerhöhung berechnen, welche der Stab durch die Magnetisirung erfährt. Endlich folgt eine Anwendung auf die Magnetisirungsänderungen durch einseitigen Zug eines Stabes. In der zweiten Abhandlung bilden ebenfalls die Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie den Ausgangspunkt. Als unabhängige Variable wird die Temperatur und eine in besonderen Fällen näher zu bestimmende Grösse z gewählt. So wird bei den beiden weiter betrachteten Beispielen für z ein einseitiger Zug auf den Stab in seiner Längsrichtung und eine Torsionskraft genommen. Hierbei lassen sich einige Schlüsse ziehen, welche die Beziehungen zwischen Torsion und Magnetisirung zu erklären geeignet sind. Ok.

A. Wassmuth. Ueber elektromagnetische Tragkraft. Wien. Anz. 1882. 12-13.

Kurzer Bericht über eine Experimentaluntersuchung. Zwei Ringe waren in ihrer Mitte durchschnitten. Es werden die Kräfte bestimmt, durch welche dieselben auseinander gerissen werden können, ebenso wie die magnetischen Momente der Ringe.

Ok.

G. Jung. Sul pseudofoco del paraboloide e sul centro magnetico. Rend. Ist. Lomb. (2) XV. 407-418.

Geometrische Betrachtungen über den Pseudofocus eines Paraboloids, worunter der Verfasser einen Punkt versteht, welcher gleich weit entfernt ist von den Scheiteln der beiden Focal-

parabeln und über den Zusammenhang desselben mit einem Punkt, welchen Beltrami (Annali di Matematica X. 1882) als magnetisches Centrum bezeichnet hat. Ok.

Quet. Les forces d'induction que le Soleil développe dans les corps par sa rotation, varient, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse des carrés des distances. C. R. XCV. 682-685

Der Verfasser stellt den Satz auf: „Für einen Körper, welcher sich um die Sonne in der Ebene ihres Aequators in einem Kreise bewegen würde, ist das Verhältnis der beiden auf ihn ausgeübten Inductionskräfte, von welchen die eine durch die Umdrehungsgeschwindigkeit und die andere durch die Drehung des Gestirnes bedingt ist, gleich dem Verhältnis jener Zeit, welche die Sonne zu einer vollständigen Drehung um ihre Axe gebraucht, zu der Zeit, während welcher der Conductor seinen Umlauf vollführt. Wenn Conductoren sich gleichzeitig auf einer Geraden befinden, welche durch den Mittelpunkt der Sonne geht, sind ihre Inductionskräfte, welche von der Rotation des Gestirnes herrühren, parallel unter sich und ändern sich im umgekehrten Quadrat der Entfernung. Unter diesen Bedingungen und allein mit Rücksicht auf die Intensität ist das Gesetz dasselbe wie für das Licht, die Wärme und die Sonnenanziehung." Dieser Satz folgt aus Formeln, welche der Verfasser 1878 (s. C. R. LXXXVII. 860-862 und F. d. M. X. 747) veröffentlicht hat. Der Verfasser berechnet nach obigem Satze die Inductionswirkung für verschiedene Planeten und Cometen. Rs.

G. Ricci. Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti. Ven. Ist. Atti (5) VIII. 1025-1048.

Durch Benutzung der Methode von Beltrami, welche dieser in seiner „Nota sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici" (Cim. (2) VII. u. VIII.) anwendete, könnte man be-

weisen, dass zu jeder Verteilung der magnetischen Materie innerhalb eines Körpers oder auf dessen Oberfläche eine äquivalente Verteilung constanter galvanischer Ströme gefunden werden kann. Der Verfasser zieht es vor, die Bedingung dafür direct herzuleiten, dass eine galvanische Verteilung und eine magnetische Verteilung für einen Raum S, welcher von den beiden Flächen $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$ begrenzt ist, äquivalent seien. Darauf werden allgemeinere Betrachtungen angestellt, nämlich in Bezug auf zwei Räume S und S_0, deren erster von den Flächen (μ_0), (μ_1), (ν_0), (ν_1) und deren zweiter von den Flächen (μ_0), (μ_1), (ν_0) begrenzt ist. Diese Rechnungen und die weiteren speciellen Entwickelungen müssen im Original nachgelesen werden. Rs.

Capitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

E. A. Rowland. Relazione critica sulle varie determinazioni dell' equivalente meccanico della caloria. Opera premiata dal Reale Istituto Veneto di scienze, e tradotta dall' inglese. Appendice al Tomo VII. dell Serie V. degli Atti del R. Ist. Ven. Venezia. G. Antonelli.

Die bisherigen Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalentes sind systematisch geordnet und kritisirt. Der Verfasser berichtet besonders ausführlich über seine Abhandlung: „On the Mechanical Equivalent of Heat with subsidiary Researches on the variation of the Mercurial from the Air Thermometer, and on the variation of the Specific Heat of Water,“ welche in Boston Proc. (2) VII. 75-200 veröffentlicht wurde. Von den erhaltenen Werten des mechanischen Aequivalentes der Wärme

wählt der Verfasser einige aus, er legt jedem derselben ein entsprechendes Gewicht bei und findet bei Berücksichtigung dieser Gewichte als Mittelwert 427,62 bei 13°,9 C in der Breite von Baltimore. Bei dieser Berechnung war dem Rowland'schen Werte 427,7 bei 14° C ein bedeutendes Gewicht beigelegt. Wenn man diesen Wert weglässt, bekommt man als Mittel der anderen Werte, unter Berücksichtigung der diesen vorhin beigelegten Gewichte, 427,5 bei 13°,8 C. Rs.

E. H. Amagat. Sur une forme nouvelle de la relation $F(vpt) = 0$ relative aux gaz et sur la loi de dilatation de ces corps à volume constant. Ann. d. Chim. et Phys. (5) XXVIII. 500-507.

E. H. Amagat. Sur la relation $\varphi(v, p, t) = 0$ relative aux gaz, et sur la loi de dilatation de ces corps sous volume constant. C. R. XLIV. 847-851.

1) Der Verfasser stellt die Werte des Dilatationscoefficienten der Kohlensäure bei normalem Drucke, wie Korteweg sie nach den Formeln von Clausius und van der Waals berechnet hat, mit dem Werte von Regnault und den Werten zusammen, welche er im Jahre 1872 erhalten hat. Die Uebereinstimmung zwischen den Werten des Verfassers und den nach der Formel von van der Waals berechneten, lässt nichts zu wünschen übrig. Trotzdem reicht diese Formel eben so wenig aus, die Gesammtheit der auf dasselbe Gas bezüglichen Resultate darzustellen, wie die von Clausius.

Nicht durch theoretische Betrachtungen, wie van der Waals und Clausius, gelangt der Verfasser zu einer Gleichung $\varphi(p,v,t) = 0$, sondern durch Berücksichtigung geometrischer Eigenschaften einer gewissen Curvenschaar, welche er für Kohlensäure und Aethylen nach seinen Versuchen gezeichnet hat. Bei jeder Curve entsprechen die Abscissen den Drucken p, die Ordinaten den Producten pv für eine gewisse Temperatur. Die Curven sind für je 10° Temperaturunterschied gezeichnet. Daher schneidet jede gerade Linie, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht, die Curven in

Punkten, welche demselben Volumen der Gasmasse entsprechen, sie sind Linien gleichen Volumens.

Als der Verfasser die Curvenschaaren für Kohlensäure und Aethylen, welche wegen der Nachbarschaft des kritischen Punktes lehrreicher als die anderen sind, genau prüfte, fand er, dass die Linien gleichen Volumens durch die den verschiedenen Temperaturen entsprechenden Curven in wesentlich gleiche Teile zerschnitten werden. Da die Temperatur sich von einer Curve zur nächsten um 10° ändert, bedeutet jene Eigenschaft, dass die Linien gleichen Volumens durch die Curven in Abschnitte geteilt werden, welche proportional den Differenzen der bezüglichen Temperaturen sind. Dies gilt für den complicirtesten Teil der Curvenschaar ebenso, wie für den, wo die Curven im Wesentlichen parallel und gerade sind. Da keine anderen Geraden, als die durch den Anfangspunkt gehenden, diese Eigenschaft besitzen, hat der Verfasser diese als eine charakteristische Eigenschaft der Netze angesehen. Man hat daher $d\mu = C.dt$, folglich $p = C(t-t_0)$, wenn der Anfangsdruck $p_0 = 0$ gesetzt wird. C und t_0 hängen nur von der willkürlich gewählten Linie gleichen Volumens ab, sie sind Functionen des Volumens allein, und sie seien mit $f(v)$ und $F(v)$ bezeichnet. Der Verfasser konnte seine experimentellen Resultate, welche er für die Kohlensäure erhalten hatte, gut darstellen, wenn er

$$F(r) = \frac{M(v-\alpha)}{v^m + \alpha v^{m-1} + \cdots + K}$$

setzte, wo M wenigstens 2 und α das Atomvolumen bedeutet. Die Function $f(v)$ muss so beschaffen sein, dass für genügend grosse Werte von v die gesuchte Beziehung sich auf $p(v-\alpha) = AT$ reducirt, wenn T die absolute Temperatur bezeichnet. $F(v)$ verschwindet dann, und man kann setzen $f(v) = \frac{\varphi(v)}{v-\alpha}$. Folglich bekommt der Verfasser für die gesuchte Beziehung

$$p(v-\alpha) = \varphi(v)\left[T - \frac{M(v-\alpha)}{v^m + \alpha v^{m-1} + \cdots + K}\right].$$

Die Formel von van der Waals ist ein specieller Fall von dieser.

Die Gleichung $p = C(t-t_0)$ enthält das Dilatationsgesetz der

Gase bei constantem Volumen: „Wenn man eine bestimmte Gasmasse erhitzt und das von ihr eingenommene Volumen constant erhält, ist der Druck beständig der um eine constante Grösse verminderten, absoluten Temperatur proportional. Jene Grösse ändert sich mit dem willkürlich gewählten Volumen und hängt allein von diesem ab.“ Aus dem für $F(v)$ gewählten Ausdrucke folgt, dass für die vollkommenen Gase die constante Grösse Null und daher der Druck der absoluten Temperatur proportional ist.

Die vorstehenden Betrachtungen sind nur auf Gase anwendbar, d. h. auf eine Curvenschaar, welche sich auf Temperaturen bezieht, die oberhalb des kritischen Punktes liegen, oder auf Drucke unterhalb jener, welche die Verflüssigung erzeugen. Wenn dagegen eine Beziehung $\varphi(v, p, t) = 0$ gewonnen werden soll, die sich auf den flüssigen und gasförmigen Zustand bezieht, würde man nicht mehr $dp = f(v)dt$ haben. Die Grössen C und t_0 würden nicht nur vom Volumen, sondern auch von der Temperatur abhängen. Das Glied in der Formel von Clausius, welches t_0 entspricht, erscheint dem Verfasser als eine zu einfache Function der Temperatur, und ferner hat die Formel nur eine Constante dividirt durch $(v-\alpha)$ an Stelle von C.

Der Verfasser wird die numerischen Coefficienten seiner Formel für die verschiedenen von ihm untersuchten Gase erst geben, nachdem er sich jenen Teil der Curvenschaar, welcher den kritischen Punkt enthält, durch eine specielle nnd besonders sorgfältige Untersuchung verschafft hat; denn dort fallen die Curven mit einer so bedeutenden Geschwindigkeit ab, dass die bestimmten Punkte jener Curve weit von einander entfernt sind, obgleich die Beobachtungen bei ziemlich benachbarten Drucken ausgeführt waren.

Die zweite Arbeit ist ein Auszug der ersten. Rs.

G. Lippmann. Expressions générales de la température absolue et de la fonction de Carnot. C. R. XCV. 1058-1061.

Es wird daran erinnert, dass die absoluten Temperaturen T und T' durch die Gleichung

$$\frac{Q}{T} - \frac{Q'}{T'} = 0$$

definirt sind, wobei Q und Q' zwei Wärmemengen bedeuten. Der Verfasser will die absolute Temperatur als Function der thermischen Eigenschaften irgend eines Körpers ausdrücken. Ein beliebiges Thermometer zeige x, wenn es den betrachteten Körper berührt, y sei eine von x unabhängige Variable (Druck, Volumen, etc.), welche mit x den Zustand des Körpers vollständig bestimmt; dq sei die unendlich kleine absorbirte Wärmemenge während der Aenderung (dx, dy). Es wird angenommen

$$dq = Pdx + Qdy$$

und hinzugefügt, dass alle Werte von P und Q zwischen gewissen Grenzen von x und y experimentell oder in anderer Weise bestimmt sind. Für geschlossene Kreisprocesse findet man

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{T}\left(Q\frac{\partial T}{\partial x} - P\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Der gesuchte Wert T ist eine von y unabhängige Temperaturfunction und daher hat man

$$(1) \qquad \frac{\frac{\partial T}{\partial x}}{T} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$$

und folglich durch Integration, durch welche eine Constante T_0 eingeführt wird,

$$(2) \qquad T = T_0\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} dx}.$$

Es wird bewiesen, dass der Wert von T nicht davon abhängt, wie das benutzte Thermometer graduirt ist. Um die Gleichung (2) zu prüfen, wird sie auf zwei Fälle angewendet, von welchen das Resultat bereits bekannt ist, nämlich 1) auf vollkommene Gase, und 2) auf den Fall, wo y das Volumen der Gewichtseinheit irgend eines Körpers bezeichnet. Im letzteren Falle führt die

Gleichung (2) zu der von Sir W. Thomson gegebenen Formel

$$R = \frac{T - T_0}{T} = 1 - e^{-\frac{1}{E}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{e}}.$$

Aus Gleichung (1) kann man den allgemeinen Ausdruck der Carnot'schen Function C_x in Bezug auf den Thermometerausschlag x gewinnen; denn es ist

$$C_x = E\frac{\frac{dQ}{dx}}{Q} = E\frac{\frac{dT}{dx}}{T} = E\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}.$$

Wenn man $y = v$, $x = T$ nimmt, giebt der letzte Ausdruck eine Formel, welche Sir W. Thomson kürzlich auf anderem Wege erhalten hat (W. Thomson, Reprint of math. and phys. papers Cambridge 1882. S. 188). Rs.

A. Walter. Ueber die molecular-kinetischen Gesetze der Verdampfungswärme und der specifischen Wärme der Körper in verschiedenen Aggregatformen.
Wiedemann Ann. (2) XVI. 500-528.

Der Verfasser will die Continuitätstheorie der Aggregatformen, welche van der Waals gegeben hat, verbessern. Er stellt den Satz auf: „Die Verallgemeinerung des idealen Gasgesetzes oder die für Gase, Dämpfe, Flüssigkeiten gültige Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur ist gegeben durch:

$$(1) \qquad (p+f)ve^{-\frac{\beta}{v}} = \frac{2}{3}T,$$

wo

$$T = kt, \quad k = \frac{3}{2}h \quad \text{und} \quad f = \frac{\partial \Pi}{\partial v}.\text{“}$$

Hierin bedeutet Π die potentielle innere Energie des Körpers im Zustande eines Gases, eines Dampfes oder einer Flüssigkeit unter beliebigen Druckverhältnissen, T die mittlere kinetische Energie der Translation der Körpermolecüle, t die absolute Temperatur, welche für das Experiment zum Maasse der Bewegungs-

energie T mittels eines constanten Coefficienten k dient. Die Constante des idealen Gasgesetzes, welches aus (1) durch die Annahme $f = 0$, $\beta = 0$ sich ergiebt, ist mit h bezeichnet. β ist eine Temperaturfunction, deren Bedeutung näher dargelegt wird. Es wird gezeigt, wie man zu der Gleichung (1) gelangen kann.

Indem für Kohlensäure die Formel

$$\left(p + \frac{0{,}00874}{v^2}\right) v e^{-\frac{\beta}{v}} = 1{,}00646(1 + 0{,}00371 . \vartheta)$$

genommen und die Grösse β aus den älteren Versuchen von Andrews (Phil. Trans. for 1869, 575; Poggendorff Ann. Ergbd. V.) bestimmt wird, bekommt der Verfasser für β gut übereinstimmende Werte. Ferner teilt er mit, dass er mit den Versuchsresultaten von Janssen, Amagat, Ansdell und F. Roth bezüglich der Körper CO_2, NH_3, N_2O, CH_4 und C_2H_4 entsprechende Rechnungen ausgeführt habe, welche „gleich günstige Resultate" ergeben haben sollen. „Das Resultat derartiger Prüfungen scheint mir dahin ausgesprochen werden zu können; dass die Correction f des äusseren Druckes in der Tat bei Gasen sehr nahezu dem Quadrate des specifischen Volumens umgekehrt proportional, ausserdem aber auch von der Temperatur abhängig zu denken ist."

An der Grundformel werden weitere Betrachtungen für den Fall angestellt, dass der Stoff sich im kritischen Zustande befindet. Misst man die Veränderlichen p, t, v durch die kritischen constanten Werte, setzt man daher

$$\frac{p}{p^*} = \pi, \quad \frac{t}{t^*} = \tau, \quad \frac{v}{v^*} = \bar{v},$$

so hat man zwischen diesen Grössen die Beziehung

$$(2) \qquad \pi = \frac{2e^{\nu+\nu^*}}{1-\nu^*} \frac{\tau}{\bar{v}} - \frac{1+\nu^*}{1-\nu^*} \left(\frac{1}{\bar{v}}\right)^2,$$

wo

$$\nu = \frac{\beta}{v} \text{ und } \nu^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ist.

Als nothwendige Folgerung aus Gleichung (2) wird behauptet, „dass die von Herrn van der Waals zuerst aufgestellten Gesetze

$$\pi = \varphi(\tau), \quad v = \psi(\tau),$$

wo φ und ψ für alle Körper dieselben Functionen bedeuten würden, nur in der Nähe des kritischen Punktes, wo nahezu $\nu = \nu^*$, gelten können, dass dagegen allgemein gültige Gesetze von der Form:

$$\pi = \varphi(\tau, \nu), \quad v = \psi(\tau, \nu)$$

für den gesättigten Zustand eines Dampfes oder einer Flüssigkeit bestehen würden, wofern der Gleichung (2) eine allgemeine Gültigkeit zugeschrieben werden dürfte.“

Für die genannte Werkwärme der Verdampfung, r, findet der Verfasser

$$(3) \qquad r = \frac{2}{3} T(\mathrm{Li}\, e^{\nu_1} - \mathrm{Li}\, e^{\nu_2}).$$

Hierin bedeutet

$$\mathrm{Li}\, e^{\nu} = C + \log \nu + \frac{\nu}{1} + \frac{\nu^2}{2!\,2} + \frac{\nu^3}{3!\,3} + \cdots,$$

$$\nu_1 = \frac{\beta}{\omega_1}, \quad \nu_2 = \frac{\beta}{\omega_2},$$

und ω_1 bez. ω_2 sind die specifischen Volumina des Körpers bei der absoluten Temperatur t, je nachdem er sich im Zustande einer gesättigten Flüssigkeit oder eines gesättigten Dampfes befindet. Von Gleichung (3) behauptet der Verfasser, „dass sie ein unbedingt sicheres und allgemein gültiges physikalisches Gesetz von höchster Wichtigkeit ausspricht.“ Wenn Gleichung (3) sich durch die Erfahrung in ihren Consequenzen bestätigt, „dürften wir behaupten, dass jetzt die Natur der analytischen Function erkannt sei, welche die Disgregation und überhaupt die mechanischen Arbeitsleistungen bei den Zustandsänderungen der Gase, Dämpfe, Flüssigkeiten auszudrücken geeignet ist.“ Bezüglich des Wassers vorhandene Versuchsresultate werden für die nähere Discussion verwertet.

Hieran schliessen sich zwei weitere Abschnitte: „über die

Gesetze der Wärmecapacität gesättigter Flüssigkeiten und Dämpfe" und über „die allgemeinen thermodynamischen Grundgesetze der Gase, Dämpfe, Flüssigkeiten"; im letzten derselben wird für den Cohäsionsdruck f, welcher in (1) eingeführt wurde, der Ausdruck aufgestellt:

$$f = \frac{h}{v^2} \cdot \int_{t_0}^{t} te^{\frac{\beta}{v}} \frac{d\beta}{dt} dt.$$

Rs.

G. Schmidt. Ueber die innere Pressung und die Energie überhitzter Dämpfe. Wien. Anz. 154-155; Wien. Ber. LXXXVI. 511-538.

Als Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe wird angenommen

$$(1) \qquad pv = B(T-\theta),$$

indem θ eine zu bestimmende Function von p und v bezeichnet und $T = a+t = 274{,}6+t$ die absolute Temperatur ist, „weil der Ausdehnungscoefficient vollkommener Gase sowie für hoch verdünnte atmosphärische Luft nach Rankine mit $0{,}0036416 = 1:274{,}6$ angenommen werden kann." Ferner sei „$A = 1:423{,}5$ das calorische Aequivalent der Arbeitseinheit, U die Energie in Calorieen gemessen", $c = c_v$, $C = c_p$ (nach Clausius'scher Bezeichnungsweise), $\varkappa$ der „Grenzwert des Quotienten der beiden Wärmecapacitäten für unendliche Ueberhitzung", ε die von Hirn (siehe Mémoire sur la thermodynamique, 2. partie, Ann. d. Chim. et Phys. (4) XI. 5-111) eingeführte „innere Pressung", „welche die Molecularanziehung des Inneren auf die Oberflächeneinheit misst und in demselben Sinne wirkt, wie der äussere specifische Druck p." Die innere Pressung kann als Analogon des Elasticitäsmoduls fester Körper betrachtet werden. Indem gesetzt wird

$$\theta - p\frac{\partial\theta}{\partial p} = \varphi,$$

wo φ im Allgemeinen eine Function von p und v bedeutet, ergiebt sich u. A.

$$\varepsilon = \frac{p\varphi}{T-\varphi}, \quad \frac{C}{\varkappa c} = \frac{p}{p-(\varkappa-1)\varepsilon},$$

$$dU = \frac{A}{\varkappa-1}\,pdv + \frac{c}{p}(T-\varphi)\,dp = cdt + \frac{Ap\varphi}{T-\varphi}\,dv$$

$$= \frac{C}{\varkappa}\,dt - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{C\varphi}{p}\,dp \text{ oder } = \frac{T}{\varkappa}\left[dt - (\varkappa-1)\frac{\varphi}{p}\,dp\right].$$

Auf der adiabatischen Linie ist $dQ = 0$, also

$$T = D'p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Für zwei verschiedene Zustände auf der adiabatischen Linie ist

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Der Verfasser erhält für α_p, den Ausdehnungscoefficienten bei constanter Spannung, und für α_v, den bei constantem Volumen, die Werte

$$\alpha_p = \frac{1}{a-\theta+v\dfrac{\partial\theta}{\partial v}} \quad \text{und} \quad \alpha_v = \frac{1}{a-\varphi}.$$

Die Werte von ε, dQ, dU, α_p, α_v werden für folgende Fälle berechnet: 1) für die Annahme von Zeuner $C =$ const., 2) für die Annahme des Verfassers $c =$ const., 3) für Ritter's Hypothese $\theta = \dfrac{b}{pv\sqrt{v}}$, 4) für Rankine's Zustandsgleichung $pv = TR - \dfrac{D}{Tv}$.

„Die Hypothese von Clausius $p = \dfrac{BT}{v-\alpha} - \dfrac{D}{T(v+\beta)^2}$ zeigt einen anderen Typus, als in (1) vorausgesetzt wurde, lässt sich also hier nicht behandeln, und scheint bis jetzt nur für Kohlensäure nothwendig geworden zu sein.“

Der Verfasser giebt als Resultate seiner Untersuchung u. A. an: „Die Hypothese $C =$ const. oder $p(v + Dp^{\varkappa-1}) = BT$ ist für das numerische Rechnen am bequemsten.

Die Hypothese $c =$ const. oder $v(p+\varepsilon) = BT$ hat die grösste innere Wahrscheinlichkeit, ist aber nicht bis zum Sättigungspunkte anwendbar.

Eine Entscheidung über die numerisch bestpassende Formel

wird am einfachsten durch das Studium der Coefficienten α_p und α_v herbeigeführt werden" oder durch die Untersuchung von

$$\eta = \frac{a - \frac{1}{\alpha_p}}{a - \frac{1}{\alpha_v}} = \frac{1}{\varphi}\left[\theta - (T-\theta)\left(\frac{AB}{mC} - 1\right)\right],$$

worin $m = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$ ist. Rs.

J. Stefan. Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken. Wiedemann Ann. (2) XVII. 550-560.

Abdruck von Wien. Ber. LXXXIII. 953-954. Siehe F. d. M. XIII. 1881. 805-807. Rs.

H. Helmholtz. Thermodynamik chemischer Vorgänge. Berl. Ber. 1882. 22-31, 825-836.

Da eine Fortsetzung dieser Mitteilungen im Jahre 1883 veröffentlicht ist, wird das Referat im nächsten Jahrgange gegeben werden. Rs.

A. Wassmuth. Ueber die specifische Wärme des stark magnetisirten Eisens und das mechanische Aequivalent einer Verminderung des Magnetismus durch die Wärme. Wien. Ber. LXXXV. 997-1003.

Stefan hat in seiner Abhandlung „Ueber die Gesetze der elektrodynamischen Induction" (Wien. Ber. LXIV. 193-224) auf Seite 220 den Satz gegeben: „Zur Erwärmung des magnetischen Eisens ist mehr Wärme erforderlich als zur gleich starken Erwärmung des unmagnetischen." Falls keine freien Magnetismen auftreten, während das bei 0° magnetische Eisen das Maximum m seines Momentes erhalten hat, ist für ein Milligramm Eisen die Magnetisirungsarbeit

$$A_0 = \int_0^m x\,d\mu = J(C_{0\tau} - c_{0\tau})\tau,$$

indem J das magnetische Aequivalent der Wärme, $C_{0\tau}$ die mittlere specifische Wärme zwischen 0^0 und τ^0 des magnetischen Eisens, $c_{0\tau}$ die analoge Grösse für das unmagnetische Eisen ist. Denkt man sich das Eisen nicht bei 0^0, sondern bei t_1^0 bis zum Maximum magnetisirt, und dazu die Arbeit A_1 aufgewendet, so ist $t_1 + \tau_0 = \tau$, „falls τ_1 die Temperaturerhöhung des Eisens von der Temperatur t_1 vorstellt, die jetzt zur Vernichtung des Magnetismus nothwendig ist." Man hat daher

$$A_1 = J(C_{t_1\tau} - c_{t_1\tau})\tau_1,$$

und analog für die Temperatur t_2

$$A_2 = J(C_{t_2\tau} - c_{t_2\tau})\tau_2.$$

Für die weiteren Rechnungen wird angenommen, dass die mittleren specifischen Wärmen des magnetischen und des unmagnetischen Eisens in den Intervallen 0 bis τ, t_1 bis τ, t_2 bis τ als gleich angesehen werden können, und dass sie kurz mit C und c bezeichnet werden. Dann ist

$$\frac{A_0 - A_1}{A_0 - A_2} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Aus Versuchen mit zwei Eisenstäben leitet der Verfasser als Mittelwert

$$C - c = 2{,}7 \,.\, 10^8$$

ab. Darauf berechnet er die Temperatur τ, bei welcher das Eisen sich auch den stärkeren Kräften gegenüber als unmagnetisch erweisen würde, und findet als Mittelwert

$$\tau = 1346^0.$$

Vom Verfasser angestellte Experimente widerlegen den Einwand, welchen man gegen die gegebene Ableitung des mechanischen Aequivalentes der Abnahme des Magnetismus mit der Temperatur erheben könnte, dass neben der ursprünglichen axialen Magnetisirung in Folge der Erwärmung auch eine transversale Magnetisirung dazu käme, welche von bleibender oder von wechselnder Richtung sein könnte. Rs.

A. Wassmuth. Ueber eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung. Wien. Anz. 167-168; Wien. Ber. LXXXVI. 539-550.

Wenn ein Milligramm Eisen unter dem Einflusse der magnetisirenden Kraft x das Moment μ erhält, ist letzteres eine Function der Temperatur. Der Verfasser hat in seinen Mitteilungen „Ueber die Magnetisirbarkeit des Eisens bei höheren Temperaturen“ (Wien. Ber. LXXXII. 217-230) und „Ueber die Magnetisirbarkeit bei hohen Temperaturen“ (Wien. Ber. LXXXIII. 332-345, siehe auch F. d. M. XIII. 1881. 767) gezeigt, wie der Einfluss der Temperatur berücksichtigt werden kann. Weitere theoretische Betrachtungen haben ihn „zu dem Schlusse geführt, dass das durch die Kraft x erzielte Moment μ auch abhängig sein müsse von dem Drucke p, unter dem sich das Eisen befindet; es lässt sich sogar von vornherein erkennen, dass eine Vermehrung des Druckes die entgegengesetze Wirkung ausüben müsse, wie eine Erhöhung der Temperatur.“ „Wächst der Druck, so nimmt im Allgemeinen das Moment ab, nur für stärkere Magnetisirungen, d. i. solche, die dem Maximum nahe liegen, findet eine Zunahme des Momentes statt.“ Der Verfasser kennt keinen früher angestellten Versuch, bei welchem der Einfluss einer allseitigen Druckänderung auf die Magnetisirbarkeit untersucht wäre; er beschreibt einige von ihm ausgeführte Versuche, welche eine Bestätigung des letzten Satzes liefern. Bei den folgenden theoretischen Betrachtungen wird angenommen, dass das von der Kraft x erzeugte Moment μ sowohl von der absoluten Temperatur, als auch von dem auf die Einheit der Oberfläche ausgeübten Druck p abhängig ist. Mit Benutzung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie und bei den Annahmen, dass

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_T = -\frac{L}{x} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_p = +\frac{K}{x}$$

gesetzt werden darf, wenn L und K positive Constanten bedeuten, gelangt der Verfasser zu dem Satze: „Durch Compression des Eisens wird nahe die gleiche Wärme erzeugt, ob sich das Eisen im magnetischen oder unmagnetischen Zustande befindet.“

Ferner wird gefunden: „Wird Eisen durch schwächere magnetische Kräfte im luftleeren Raume magnetisirt, so kühlt es sich ab. Für stärkere Magnetisirungen tritt, wie bei dem gewöhnlichen Luftdrucke, eine Erwärmung auf.“ Hierzu wird bemerkt, dass das Verhalten des Eisens bei der Magnetisirung im luftleeren Raume ganz analog ist dem des Kautschucks, wenn derselbe durch schwächere oder stärkere Kräfte gedehnt wird. Aus der Gleichung

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T}{MC}\left(C\frac{\mu}{x} - B\mu\right),$$

wo B und C gewisse Constanten bedeuten, ergiebt sich die Temperaturänderung, welche beim Magnetisiren durch die Kraft x hervorgebracht wird. Durch Rechnung erhält der Verfasser dasselbe Resultat, welches verschiedene Beobachter gewannen. „Die einseitige Vermehrung eines Zuges wirkt auf den Magnetismus des Stabes im Allgemeinen so wie eine Temperaturerhöhung.“ Am Schlusse der Abhandlung wird angegeben, die Ausführung welcher Versuche nach diesen Untersuchungen als wünschenswert erscheint. (Siehe auch S. 882). Rs.

A. Ritter. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper. Abteilung 13 u. 14. Wiedemann Ann. (2) XVI. 166-192; XVII. 322-342.

Fortsetzung der theoretischen Betrachtungen, über welche in F. d. M. XIII. 1881. 822-824 berichtet ist. Bei der „statischen“ Theorie war die Hypothese aufgestellt, „dass die adiabatische Zustandslinie als diejenige zu betrachten ist, welche dem natürlichen Gleichgewichtszustande der frei im Raume schwebenden, ihrer eigenen Gravitationswirkung überlassenen Gaskugel entspricht.“ Durch Wärmeübertragung von den inneren heisseren zu den äusseren kälteren Schichten kann eine Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie erfolgen. „Bei Aufstellung der „dynamischen“ Theorie wird man zu berücksichtigen haben, dass die fortgesetzte Wärmeabgabe nach aussen hin ebenfalls zu den-

jenigen Ursachen gehört, welche eine dauernde Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie hervorbringen können." Der Verfasser findet, „dass die „isothermische" Zustandslinie die äusserste Grenze repräsentirt, bis zu welcher eine dauernde Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie sich erstrecken kann." Daher untersucht er zunächst die Eigenschaften der isothermischen Zustandslinie. Die hierbei gefundenen Gleichungen und Tabellen würde man zur Lösung der folgenden, von der mechanischen Wärmetheorie ganz unabhängigen Aufgabe benutzen können: „In einem gegebenen (von fester Fläche umschlossenen) Kugelraume soll eine gegebene (gasförmige) Masse so verteilt werden, dass (τ) das Verhältnis der Druckes zur Dichtigkeit einen überall gleich grossen vorgeschriebenen Wert annimmt." Bezeichnet Ng die Gravitationsbeschleunigung im Abstande r und m eine Constante, so ist

$$\tau = mNr = \frac{p}{\gamma} = RT,$$

und der Verfasser erhält die beiden Sätze: „Eine gegebene Masse kann in einem gegebenen Kugelraume auf unendlich viele verschiedene Arten so verteilt werden, dass das Verhältnis des Druckes zur Dichtigkeit den überall gleich grossen Wert $\frac{1}{2} Nr$ annimmt."

„Die absolute Temperatur einer im Gleichgewichtszustande befindlichen isothermischen Gaskugel kann niemals kleiner als $0{,}4 \frac{Nr}{R}$ sein."

„Den zum Gleichgewichtszustande der isothermischen Gaskugel erforderlichen Oberflächendruck $p_{\prime}$ kann man sich, anstatt durch eine feste Oberfläche, auch durch das Gewicht einer auf die Oberfläche gelegten Schicht hervorgebracht denken, welche die isothermische Gaskugel als Rinde umhüllt." Nach entsprechender Lösung dieser Aufgabe untersucht der Verfasser die adiabatische Gaskugel mit isothermischem Kerne, den Einfluss der Temperaturausgleichung auf die Form der Zustandslinie, radiale Strömungen im Innern der Sonnenmasse, Grenzen

der Strömungsgeschwindigkeiten. Bezüglich der Constitution der Sonnenflecken wird u. A. bemerkt: Es würden „die Kerne der Sonnenflecken als diejenigen Regionen zu deuten sein, in welchen von dem totalen Energieinhalte der Sonnensubstanz ein beträchtlicher Teil zeitweise die Form von lebendiger Kraft, anstatt von Wärme, angenommen hat, und die dunklen Poren der Photosphäre als kleinere Flecken, bei welchen infolge geringen Volumens und geringen Verdichtungsgrades der sinkenden Massen die sinkende Bewegung schon in geringer Tiefe zum Stillstande gelangt.“ Die beiden folgenden Paragraphen beziehen sich auf die heliographische Verbreitung und auf das Rotationsgesetz der Sonnenflecken. Rs.

B. Gastheorie.

A. Ledieu. Considérations sur la théorie cinétique des gaz et sur l'état vibratoire de la matière. C. R. XCIV. 691-695.

Mit Rücksicht auf die Experimente Hirn's über den Luftwiderstand (siehe Faye: Sur un nouveau Mémoire de M. Hirn intitulé „Recherches experimentales sur la relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température.“ C. R. XCIV. 377-380) ist der Verfasser geneigt, die jetzige kinetische Gastheorie zu verwerfen. „Man wusste bereits, dass die experimentellen Gesetze über die Reibung der Gase und über ihre Leitungsfähigkeit mit dieser Theorie nicht übereinstimmen.“

Die allgemeine kinetische Hypothese ist: Die einfachen wie die zusammengesetzten Körper bestehen aus Molecülen und diese sind aus vibrirenden Atomen gebildet. Ausserdem denkt man sich die Molecüle wie feste Körper, welche eigene Bewegungen innerhalb des kosmischen Aethers besitzen. Für die flüssigen und und für die festen Körper nimmt man an, dass die Schwerpunkte der Molecüle um mittlere Lagen schwingen; dagegen möchte man für die Gase haben, dass diese Schwerpunkte sich in sehr schnellen

Translationen nach allen Richtungen hin bewegen, und zwar in den Intervallen zwischen den Stössen der Molecüle unter sich oder gegen die Wände, welche das Gas einschliessen, grösstenteils geradlinig und gleichförmig. Die jetzige Gastheorie beruht auf dieser letzten Hypothese, welche a priori durch Nichts gerechtfertigt sei. Die Bestätigung dieser „secundären, ganz willkürlichen kinetischen Hypothese“ a posteriori besteht in der Ableitung des Boyle'schen Gesetzes. Aber dieses Resultat werde nur durch mehrere falsche Anwendungen des Gesetzes der grossen Zahlen gewonnen. Kurz „die Gastheorie ist von Anfang an neu zu entwickeln, indem man von besseren Grundlagen ausgeht. Die allgemeine kinetische Hypothese bleibt von vorstehender Kritik unberührt.“ Rs.

J. W. Häussler. Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie insbesondere die mathematische Behandlung der von der Wärme geleisteten inneren Arbeiten. Leipzig. B. G. Teubner.

Nach allgemeinen Betrachtungen über die Darstellungen der Bewegungen von Körpern, im Speciellen von Molecülen, verschafft sich der Verfasser einen Ausdruck für den „gesammten Wärmewert eines Körpers“ als die Summe aus der Energie seiner Molecüle und der geleisteten äusseren Arbeit. Um also die Veränderungen zu bestimmen, welche die in einen Körper von beliebiger Temperatur eintretende Wärme hervorbringt, drückt der Verfasser den Wärmewert des Körpers im Anfangszustande und den nach der Wärmezufuhr durch Gleichungen aus, und die Differenz dieser Gleichungen giebt ihm dann den Ausdruck für die Veränderungen. Die allgemeine Gleichung wird für eine Flüssigkeit specialisirt, und diese specielle Gleichung wird zur Bestimmung des Nullpunktes der absoluten Temperatur benutzt, wobei die Kenntnis der mittleren specifischen Wärme erforderlich ist. Nach dem Verfasser befindet sich der Nullpunkt der absoluten Temperatur etwa 162° C unter dem Gefrierpunkte des Wassers. Die weiteren Betrachtungen führen u. A. zu dem Satze: „Die specifische Wärme

der festen Substanz ist gleich derjenigen der flüssigen Substanz, vermindert um den Quotienten aus der Schmelzwärme und der wahren absoluten Schmelztemperatur." Der nächste Paragraph (§6) bezieht sich auf die „Arbeitsleistung der Verdampfungswärme." Bei der Untersuchung der „specifischen Wärme der gesättigten Dämpfe" (§ 7) erhält der Verfasser ein anderes Resultat als Clausius; er ist der Ansicht, dass die bezüglichen Versuche von Hirn und Cazin zur Entscheidung nicht ausreichend sind, und wünscht, dass ausführlichere Versuche über die specifische Wärme angestellt werden möchten. Es folgen wieder theoretische Betrachtungen über die Bewegungen der Molecüle; eine specialisirte Formel entspricht dem Dulong'schen Gesetze. Der Verfasser fügt einige Gedanken über die Cohäsion und Elasticität fester Substanzen hinzu und weist im letzten Paragraphen (§ 14) „auf einige Widersprüche hin, welche sich in der Clausius'schen Theorie finden."

Rs.

H. A. Lorentz. Over de bewegingen, die onder den invloed der zwaartekracht, ten gevolge van temperatuurverschillen in eene gasmassa optreden. Versl. en Meded. XVII. 179-205; Arch. Néerl. XVII. 193-219.

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verfassers (siehe F. d. M. XII. 1880 814), in welcher er aus den Grundsätzen der kinetischen Gastheorie die Bewegungsgleichungen gasförmiger Körper ableitete. Hier beschäftigt er sich mit den Bewegungen, welche unter dem Einfluss der Schwerkraft in Folge von Temperaturunterschieden in einer Gasmenge auftreten, und findet hierzu die Anleitung in den Untersuchungen von Oberbeck und Lorenz über die Wärmeströmungen, welche in Gasen durch Temperaturunterschiede verursacht werden. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht, dass sowohl die Temperaturunterschiede, als auch die dadurch verursachten Strömungen unendlich klein angenommen werden.

Aus den erhaltenen Resultaten, welche von sehr zusammengesetzter Natur sind, ergiebt sich, dass bei Versuchen, wie die

von Kundt und Warburg, der Einfluss der Wärmeströme durchaus nicht erklärt werden kann, wenn man den Temperaturunterschied unendlich klein annimmt. Auch bei Schallerscheinungen, welche z. B. durch eine Stimmgabel hervorgerufen werden, darf die Gleichgewichtsstörung nicht mehr als unendlich klein aufgefasst werden, sobald man Reibung und Wärmeleitung in Rechnung bringt. Kann aber eine Gleichgewichtsstörung nicht als unendlich klein betrachtet werden, so ist die Auflösung von Aufgaben über die Bewegung der Gase sehr schwierig, und es kann nur angegeben werden, wie sie von verschiedenen Umständen abhängt.

G.

E. Warburg und L. v. Babo. Ueber den Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichtigkeit bei flüssigen Körpern. Berl. Ber. 1882. 509-514; Wiedemann Ann. (2) XVII. 390-427.

Für Kohlensäure wurden bei constanten Temperaturen zusammengehörige Werthe des Reibungscoefficienten, welcher nach der Methode der Strömung durch Capillarröhren gefunden wurde, der Dichte und des Druckes bestimmt. Die Resultate sind in Tabellen zusammengestellt und graphisch dargestellt. Bezüglich der Viscosität wurde gefunden I. für gasförmige Kohlensäure (oberhalb der kritischen Temperatur 30,°9):

1. Dem Maximum der Compressibilität $\left(\frac{1}{s\frac{dp}{ds}}\right)$, d. i. dem Minimum der Elasticität $\left(s\frac{dp}{ds}\right)$, welches die Beobachtung ergiebt, entspricht kein Minimum der Viscosität (μ), welche vielmehr mit wachsender Dichte in stets wachsendem Verhältnis zunimmt.

2) Bei der Dichte 0,1, ungefähr der 500-fachen der normalen, übertrifft der Reibungscoefficient den normalen (0,000165 für 40,°3) nur um etwa 9 Procent des letztern.

3) Bei den Temperaturen 32,°6 und 40,°3 zeigt die Substanz bei gleicher Dichte wenig verschiedene Werthe von μ, sehr ver-

schiedene von p. Danach scheint die Viscosität mit der Dichte viel einfacher, als mit dem Druck zusammenzuhängen.

4) Der Einfluss der Temperatur auf die Viscosität bei constanter Dichte ist so klein, dass er aus den ein Temperaturintervall von nur 8° umfassenden Beobachtungen nicht mit voller Sicherheit zu entnehmen ist. Da indessen die Isotherme für 40°,3 ganz oberhalb der 32°,6 entsprechenden verläuft, so scheint die Viscosität bei constanter Dichte langsam mit der Temperatur wachsen.

II. Für tropfbar flüssige Kohlensäure:

5) Die tropfbar flüssige Kohlensäure zeigte eine weitaus kleinere Viscosität, als alle bisher untersuchten Flüssigkeiten. Der Reibungscoefficient bei 15° ist beispielsweise für Wasser 14,6 mal so gross, als für tropfbare Kohlensäure, welche unter dem Druck ihres gesättigten Dampfes steht.

6) Die Viscosität der tropfbaren Kohlensäure von 25,1 wächst mit der Dichte. Durch weitere Ausdehnung dieser Untersuchung besonders auch auf andere Flüssigkeiten, beabsichtigen die Verfasser den Einfluss der Temperatur auf die Viscosität tropfbarer Flüssigkeiten bei constanter Dichte, d. i. den specifischen Einfluss der Temperatur zu ermitteln.

7) Bei Dichtigkeiten, welche 0,8 nahe liegen, verläuft die 25°,1 entsprechende Isotherme unterhalb sowohl der 33°,6 als der 15° und 20° entsprechenden. Hieraus folgt, das Kohlensäure von solcher Dichte, von 15° an erwärmt, ein zwischen 20° und 32°,6 liegendes Minimum der Viscosität zeigen muss.

Nach der Poisson'schen Theorie der Flüssigkeitsreibung ist der Reibungscoefficient $\mu = KT$. Maxwell fand für ein ideelles Gas $K = p$, daher T bei constanter Temperatur der mittleren Weglänge proportional. Die Verfasser nehmen an, dass in erster Annäherung T diese Eigenschaft auch dann noch habe, wenn das Volumen der Molecüle und die Anziehung zwischen ihnen berücksichtigt wird, und finden, dass „die Raumerfüllung der Molecüle eine Abnahme der Reibung mit zunehmer Dichte hervorbringt, also die entgegengesetzte Abweichung vom Maxwell'schen Gesetze, wie die Anziehung zwischen den Molecülen.“ Rs.

L. Boltzmann. Zur Theorie der Gasdiffussion.
Wien. Ber. LXXXVI. 63-99.

Im Anschlusse an des Verfassers „Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht" (Wien. Ber. LXVI. s. F. d. M. IV. 1872. 566) kann eine Theorie der Diffusion in analoger Weise gegeben werden, wie eine Theorie der Gasreibung bereits mitgeteilt wurde (bezüglich der letzteren s. F. d. M. XII. 1880. 819-821 u. XIII. 1881. 819-820). Die Molecüle werden wieder als undeformirbare, vollkommen elastische Kugeln vorausgesetzt. Ferner wird angenommen, dass die Geschwindigkeit des Diffusionsstromes verschwindend klein gegen die mittlere Geschwindigkeit der Molecüle ist.

Diese Untersuchung ist noch nicht abgeschlossen, sie soll fortgesetzt werden, und daher wird eventuell im nächsten Jahrgange auf dieselbe zurückzukommen sein. Rs.

K. Waitz. Ueber die Diffusion der Gase. Wiedemann Ann. (2) XVII. 201-236, 351-352.

Der Verfasser hat die Diffusion der Gase experimentell untersucht, sich dabei einer optischen Methode, der Beobachtung der Interferenzerscheinungen an dicken Glasplatten, bedient. Er teilt die Beobachtungen mit, zeigt, wie aus diesen der Diffusionscoefficient berechnet werden kann. und gelangt zu dem Resultate: „Der Diffusionscoefficient für die freie Diffusion zweier Gase ineinander ist keine constante Grösse; er nimmt nach Beginn der Diffusion in einem bestimmten Querschnitt des Gefässes mit der Zeit ab und erreicht bald einen für jeden Querschnitt constanten Grenzwerth. Die Aenderung dieser Grenzwerthe von einem Querschnitt zum anderen erfolgt proportional dem Abstande der Querschnitte von der freien Oberfläche des Diffusionsgefässes."

Im Nachtrage wird bemerkt, dass die Angabe v. Obermayer's (in Wien. Ber. 1882), der Diffusionscoefficient nehme mit wachsender Zeit bis zu einem Grenzwerte zu, sich auf den mittleren Diffusionscoefficienten der ganzen diffundirenden Gasmasse bezieht, und es wird gezeigt, dass jene scheinbar widersprechende Angabe sich mit der des Verfassers verträgt. Rs.

V. HAUSMANINGER. Ueber die Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten zwischen Kohlensäure und Luft. Wien. Anz. 1882. 241-242; Wien. Ber. LXXXVI. 1073-1089.

O. E. Meyer leitete eine Formel her, in welcher der Diffusionscoefficient als eine Function des Mischungsverhältnisses der beiden diffundirenden Gase erscheint. Zur Prüfung dieser Formel eignet sich die von Waitz benutzte Methode, weil diese gestattet, das Verhältnis des Diffusionscoefficienten nicht nur ununterbrochen während der ganzen Dauer, sondern an verschiedenen Orten des Diffusionsgefässes zu beobachten. Es wird über die Arbeit von Waitz berichtet und alsdann daran erinnert: „Für den Fall, dass der Diffusionscoefficient zweier Gase eine Function des Mischungsverhältnisses derselben ist, verwandelt sich die partielle Differentialgleichung für den Partialdruck p des einen der Gase in folgende:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial p}{\partial x}\right].$$

Boltzmann hat gezeigt, wie diese Differentialgleichung unter den hier zu machenden Voraussetzungen sich integrieren lässt. Es ist, wenn $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ gesetzt wird,

$$p = a\int_a^{\frac{x}{\sqrt{t}}} \frac{dy}{k} c^{-\int_0^y \frac{y\,dy}{2k}}.$$

Ist umgekehrt p aus Versuchen als Function der Zeit t und der Tiefe x bekannt, so berechnet sich der Diffussionscoefficient k durch die Formel

$$k = \frac{1}{2}\frac{dy}{dp}\int_{p_1}^{p_0} y\,dp.$$

Herr Hausmaninger berechnet mit Hülfe dieser Gleichung den Diffusionscoefficienten für Kohlensäure und Luft aus den Beobachtungen des Herrn Waitz und findet denselben im Allgemeinen für grössere Kohlensäuregehalte grösser, „doch ist die Uebereinstimmung eine so geringe, dass dies möglicherweise sogar durch Störungen in Folge des Abhebens des Deckels verursacht, und der Diffusionscoefficient in Wahrheit doch constant

sein könnte." Nach dem Verfasser dürfte es am zweckmässigsten sein, ein Gemisch von halb Kohlensäure und halb Luft in reine Luft und in reine Kohlensäure diffundiren zu lassen. Rs.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

A. Dronke. Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung unter Benutzung der hinterlassenen Papiere der Herren Professoren Dr. A. Beer und Dr. J. Plücker. Leipzig. G. B. Teubner.

Die Schrift ist ein Analogon zu den beiden anderen Schriften Beer's „Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Electrodynamik" und „Einleitung in mathematische Theorie der Elasticität und die Capillarität." Herr Dronke hat „gesucht, die analytische Theorie der Wärmeverbreitung nach dem Beer'schen Plane wiederherzustellen und zwar wohl so, wie die Schrift zur Zeit von Beer's Tode etwa abgefasst sein würde."

Rs.

H. Résal. Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier. Résal J. (3) VIII. 79-124.

Weil Fourier's Théorie de la chaleur in Frankreich selten geworden ist, giebt Résal einen Auszug der wesentlichen Teile dieser Theorie und fügt Anmerkungen hinzu, damit einige Beweise einfacher oder strenger als im Texte gegeben werden können.

Rs.

H. Lagarde. Recherches analytiques sur la méthode de M. Thoulet, relatives à la conductibilité thermique. Ann d. Chim. et Phys. (5) XXXVI. 552-568.

H. Lagarde. De l'évaluation de la conductibilité thermique par la mesure des temps pendant l'état variable. C. R. XCIV. 1048-1051.

Thoulet beschreibt in seiner Abhandlung „Recherches expérimentales sur la conductibilité thermique des minéraux et des

roches“ (Ann. Chim. et Phys. (5) XXVI. 261-285; Auszug C. R. XCIV. 1047-1748) eine Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit und teilt die Resultate mit, welche er durch Benutzung derselben bekommen hat. Die Methode besteht darin, dass man die Zeit bestimmt, welche erforderlich ist, damit die Temperatur der oberen Fläche einer Platte von einer bestimmten Temperatur θ_1 bis zu einer anderen bestimmten Temperatur θ_2 zunimmt, während die Temperatur der unteren Fläche der Platte constant erhalten wird.

1) Lagarde will aus der allgemeinen Theorie der Wärmeleitung die Formeln entwickeln, welche zur Berechnung der Experimente von Thoulet dienen können, und zeigen, welche Beobachtungen notwendig sind, um den „thermischen Widerstand“ Thoulet's und den Coefficienten der Wärmeleitungsfähigkeit zu bestimmen.

2) ist ein Auszug von 1). Rs.

E. Lecher. Ueber Ausstrahlung und Absorption.

Wien. Ber. LXXXV. 441-490; Wien. Anz. 1882. 57-59; Wiedemann Ann. (2) XVII. 477-518.

Der Verfasser geht davon aus, dass die mit Absorptions- und Ausstrahlungsvermögen bezeichneten Begriffe keine einfachen Begriffe, sondern aus vielen physikalischen Einzelwirkungen zusammengesetzt seien. Er unterscheidet deshalb scheinbares und wirkliches Absorptionsvermögen, scheinbares und wirkliches Ausstrahlungsvermögen. Um die Beziehungen zwischen diesen Begriffen zu entwickeln, denkt er zwei einander einschliessende Kugelschalen, die innere ideal schwarz, die äussere (von sehr grossem Radius) ideal reflectirend; auf die Innenfläche der letzteren ist ein absorbirender Körper von sehr geringer Dicke aufgetragen. Die von der inneren Kugel ausgestrahlte Wärme [oder Licht] wird nun an dem genannten Körper zum Teil regelmässig, zum Teil diffus reflectirt; nur ein Teil tritt in den absorbirenden Körper ein und durchläuft denselben bis zur äusseren Kugelfläche und zurück. Auf diesem Wege findet die wirkliche Absorption

statt. Der an die Oberfläche zurückgelangende Teil tritt zum Teil aus, ein zweiter Teil wird regelmässig, ein dritter diffus reflectirt. Der zweite Teil wird einer ähnlichen Betrachtung unterworfen, wie sie eben angedeutet, etc. Die diffus reflectirten Teile werden schliesslich auch absorbirt; aber für diese kommt das wirkliche Absorptionsvermögen nicht in Betracht. Schliesslich werden alle absorbirten Ausdrücke addirt, und das Verhältnis dieser Summe zur ursprünglichen auffallenden Wärmemenge giebt den gewöhnlichen, scheinbaren Absorptionscoefficienten. Analoge Betrachtungen werden für die Strahlung angestellt, wobei als wirkliches Ausstrahlungsvermögen die ideelle Summe der Wirkungen der einzelnen Strahlencentra angesehen wird. Das Kirchhoff'sche Gesetz lautet nach Einführung der neuen Begriffe:

$$-4 \log \text{nat.}(1-a) = \frac{\varphi(t)}{F(t)},$$

wenn a der wirkliche Absorptionscoefficient ist, $\varphi(t)$ das (von der Temperatur t abhängige) wirkliche Strahlungsvermögen, $F(t)$ die Strahlung eines ideal schwarzen Körpers. Es folgt ferner aus den obigen Betrachtungen, dass bei genügender Dicke der Unterschied des Ausstrahlungsvermögens verschiedener Körper nur herrührt von dem Unterschiede des Reflexionsvermögens.

Die so entwickelten Beziehungen gelten nur für eine bestimmte Wellenlänge und eine bestimmte Temperatur. Im zweiten Teile wird dann die Ausstrahlung und Absorption bei verschiedener Temperatur betrachtet. Dabei wird die Annahme gemacht, dass das wirkliche Absorptionsvermögen sich mit der Temperatur nicht ändert. Dann ergiebt sich, dass die Strahlung eines jeden Körpers schon bei der tiefsten Temperatur alle Wellenlängen besitzt, die sie bei höheren Temperaturen hat, und dass die relative spectrale Verteilung der ausgestrahlten Energie von der Temperatur des strahlenden Körpers unabhängig ist. Hierbei wirkt jedoch die Aenderung des Reflexionsvermögens mit der Temperatur störend ein.

Den Schluss der Arbeit bilden experimentelle Erläuterungen.

Wn.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

Geodäsie.

Ch. M. Schols. Le calcul de la distance et de l'azimut au moyen de la longitude et de la latitude. Arch. Néerl.. XVII. 101-167.

Berechnung des Abstandes und des Azimuthes zweier Orte auf der Erde aus Länge und Breite. Sie findet sich auch in dem Werke Helmert's: „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie“, doch wird sie bei vorliegender Arbeit auf andere und einfachere Weise ausgeführt. Zuerst werden die Formeln für die Berechnung des astronomischen Azimuthes der beiden Orte und der Sehnen gegeben; sie gelten bis zu Entfernungen, welche gleich ein Zehntel des Erdradius sind, also ungefähr für 638 km. Für die ferneren Formeln, welche auf das Azimuth und auf die Länge elliptischer Bogen Bezug haben, muss sich der Verfasser auf viel kürzere Abstände beschränken. Eine Untersuchung für längere Bogen folgt später. Als Anwendung werden einige Beispiele behandelt, welche sich auch bei Helmert finden; die erhaltenen Resultate stimmen in befriedigender Weise überein. G.

E. Adan. Quelques mots sur une méthode de détermination de la latitude. Belg. Bull. (3) III. 69-74.

F. Folie. Un mot encore sur la détermination de la latitude. Belg. Bull. (3) III. 350-352.

Herr Folie verteidigt gegen Herrn Adan, der ein graphisches Verfahren vorschlägt, eine Bessel'sche Methode. Mn. (O.).

- - -

F. J. van den Berg. Over de onderlinge afwijking van den grooten cirkelboog en de loxodromische kromme tusschen twee naby gelegen plaatsen op de bolvormige aarde. Nieuw Arch. IX. 15-31.

Die Arbeit handelt von der Abweichung des grössten Kreisbogens von der Loxodrome zwischen zwei benachbarten Orten auf der kugelförmigen Erde. Janse (siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 838) hatte diesen Unterschied durch Rechnung gefunden, hier wird er auf einfachem geometrischem Wege abgeleitet und auf dieselbe Art die Formeln für beide Kurswinkel bestimmt. Zum Schlusse werden einige Fehler in den Rechnungen Janse's nachgewiesen und verbessert. G.

A. Hall. The density of the earth. Analyst IX. 129-132.

Formeln für die Abweichung von der Verticalen durch die Anziehung einer Wasserflut, mit einer numerischen Anwendung ähnlich dem Falle der Bai von Fundy. Der Verfasser findet, dass die Abweichung ungefähr $0^{\circ},348$ sei, ein Bogen, „der schwierig genau zu bestimmen sein würde.“ Jn. (O.).

- - -

Helmert. Der Einfluss der Lothablenkung bei einem Gebirgsrücken auf die Ergebnisse geometrischer Nivellements. Jordan Z. f. V. XI. 233-243, 249-255.

Verfasser knüpft an das von Zachariä (Astr. Nachr. 1916) gewählte schematische Beispiel zur Schätzung des genannten

Einflusses an, veranlasst durch einen in der erwähnten Arbeit enthaltenen sehr wesentlichen principiellen Fehler. Es werden für einen prismatischen Gebirgsrücken von dreieckigem Querschnitt die Formeln vollständig entwickelt und der genannte Einfluss für eine Reihe von Zahlenbeispielen berechnet, um eine Schätzung seines Betrages zu ermöglichen. B.

A. VOGLER. Die Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Braunschweig. Vieweg und Sohn. 1883.

Siehe F. d. M. XIV. 1882. 157. B.

ZAJÍČEK. Lehrbuch der praktischen Messkunst mit einem Anhang über Entwässerung und Bewässerung des Bodens. 8°. Wien. 1882. W. Braunmüller.

B.

G. DE BERNARDINIS. Sulla livellazione geometrica. Batt. G. XX. 101-143.

Enthält eine Exposition bekannter Sätze über die theoretischen Grundlagen und die Ausgleichungsvorschriften für geometrische Nivellements, zum Teile unter wörtlicher Benutzung der Quellen.

B.

O. SCHREIBER. Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz. Jordan Z. f. V. XI. 129-161.

Von theoretischem Interesse in dieser Abhandlung ist folgende Aufgabe: In einem Dreiecksnetz, dessen Winkel noch angenähert bekannt sind, soll eine gegebene Anzahl von Messungen so auf die einzelnen Winkel verteilt werden, dass das Gewicht des plausibelsten Wertes einer bestimmten Function der Winkel ein Maximum wird. Diese Aufgabe reducirt sich, wie gezeigt wird, auf folgende andere: $L_1, L_2, \dots L_n$ sind ganze lineare Functionen von p Variabeln $x_1, \dots x_p$ $(p<n)$ mit gegebenen Coefficienten,

gesucht dasjenige System der x, für welches die Summe der absoluten Werte der L ein Minimum wird. Ferner zeigt sich, dass in den Fällen, wo die Aufgabe unendlich viele Lösungen zulässt, unter diesen immer eine vorkommt, bei der durch die entsprechend verteilten Messungen nur gerade die notwendige Anzahl von Winkeln im Netze bestimmt wird. B.

JORDAN. Teilung eines Vierecks. Jordan Z. f. V. 421-428.

Aufstellung trigonometischer Formeln für die in der Praxis vorkommenden Fälle der genannten Aufgabe. B.

JORDAN. Bemerkung zur Rectification eines Meridianbogens. Jordan Z. f. V. 622-625.

B.

A. SCHELL. Der Einschneide-Transporteur von Victor von Reitzner. 8°. Wien. Seidel und Sohn. 1882.

Der Apparat besteht im Wesentlichen aus drei um dasselbe Charnier drehbaren Linealen, deren Kanten durch den Drehungsmittelpunkt des Charniers gehen. Die Brochure behandelt den Gebrauch dieser Instrumente zur graphischen Lösung der Pothenotschen Aufgabe auf dem Messtische. B.

DORNA. Relazione sopra una memoria del prof. Jadanza. Atti di Torino XVII. 647.

JADANZA. Alcuni problemi di Geodesia. Atti di Torino XVII. 742.

CH. M. SCHOLS. Studien over kaartprojectien. Nieuw Arch. VIII. 113-222.

Diese umfangreiche Abhandlung über die Kartenprojection wurde veranlasst durch eine Preisfrage nach der Projection mit

parabolischen Meridianen und Parallelen. Der Verfasser hat indess seiner Untersuchung eine grössere Bedeutung gegeben, indem er noch vier andere conforme Kartenprojectionen behandelt, nämlich die Kreisprojection von Lagrange; eine Projection, bei welcher die Meridiane und Parallelen durch homofokale Ellipsen und Hyperbeln gebildet werden, eine Kartenprojection mit einfachen Formeln für die Berechnung der Coordinaten, eine nicht symmetrische Kartenprojection mit Minimalabweichung von der mittleren Vergrösserung. Alle diese Projectionen werden auf die Karte der Niederlande angewendet.

Voran gehen einige allgemeine Betrachtungen über conforme Kartenprojectionen, die hauptsächlich den Zweck haben zu untersuchen, in wie fern es bei einem Terrain von geringem Umfang möglich ist, die Veränderung, welche die Vergrösserungen dabei erfährt, in möglichst enge Grenzen zu schliessen. Ausführliche Zahlentabellen sind der Abhandlung beigegeben, mit deren Hülfe eine Landkarte bequem in jede der genannten Projectionen übergeführt werden kann. G.

Capitel 2.

Astronomie.

J. C. Houzeau et A. Lancaster. Bibliographie générale de l'Astronomie. T. II. Bruxelles.

J. C. Houzeau. Annonce bibliographique. Belg. Bull. (3) III. 447-449.

Dieser Band enthält in dreissigtausend Artikeln Abhandlungen und Notizen aus den academischen Publicationen und wissenschaftlichen Zeitschriften. Mn. (O.).

J. C. Houzeau. Vademecum de l'Astronomie. Bruxelles. 1882.

J. Thirion. Compte rendus. Qu. sc. XIV. 594-602.

Das Vademecum hat über 1100 Seiten: es ist die zweite und durch das Repertorium der Constanten in der Astronomie (siehe F. d. M. X. 1878. 773) vermehrte Auflage. Herr Thirion hat einige in solchem Werke verzeihliche Fehler gefunden; im Uebrigen rühmt er das Buch als sehr brauchbar.

Mn. (O.).

K. Schelle. Lehrgang der populären Astronomie und mathematischen Geographie für Gymnasien bearbeitet. 2. Aufl. 8°. Kempten. J. Kösel. 1882.

B.

F. J. Studnička. Mathematische Geographie. Prag. (Böhmisch)

Diese Schrift bildet den II. Teil einer umfangreichen allgemeinen Geographie und behandelt auf historischer Grundlage im 1. Abschnitt die Form der Erde, im 2. Abschnitt die Messung der Erde, im 3. Abschnitt die Grösse der Erde, im 4. Abschnitt die kartographische Darstellung der Erde, in einen Anhang endlich eine Erklärung des Princips der Lehmann'schen Schraffirmethode wie der Isohypsen Ducarla's. Die mathematischen Formeln sind, sobald sie mit Differentialausdrücken zu tun haben oder complicirt werden, unter den Strich in Anmerkungen verwiesen worden.

Std.

K. Israel-Holtzwart. Abriss der mathematischen Geographie für höhere Lehranstalten. 1882. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

B.

K. Israel-Holtzwart. Elemente der sphärischen Astronomie für Studirende bearbeitet. 1882. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

Behandelt in sieben Abschnitten: die astronomischen Coordinaten, die Differentialformeln für sphärische Dreiecke, Strahlenbrechung, Aberration, Parallaxe, Dimensionen des Erdsphäroids, Dämmerung. Die Darstellung ist für Nichtastronomen berechnet.
B.

J. Mayenberg. Aufgaben der sphärischen Astronomie. Pr. Hof. Studienanstalt. 1882.

Bekanntes für Unterrichtszwecke dargestellt. B.

C. Israel. Ueber gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit und der Schiefe der Ekliptik. Halle a. S. H. W. Schmidt.

C. Israel. Astronomische Anwendung eines Satzes der Transversalenlehre. Halle a. S. H. W. Schmidt.

C. Israel. Gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit, Ekliptik, Schiefe und geographischen Breite. Die Horizontalparallaxe des Mondes aus Beobachtungen ausserhalb des Meridians. Halle a. S. H. W. Schmidt.
B.

E. Collignon. Note sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques de certains problèmes de cosmographie. Nouv. Ann. (3) I. 490-508.

In einem früheren Aufsatze hatte der Verfasser die Construction einer graphischen Tafel entwickelt, welche Auf- und Untergänge der Sonne direct für jeden Beobachtungsort und jede Sonnendeclination zu entnehmen gestattet. Es wird gezeigt, dass man dieselbe Tafel auch zur Bestimmung des Durchganges durch den Ost- West-Vertical benutzen kann. Ferner wird gezeigt, wie sich derselbe Grundgedanke verwenden lässt, um die Dämmerung mit zu berücksichtigen. Daran schliesst sich eine Behandlung des Problemes der kürzesten Dämmerung. B.

L. Janse Bz. Oplossing eener prijsvraag. Nieuw Arch. IX. 141-179.

Die Preisfrage, welche hier beantwortet wird, ist die folgende: „Welcher Teil der kugelförmigen Sonnenoberfläche wird bei einer Sonnenfinsterniss durch den Mond für das Auge bedeckt?“ Auf analytischem Wege wird die Rechnung durchgeführt, und es werden die Resultate in Zahlentabellen gebracht. Fortsetzung in folgendem Jahrgange. G.

Ch. Rouget. Observations astronomiques sans mesure d'angles. C. R. XCV. 95, 120-123.

Weitere Entwickelungen zu einer bereits früher von dem Verfasser auseinander gesetzten Methode, welche darauf hinauskommt, den Moment zu beobachten, wo sich zwei Gestirne auf demselben Höhen- oder Verticalkreise befinden. (Cfr. F.d.M. XIII. 1881. 855). B.

N. Herz. Zur Berechnung der scheinbaren Sternörter. Astr. Nachr. 2416.

Differentialformeln für die bei der genannten Aufgabe vorkommenden Sternkonstanten. B.

Th. von Oppolzer. Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Cometen und Planeten. I. Bd. Zweite und völlig umgearbeitete Auflage. 8°. Leipzig. 1882. W. Engelmann.

Der vorliegende Band, doppelt so stark wie sein Vorgänger, behandelt die Bahnbestimmung ohne Berücksichtigung der Störungen und ist als das vollständigste und ausführlichste Compendium über diesen Gegenstand anzusehen. Da der Stoff, der in ein Werk über einen so viel bearbeiteten Gegenstand hineingehört, seit langem feststeht, so wird es genügen zu bemerken, dass der Verfasser in Bezug auf die Schärfe der Entwickelungen soweit als irgend zulässig gegangen ist und an einigen Stellen durchaus

Eigenes gebracht hat, dass er ferner durch Beifügung zahlreicher Tafeln die Anwendung der von ihm bevorzugten Methoden möglichst bequem zu machen gesucht hat. B.

K. Israel-Holtzwart. Elementare Darstellung der Gauss'schen Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnelemente aus geocentrischen Beobachtungen. Halle a S. H. W. Schmidt.

B.

De Gasparis. Nuove serie, per esprimere le coordinate eliocentriche in funzione dell' anomalia media. Rom. Acc. L. (3) VI. 65.

De Gasparis. Serie fra anomalia e raggio vettore nella ellisse planetaria. Nap. Rend. XXI. 12-19.

De Gasparis. Prima approssimazione di un orbita con 5 dati. Nap. Rend. XXI. 104-107, 154-155.

De Gasparis. Sur la théorie du mouvement des planètes. C. R. XCIV. 32-33.

De Gasparis. Sur le problème de Kepler. C. R. XCV. 446.

B.

J. Morrison. On the compensation of the eccentric anomaly from the mean anomaly of a planet. Analyst IX. 17-19.

In der Gleichung $m = E - e\sin E$ setzt der Verfasser $E = m + x$ und giebt als erste Annäherung

$$r = \sqrt{2}.\tan\frac{1}{2}\theta, \quad \text{wo} \quad \tan\theta = e\sqrt{2}\frac{\sin m}{1-e\cos m};$$

und als zweite Näherung

$$E = m + x + \frac{m - m_1}{1 - e\omega E_1},$$

wo E_1 die erste Näherung und $m_1 = E_1 - e\sin E_1$ ist.

Jn. (O.).

Ch. V. Zenger. On the solution of Kepler's problem. Monthl. Not. XLII. 446-449.

J. C. Adams. On Newton's solution of Kepler's problem. Monthl. Not. XLIII. 43-49.

In der ersten Arbeit giebt Professor Zenger eine Näherungsmethode für die Kepler'sche Gleichung, indem er Reihen benutzt, die *u* in steigenden Potenzen von sin *u* geben, und wendet sie auf Beispiele an.

In der zweiten Arbeit macht Professor Adams darauf aufmerksam, dass von allen Methoden, die zur Lösung dieses Problems in Vorschlag gebracht worden sind, diejenige, welche am schnellsten zu irgend welchem verlangten Grade von Genauigkeit führt, die von Newton in den „Principia" 2. Bd. p. 109-116 gegebene ist. In dieser Methode ist die Ordnung der Fehler bei jeder folgenden Näherung mehr als verdoppelt, und dies erklärt den ausserordentlichen Vorteil gegenüber dem Gebrauch von Reihen, die nach Potenzen von *e* fortschreiten, wenn grosse Genauigkeit für das Resultat verlangt wird; da in der letzteren Methode die Hinzufügung eines neuen Gliedes die Ordnung des Fehlers nur um eine Einheit vermehrt.

Herr Adams bemerkt ferner, dass der Grad der Schnelligkeit der Näherung durch eine Veränderung in dem Verfahren noch vermehrt werden kann. Er giebt eine Geschichte der Methode und zeigt, dass die ungewöhnliche Form, in welcher Newton dies Verfahren geboten hat, die folgenden Schriftsteller verleitet hat, ihn nicht für den Verfasser zu halten. Er spielt auch auf eine merkwürdige Tatsache betreffs der Veröffentlichung dieses Verfahrens von Newton an. Zum Schluss giebt er eine eigene graphische Methode.

Der Arbeit von Adams folgt eine kurze Note, in der er von Professor Zenger's Lösung Notiz nimmt und auf ein Missverständnis aufmerksam macht. Glr. (O.).

R. Radau. Remarques concernant le problème de Kepler. C. R. XCV. 274-276.

Besprechung verschiedener Formen für die Lösung der Gleichung

$$M = E - e \sin E.$$

Dieselben gehen aus den Gleichungen

$$\cot E = \cot M - \frac{\sin(e \sin E_0)}{\sin M \sin E_0},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(E - \frac{1}{2}M\right)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}M} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}E\right)^2, \quad \sin E = \frac{\sin(e \sin E_0)}{\sin E_0}$$

hervor, wo E_0 einen angenäherten Wert von E_0 bedeutet. Für die extremen Annahmen $E_0 = 0$ und $E_0 = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die Formeln von Wolfers und Zenger. B.

CH. V. ZENGER. Solution rapide du problème du Kepler. C. R. XCV. 171-174.

CH. V. ZENGER. Tables auxiliaires pour calculer l'anomalie vraie des planètes. C. R. XCV. 208-210.

CH. V. ZENGER. Solution du problème de Kepler pour des excentricites considérables. C. R. XCV. 416-417.

Die Kepler'sche Gleichung

$$E - e \sin E = M$$

wird umgeformt in

$$\cot E = \cot M - \frac{e \operatorname{cosec} M}{1 + \frac{1}{6}\sin(E-M)^2 + \frac{3}{40}\sin(E-M)^4 + \cdots},$$

wo der Nenner die Reihe für

$$\frac{E - M}{\sin(E-M)}$$

ist. (Cfr. auch die oben erwähnte Arbeit von Radau.)

B.

STIELTJES. Sur un théorème de M. Tisserand. C. R. XCV. 901-903.

Der Aufsatz bezieht sich auf die Untersuchung von Herrn Tisserand in C. R. LXXXVIII. und LXXXIX. (cfr. F. d. M. XI. 1879. p. 804).

Ist

$$\cos\varphi = \cos u \cos u' \cos(x-x') + \sin u \sin u' \cos(y-y'),$$

so handelt es sich um die Entwickelung von

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

in eine trigonometrische Reihe nach Vielfachen von $x-x'$ und $y-y'$. Unter Benutzung einer partiellen Differentialgleichung gelingt die Darstellung der Coefficienten durch Producte von hypergeometrischen Reihen, ein Resultat, das für den speciellen Fall $u=u'$, $x'=y'=0$ von Herrn Tisserand zuerst gefunden worden war. B.

HARZER. Eine neue Methode, die negativen und ungraden Potenzen der Entfernungen der Himmelskörper zu entwickeln. Astr. Nachr. 2425.

Setzt man in der aus der Theorie der Thetareihen folgenden Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} = \frac{1+2\Sigma e^{-nn\pi\varrho}}{1+2\Sigma e^{-nn\frac{\pi}{\varrho}}}$$

für ϱ den Wert $\varDelta^2 : \mathfrak{f}^2$, wo $\varDelta$ die gegenwärtige Distanz zweier Planeten und $\mathfrak{f}$ eine sehr grosse Constante bedeutet, so erhält man die angenäherte Formel

$$\frac{1}{\varDelta} = \frac{1}{\mathfrak{f}}\left(1+2\Sigma e^{-nn\pi}\frac{\varDelta\varDelta}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}\right).$$

Durch Differentiationen nach ϱ giebt die ursprüngliche Formel analoge Ausdrücke für die negativen ungraden Potenzen von $\varDelta$. Die trigonometrische Entwickelung von $\varDelta^2$ in den Exponenten bietet keine Schwierigkeit, während die weitere tri-

gonometrische Entwickelung der Exponentialgrössen sich mit Hülfe von Bessel'schen Functionen erledigen lässt, deren Argument rein imaginär ist. Der grössere Teil der Arbeit beschäftigt sich damit, diesen Grundgedanken in einer für die praktische Anwendung geeigneten Form auszuführen. B.

SCHEIBNER. Ueber einige Arbeiten C. G. J. Jacobi's auf dem Gebiete der Störungstheorie. Astr. Nachr. 2444.

Der Aufsatz enthält zunächst eine Reihe von historischen Notizen und giebt sodann eine ausführliche Analyse von dem Inhalte eines in Hansen's Nachlass vorgefundenen Manuscripts betitelt „Entwickelungen und Rechnungen zu Jacobi's Theorie der Störungen der Hauptplaneten". Der Grundgedanke für die Entwickelung der reciproken Distanz $1:\Delta$ zweier Planeten ist dabei folgender. Man entwickle Δ^2 nach den mittleren Anomalien μ und μ' in eine trigonometrische Reihe

$$L + M\cos(\mu - \mu' + \alpha) + N,$$

wo L das konstante Glied ist und N die höheren Vielfachen von μ und μ' enthält und nach den Vielfachen von $\psi = \mu - \mu' + \alpha$ und μ geordnet zu denken ist. Dann wird die Elongation y durch die Gleichung

$$y\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{L+M\cos x}} = \pi\int_0^\psi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{L+M\cos x}}$$

eingeführt, und $1:\Delta$ nach y und μ entwickelt. Diese Entwickelung wird nicht analytisch, sondern rein numerisch durch mechanische Quadratur über aequidifferente Werte von y resp. μ ausgeführt. B.

R. RADAU. Sur un point de la théorie des perturbations. C. R. XCV. 117-120.

Vergleichende Zusammenstellung der verschiedenen Formeln, welche man für die Bewegung in der gestörten Bahn aufgestellt hat. B.

F. Tisserand. Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. C. R. XCIV. 997-1004.

Anknüpfend an eine frühere Abhandlung (Cfr. F. d. M. XIII. 1881. 844) untersucht der Verfasser den bereits von Leverrier hervorgehobenen Fall, dass die Neigung eines kleineren Planeten durch die Störungen von Jupiter und Saturn sehr erhebliche Oscillationen ausführen kann, wenn die Halbaxe desselben nahe bei einem gewissen Werte liegt. Durch ein gemischtes, teils analytisches, teils numerisches Verfahren gelingt es, die Grenzen anzugeben, innerhalb deren die Neigung oscilliren kann.

B.

Gyldén. Sur l'équation différentielle, qui donne immédiatement la solution du problème des trois corps jusqu'aux quantités de deuxième ordre inclusivement. C. R XCV. 55-58.

Reduction einer in den Strömungsformeln des Verfassers auftretenden Differentialgleichung zweiter Ordnung auf die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Py=Q.$$

B.

Gyldén. Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper. Act. Math. I. 77-92.

Die behandelte Aufgabe besteht darin, zu der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+X_1y=\psi_0+\psi_2y^2+\psi_3y^3+\cdots$$

unter gewissen Voraussetzungen über die Form und die Grössenordnung von y und den Coefficienten X_1,ψ eine nur aus periodischen Gliedern bestehende Lösung durch successive Approximation zu finden. Der Nerv des Verfahrens, welches an dem Beispiel

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\cos\lambda x.y=\psi_0+\cdots$$

(α und λ konstant) erläutert wird, besteht in einer passenden Spaltung des Coefficienten X_1, um die auftretenden nichtperiodischen Glieder zu beseitigen. B.

GYLDÉN. Ueber die absoluten Elemente der Planetenbahnen. Astr. Nachr. 2452.

Verfasser ist bei der Verfolgung der von ihm aufgestellten Methode der intermediären Bahnen auf den von ihm als wichtig hervorgehobenen Umstand gestossen, dass bei der Integration der Störungsglieder Terme auftreten, die die störende Masse als Factor nicht enthalten, aber von derselben Ordnung wie die Glieder für die ungestörte Bewegung sind. Diese Glieder bezeichnet er als elementäre Glieder und die durch die von der Masse freien Glieder bestimmte Bahn als absolute Bahn, deren Elemente dann die absoluten Elemente sind. Hierzu mag bemerkt werden, dass dieser Umstand, wenn auch in etwas anderer Gestalt, längst bekannt und auch nicht an die Methode der intermediären Bahnen gebunden ist. Er tritt z. B. auf, wenn man, wie es bei der Mondtheorie aus zwingenden Gründen immer geschehen ist, von vornherein die Elemente Knoten und Perihel in der ersten Approximation als variable Grössen einführt. Ueberdies werden, sobald mehr als eine störende Masse vorhanden ist, die „elementaren Glieder“ nicht frei von den störenden Massen, sondern homogene Functionen nullter Ordnung derselben. Der Aufsatz giebt zunächst eine Darlegung der Resultate, zu denen der Verfasser in seinen Entwickelungen gelangt ist, und schliesst daran Vergleichungen der alten Methode der Variation der Constanten mit dem neuen Verfahren, sowie Raisonnements über die Stabilität des Sonnensystems, welche letztere nach Ansicht des Referenten nicht concludent sind. B.

LINDSTEDT. Ueber die Integration einer für die Störungstheorie wichtigen Differentialgleichung. Astr. Nachr. 2462.

LINDSTEDT. Bemerkungen zur Integration einer gewissen Differentialgleichung. Astr. Nachr. 2465.

GYLDÉN. Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Dr. Lindstedt in den Astr. Nachr. Nr. 2465. Astr. Nachr. 2469.

BACKLUND. Zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2}+(1-\beta_1)\varrho = \beta_0+\beta_2\varrho^2+\beta_3\varrho^3+\cdots.$$

Astr. Nachr. 2469.

In 1) wird die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dv^2}+\varrho = \beta_0+\beta_1\varrho+\beta_2\varrho^2+\cdots,$$

wo die β kleine Grössen erster Ordnung sind, dadurch integrirt, dass unter der in diesem Falle zu erreichenden Voraussetzung $\beta_0 = 0$, in dem sich unmittelbar ergebenden ersten Integral

$$\left(\frac{d\varrho}{dv}\right)^2+\varrho^2 = \frac{2}{2}\beta_1\varrho^2+\frac{2}{3}\beta_2\varrho^3+\cdots+\eta_0^2$$

die Substitution

$$\varrho = \eta\cos x,\quad \frac{d\varrho}{dv} = \eta\sin x$$

eingeführt wird, mittelst welcher sich η als trigonometrische Reihe von x und v in der Form cx plus einer trigonometrischen Reihe in x ergiebt. Die Elimination von x ergiebt dann für ϱ eine trigonometrische Reihe nach Vielfachen einer linearen Function von v. Die Coefficienten werden durch Potenzreihenentwickelungen dargestellt. In 2) wird dieses Verfahren mit dem von Herrn Gyldén für dieselbe Aufgabe verglichen und daran eine Polemik gegen letzteres geknüpft, die jedoch später vom Verfasser zurückgezogen worden ist. 3) enthält die Abwehr von Herrn Gyldén gegen die erwähnte Polemik, während in 4) ein Verfahren mitgeteilt ist, die Lösung der Differentialgleichung nach der Methode der unbestimmten Coefficienten zu bestimmen, wenn die Existenz der Lösung in Form einer trigonometrischen Reihe feststeht. Hierbei mag noch erwähnt werden, dass 4)

einen mit den Principien der Functionentheorie in Widerspruch stehenden Versuch die Existenz nachzuweisen enthält.

B.

Weiler. Bemerkung zu dem Aufsatze in No. 2388: „Ueber die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper.“ Astr. Nachr. 2428.

Bezieht sich auf die Gyldén'sche Methode, als erste Approximation eine von der Ellipse verschiedene Curve zu Grunde zu legen. B.

T. N. Thiele. Ueber Professor Gyldén's intermediäre Bahnen. Astr. Nachr. 2429.

Verfasser zeigt, dass der Gyldén's intermediären Bahnen zu Grunde liegende Gedanke, nämlich aus der Störungsfunction einen nur von einem Radiusvector abhängigen Teil abzusondern, sich noch auf verschiedene andere Weisen verwirklichen lässt, von denen eine bereits von Newton empfohlen worden ist.

B.

Weiler. Nachträge zu der Abhandlung in No. 2311 bis 2317: „Das Problem der drei Körper in der neuen Störungstheorie.“ Astr. Nachr. 2432-2433.

Der Aufsatz enthält im Wesentlichen eine Abänderung der Herleitung und Gestalt früherer von dem Verfasser gegebener Formeln. Es möge deshalb hier nur bemerkt werden, dass bei dessen Methode die Excentricität als fest und die mittlere Anomalie als lineare Function der Zeit angenommen, d. h. die Störungen dieser Elemente auf die übrigen Parameter, Neigungen, Knoten und Perihel geworfen worden. B.

O. Callandreau. Sur la détermination des variations séculaires et des éléments moyens des orbites.
Astr. Nachr. 2435.

Bezieht sich auf die von Herrn Hill dem Gauss'schen Verfahren gegebene Gestalt. (Astronomical papers prep. for the use of the Amer. Ephemeris etc. Vol. I, 5). B.

E. Neison. Note on a term in the perturbations of the moon, due to the action of Mars. Monthl. Not. XLII. 267-269. (1882).

In einer früheren Arbeit hatte der Verfasser erklärt, dass er gefunden habe, dass der Coefficient des Gliedes mit dem Argument $l-24l''+20l'''$, wo l, l'', l''' die mittleren Längen des Mondes, der Erde und des Mars bezeichnen, sich auf mehrere Sekunden beläuft. Diesen Tatbestand hatte er nur als einen vorläufigen gegeben; jetzt zieht er ihn nach genauerer Prüfung zurück. Der genaue Wert des Gliedes ist von Gogou untersucht und als unmerklich gefunden worden. Glr. (O.).

G. W. Hill. Review of the „theory of the moons motion deduced from the law of universal gravitation“ by John N. Stockwell. Analyst IX. 41-47.

J. N. Stockwell. On Mr. Hill's review of the theory of moons motion. Analyst IX. 82-90.

Verteidigung der Theorie durch Herrn Hill und Erwiderung auf seine Kritik von Herrn Stockwell. Jn. (O.).

P. Lehmann. Tafeln zur Berechnung der Mondphasen. 8°. Berlin 1882. K. Statistisches Bureau.

B.

TH. VON OPPOLZER. Syzygientafeln für den Mond nebst ausführlicher Anweisung für den Gebrauch derselben. Publication XVI der Astr. Gesellschaft. 4°. Leipzig, 1881. W. Engelmann. B.

BACKLUND. Ueber Störungen durch ein widerstehendes Mittel. Astr. Nachr. No. 2414.

In der zweiten Abhandlung über die Theorie des Encke'schen Cometen (Peterb. Abh. 1878) hatte von Asten unter Zugrundelegung der Encke'schen Hypothese über das widerstehende Mittel zum Teil ein von Encke abweichendes Verfahren benutzt, welches darin bestand, dass er die mittlere Bewegung und den Excentricitätswinkel sich bei jedem Periheldurchgange sprungweise um constante Grössen ändern liess. Verfasser kritisirt zunächst dieses Verfahren mit guten Gründen und entwickelt dann für den vorliegenden Fall hinreichend strenge Formeln, deren Anwendung an einem numerischen Beispiel erläutert wird. Zum Schlusse wird dann noch gezeigt, dass man die Widerstandshypothese innerhalb ziemlich weiter Grenzen variiren kann, ohne dass dadurch ein Widerspruch mit den Beobachtungen eintritt. B.

TH. VON OPPOLZER. Lösung des Kometenproblems. Wien. Anz. 1882. 227; Wien. Ber. LXXXVI. 885-892.

Beschäftigt sich mit dem vom Verfasser in seinem Lehrbuche über Bahnbestimmung aufgestellten Satze, dass, wenn beim Kometenproblem eine mehrfache Lösung auftritt, diese immer eine dreifache ist. Dieser Gegenstand hat dadurch ein grösseres Interesse gewonnen, dass bei den Erscheinungen der letzten Jahre ein derartiger Fall in der Tat vorgekommen ist. B.

N. HERZ. Zur Theorie der Bahnbestimmung eines Kometen. Wien. Anz. 1882. 213-214; Wien. Ber. LXXXVI. 794-834.

N. Herz. Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geocentrischen Beobachtungen.
Wien. Anz. 1882. 248; Wien. Ber. LXXXVI. 1125-1131.

Die erste Abhandlung giebt eine Lösung des Kometenproblems unter Benutzung von drei vollständigen Beobachtungen, ein Gedanke, der schon früher, jedoch mit unnötigen einschränkenden Voraussetzungen, benutzt worden ist. Das Wesentliche hierbei ist, dass die Relation zwischen den beiden äusseren Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 in aller Strenge sich auf die Form $\varrho_3 = M\varrho_1$ bringen lässt. Die Brauchbarkeit des Verfahrens wird an einem Beispiel nachgewiesen.

Der zweite Aufsatz weist darauf hin, dass bei mehrfachen Lösungen die Zahl derselben drei oder zwei ist, jenachdem man die Excentricität gleich Eins setzt oder aus den Beobachtungen bestimmt, dass ferner die allein richtige Lösung in beiden Fällen angenähert dieselbe sein müsse, dass also hierin ein Kriterium zur Ausscheidung der unzulässigen Lösungen liege. B.

Th. von Oppolzer. Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen beim Cometenproblem.
Astr. Nachr. 2468.

Mitteilung der Formeln ohne Beweis. B.

Gyldén. Ueber die von dem Maltheserritter d'Angos im Jahre 1784 mitgeteilte Cometenentdeckung.
Astr. Nachr. 2445-2446.

Verfasser geht bei der Behandlung dieser vielberufenen Frage von der Voraussetzung aus, dass die beiden ersten Beobachtungen der betreffenden Reihe nicht von vornherein als apokryph zu verwerfen seien ,nur dass dann wegen der sich dabei ergebenden ausserordentlich starken Annäherung an die Erde der Versuch Bahnelemente abzuleiten einen von den gewöhnlichen Methoden abweichenden Weg einschlagen müsse. Verfasser giebt eine auf der Benutzung der von ihm eingeführten intermediären Bahn beruhende Behandlung des Falles, wo die Anziehung des stören-

den Planeten von derselben Ordnung ist wie die der Sonne. Bei der Anwendung auf die vorliegenden zwei Beobachtungen lässt sich ausser der Lage der Bahn nur noch ein Datum bestimmen, während die vollständige Bestimmung der Bahn nur unter hypothetischen Annahmen über zwei andere Stücke zu erreichen ist.

B.

F. Folie. Sur un critérium astronomique certain de l'existence d'une couche fluide à l'intérieur de l'écorce terrestre. Belg. Bull. (3) III. 20-23.

F. Folie. Existence et grandeur de la précession et de la nutation diurne, dans l'hypothèse d'une terre solide. Belg. Bull. (3) III. 739-753.

Der Behauptung von Laplace entgegen giebt es eine berechenbare tägliche Präcession und Nutation, deren Wert grösser ist; dieselbe rührt von einer flüssigen Schicht im Innern der Erdkugel her. Mn. (O.).

C. Rozé. Des termes à courte période dans le mouvement de rotation de la Terre. Extrait par l'auteur. C. R. XCV. 327-330.

B.

Glauser. Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Astr. Nachr. 2415.

Verfasser giebt eine Berichtigung zu der von Zöllner (Astr. Nachr. 1849) entwickelten Rotationstheorie. Zöllner hatte seine Schlüsse u. A. darauf gestützt, dass der Quotient aus den linearen Rotationsgeschwindigkeiten für die Oberfläche und tiefere Schichten von den Polen nach dem Aequator zu abnehmend auf letzterem ein Minimum besitze. Verfasser zeigt, dass wenigstens im vorliegenden Falle dieser Satz nicht zutrifft. B.

PECHÜLE. Sur la favorabilité des stations relativement à l'ensemble des mesures micrométriques à faire pendant le passage de Vénus (1882). Astr. Nachr. 2440.

Die in der Ueberschrift vollständig umschriebene Aufgabe wird für folgende vier Beobachtungsmethoden behandelt: 1) Messung von Höhendifferenzen, 2) von Distanzen, 3) von Rectascensionsdifferenzen, 4) von Declinationsdifferenzen der Centra von Sonne und Venus. Eine beigegebene Hülfstafel gestattet ohne Schwierigkeit zu entscheiden, wie weit sich eine gegebene Combination von Stationen dem günstigsten Falle nähert. B.

PERRY. Sur la future observation du passage de Vénus à Madagascar. Brux., S. sc. VI. A. 103-109.

Mn.

LEHMANN-FILHÉS. Kritischer Beitrag zur Geschichte der meteorischen Astronomie. Astr. Nachr. 2410.

Verfasser zeigt, dass der Schluss, durch welchen Erman (Astr. Nachr. No. 385) aus seinen Beobachtungen der Augustmeteore für die Bahnneigung zwei Grenzwerte herleitete, und der für die weitere Entwickelung der Theorie nicht ohne Folgen geblieben ist, bezüglich der unteren Grenze fehlerhaft war und auf einem Versehen beruhte, das vom Verfasser richtig gestellt wird. Der Fehler war übrigens bereits früher von B. Peirce bemerkt worden (Transactions Amer. Phil. Soc. Vol. VIII).

B.

H. GEELMUYDEN. Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale. Lie Arch. 54-108.

Beitrag zu einer Discussion über die Theorie des Zodiacallichtes zwischen Serpieri, Gelmuyden und Groneman.

L.

KERBER. Refractionstheorie auf geometrischer Grundlage. Wiedemann Ann. XV, 140-165, 308-329.

Verfasser behandelt die astronomische Strahlenbrechung, indem er die Atmosphäre als ein System von sphärischen Schichten ansieht, und darauf die Gauss'schen Begriffe der Haupt- und Brennpunkte etc. anwendet. Soweit ist alles gut, wenigstens so lange die Voraussetzungen jener Gauss'schen Theorie erfüllt sind. Dagegen ist der Versuch des Verfassers, daran eine neue Refractionstheorie zu knüpfen, einfach als verfehlt zu bezeichnen; ebenso zeigen Bemerkungen, wie die über die Bestimmung der Refractionsconstante p. 161 und über die Beobachtung von Bouguer p. 314 trotz aller Citate von weitgehender Unbekanntschaft mit dem Gegenstande. B.

HARZER. Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre. Astr. Nachr. 2477.

Verfasser setzt voraus, dass auf concentrischen Kugeln um den Erdmittelpunkt die Dichtigkeit und Elasticität des Aethers constant sei, dass ferner ein unendlich kleines Element als isotrop anzusehen sei. Es gelingt dann für die Bewegungsgleichungen Lösungen zu finden, welche mit den directen Folgerungen aus dem gewöhnlichen Brechungsgesetz übereinstimmen.

B.

W. MEYER. Ueber die Strahlenbrechung im Innern eines Cometen.

Als von theoretischem Interesse ist hervorzuheben die Aufstellung der Formeln nach Herrn Cellerier für die genannte Refraction unter der Voraussetzung, dass das brechende Medium aus homogenen cylindrischen Schichten zusammengesetzt sei und dass sich dasselbe optisch wie ein vollkommenes Gas verhalte.

B.

Ceraski. Ueber die Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs. Astr. Nachr. 2416.

Verfasser benutzt den Abstand der sich in Ocularprismen zeigenden dunkeln Segmente von der Mitte des Gesichtsfeldes, um die Vergrösserung zu bestimmen.

B.

Anhang.

HALLER VON HALLERSTEIN. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 8. Aufl. von Maier. Berlin. Nauck & Co.

Neue unveränderte Auflage des bekannten Werkes.

O.

GREX. Lehrbuch der Mathematik. Berlin. A. Stubenrauch.

Das vorliegende Buch enthält den dritten Cursus und den zweiten Teil der Arithmetik. Dem Ganzen geht eine Inhaltsübersicht und Zeiteinteilung voran, wie der Inhalt nach Meinung der Herrn Verfassers passend auf ein ganzes Schuljahr verteilt werden kann. Für das Sommerhalbjahr ist das Radiciren, die Proportionslehre, Anwendungen und Repetitionen, — für das Winterhalbjahr Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, quadratische Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten, Repetitionsfragen und Aufgaben bestimmt. Die Darstellung ist überall kurz und deutlich, der Druck gut; besonders Wichtiges wird auch äusserlich durch den Druck hervorgehoben. Ferner sind sehr viel passende Aufgaben und zwar zur mündlichen und auch zur schriftlichen Behandlung eingereiht.

Mz.

Ad. Hochheim. Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra an höheren Lehranstalten. Heft I. Dritte vermehrte Aufl. Berlin. E. S. Mittler & Sohn.

Das bekannte Lehrbuch, dessen erste Auflage im Jahre 1871 erschien, umfasst das arithmetische Pensum der höheren Lehranstalten, und zwar in dem vorliegenden ersten Hefte das Pensum des Gymnasiums und des Real-Progymnasiums, also „Arithmetik bis zur Entwickelung des binomischen Lehrsatzes und Algebra bis zu den Gleichungen zweiten Grades einschliesslich". Im zweiten Hefte, das bei der Bearbeitung der neuen Auflage dieses Leitfadens besonders ausgegeben wird, soll das Pensum des Realgymnasiums und der Ober-Realschule behandelt werden. Die Theorie der Gleichungen zweiten Grades, welche 1) Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten, 2) grösste und kleinste Werte von Trinomien, 3) Reductionen von Gleichungen höheren Grades, und 4) quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten umfasst, ist in der neuen Auflage erweitert worden; ebenso die Combinationslehre. Zugleich wurde das eingefügte Uebungsmaterial wesentlich vermehrt. M.

A. Büttner. Die Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra. Nebst einem Anhange, enthaltend Logarithmentafeln für die Zahlen von 1 bis 10000. Sechste Auflage. Berlin. Stubenrauch.

Ausser der angefügten fünfstelligen Logarithmentafel für die Zahlen 1 bis 10000 unterscheidet sich die neue Auflage durch eine ausführlichere Behandlung der Exponentialgleichungen und der geometrischen Reihen und die Anwendung derselben auf die Rentenrechnung. Die Methode des wohl am besten für Mittelschulen geeigneten Buches besteht darin, dass die Gesetze zuerst an einzelnen Zahlenbeispielen hergeleitet und dann erst allgemein bewiesen werden. M.

F. Wallentin. Lehrbuch der Arithmetik für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. Wien. J. Klinkhardt.

Das vorliegende Lehrbuch, welches sachgemäss auf der allmäligen Entwickelung und Erweiterung des Zahlbegriffes sich aufbaut, enthält das bekannte Pensum der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten bis zu den Gleichungen zweiten Grades einschlieslich, die arithmetischen und geometrischen Reihen mit ihrer Anwendung auf die Rentenrechnung, die Combinationslehre mit dem binomischen Satze, die Wahrscheinlichkeits- und Versicherungsrechnung und die ersten Elemente der complexen Zahlen. In den Anmerkungen finden sich zahlreiche historische Notizen. M.

H. C. E. Martus. Mathematische Aufgaben. 5te Aufl. Leipzig. C. A. Koch.

Neue unveränderte Auflage der bekannten Aufgaben. Die Resultate sind in einem besonderen Bande beigefügt. O.

S. Dickstein. Die Geometrie in der Schule. I. Pädagog. Zeitschr. (Polnisch.). Dn.

L. W. Meech. Complementary division. Analyst IX. 97-103.

Leichte Divisionsart durch eine Zahl mit kleinem arithmetischen Complement, wie z. B. 996. Jn. (O.).

S. Dickstein. Ueber Cubikwurzelausziehung. Pädagog. Zeitschr. (Polnisch.). Dn.

A. Jurgielewicz. Der Unterricht im Rechnen. Pädagog. Zeitschr. (Polnisch.). Dn.

A. Jurgielewicz. Ueber den mathematischen Unterricht in den Töchterschulen. Pädagig. Zeitschr. (Polnisch.). Dn.

J. Henrici. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Leipzig. Teubner.

Die Tafeln sind auf steifem Papier gedruckt und empfehlen sich deshalb für den Handgebrauch. Sie enthalten die Briggischen Logarithmen der Zahlen, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen und die goniometrischen Functionen. O.

E. Becker. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf fünf Decimalen. Leipzig. Tauchnitz.

Die Tafel unterscheidet sich von anderen fünfstelligen Tafeln vorteilhaft dadurch, dass sich je 100 Reihen auf jeder aufgeschlagenen Seite finden. Sie enthalten das gewohnte Material in der übersichtlichen Form des Bruhns'schen logarithmischen Handbuches. O.

Weitere Logarithmentafeln sind:

1) J. G. Böhm. Kleines logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. (5-stellig). 4te Aufl. Innsbruck. Wagner.
2) Th. Wittstein. 5-stellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 10te Aufl. Hannover. Hahn. O.

W. C. Wittwer. Grundzüge der mathematischen Chemie. Schlömilch Z. XXVII. 289-309, 329-345.

Die speciellen Betrachtungen (siehe F. d. M. XII. 1880. 872—873 und XIII. 1881. 868) werden fortgesetzt; analoge Rechnungen wie früher werden ausgeführt in Bezug auf die drei Alkalimetalle Kalium, Natrium und Lithium, sowie deren Verbindungen mit Sauerstoff, mit Wasserstoff, mit Sauerstoff und Wasserstoff. Am Schlusse der Mitteilung (von Seite 342 ab) werden die Resultate zusammengestellt, um die Analogien, welche zwischen den drei Metallen bestehen, sowie die Verschiedenheiten besser hervortreten zu lassen. Rs.

Namenregister.

Seite
Abdank-Abakanowicz, B. 1) L'intégration mécanique 232
2) Un nouvel intégromètre 232
Abendroth, W. Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene 608
Abonné. Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde . 696
Abria, M. Sur les unités de Gauss 884
Adams, C. On Newtons solution of Keplers problem 921
Adan, E. Quelques mots sur une méthode de détermination de la latitude 913
Adler, M. N. Method of solving approximately questions in compound interest 166
Adler, A. 1) Strictionslinien der Regelflächen 558
2) Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art 568
Albers, J. Die Seitenproportionalen eines Dreiecks 458
Allé, M. Zur Theorie des Doppelverhältnisses 514
Allen, A. J. C. 1) Notes on solid geometry 668
2) The general equation of the second degree referred to tetrahedral coordinates 682
Alvord, B. The intersection of circles and the intersection of spheres 526
Amagat, E. H. 1) Sur une forme nouvelle de la relation $f(v, p, t) = 0$ 888
2) Sur la relation $\varphi(v, p, t) = 0$ relative aux gaz 888
Ameseder, A. Geometrische Untersuchungen über ebene Curven . 541
Amthor, A. Arten der Aussteuerversicherung, insbesondere die Militairdienstversicherung 173
André, D. Sur la divisibilité d'un certain quotient 121
Angelitti, F. Sull' attrazione secondo una potenza intera qualunque della distanza 797
Anonyme. Composition mathématique 533
Anthony, E. Solution of a question 635
Antomari, X. 1) Relation entre les distances mutuelles de quatre points situés sur un même cercle et de cinq points situés sur une même sphère 610
2) Deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques 618

Seite

Appell, P. 1) Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algébriques 257
2) Sur une équation linéaire aux dérivées partielles 300
3) Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique 332
4) Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique 332
5) Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) 333
6) Développement en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercles 334
7) Sur les fonctions uniformes doublement périodiques 334
8) Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables 375
9) Un cas de réduction des fonctions Θ de deux variables 405
10) Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables 405
11) Sur les fonctions abéliennes 411

Arcais, F. D'. Teoremi sulle curve piane del terz' ordine 606

Aschieri, F. La trasformazione quadratica doppia di spazio . . . 715

Ascoli, G. Osservazione relativa ad un teorema contenuto in una mia Memoria 365

August, F. Flächen mit gegebener Mittelpunktsfläche 555

Azzarelli, M. Momenti d'inerzia delle linee, superficie e volumi . 739

Bachmann, P. Ueber die Bewegung eines Punktes 752

Backlund. 1) Zur Integration einer Differentialgleichung 927
2) Ueber Störungen durch ein widerstehendes Mittel 930

Baker, M. 1) Alhazen's problem 24
2) Solutions of questions 463. 465
3) Alhazen's problem 465

Barbarin, P. 1) Sur les coordonnées bipolaires 588
2) La droite de Simson 625

Barbier, E. Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face . . . 156

Bardelli, G. Sui sistemi variati di forze 733

Bardey, E. Zur Lehre von den Determinanten 100

Baskakoff, S. J. Methode, die Zahlidentitäten zu finden 128

Basso, G. Sopra un caso particolare d'equilibrio per un solenoide 681

Battaglini, G. 1) Sulle forme quaternarie bilineari 83
2) Relazione su di una memoria di A. Capelli 86
3) Relazione sopra una memoria del Prof. R. de Paolis 140
4) Sopra una memoria del Prof. R. de Paolis 506
5) Sopra una memoria del Prof. R. de Paolis 691
6) Sui connessi ternarii di 1^0 ordine e di 1^a classe 813
7) Relazione sopra una memoria del sig. Gebbia 645

Bauer, G. O. Hesse 19

Becker, E. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf fünf Decimalen 939

Beer, A. Einleitung in die höhere Optik 828

Behse, W. H. Die darstellende Geometrie 481

Bellermann, G. Ueber Rouletten 545

Beltrami, E 1) Relazioni sopra quattro memorie del D. Besso 266. 268. 269. 270
2) Sul potenziale magnetico 796
3) Sulla teoria della scala diatonica 828
4) Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettricati 883

Bendt, F. Ebene und sphärische Trigonometrie 468

Berg, F. J. v. d. 1) Over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleide. Naschrift 51
2) The theory of wages 162

Seite
Berg, F. J. v. d. 3) Over een meetkundig vraagstuk van kansberekening 178
4) Over de onderlinge afwijking van den groten cerkelboog . . . 313
Berger, A. 1) Applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres 128. 223
2) Application des nombres des classes des formes quadratiques binaires pour un déterminant négatif 142
3) Bevis för några formuler i differenzkalkylen 192
4) En generalisation af några formler i Gammafunktionens teori . 226
5) Generalisation af några formler i Gammafunktionens teori . . . 373
Bergmann, F. Kegelschnittbüschel-Constructionen 538
Berloty, Le P. Sur les équations algébriques d'une certaine forme 52
Bernardinis, G. Sulla livellazione geometrica 914
Bertini, E. 1) Costruzione geometriche della trasformazione univoca di 3° ordine 719
2) Sui sistemi lineari 433
Bertrand, J. 1) Sur la théorie des épreuves répétées 155
2) Sur la loi de déviation du pendule de Foucault 760
Berwald, Hj. Eqvationslära 38
Besant, H. W. Solution of a question 638
Besso, D. 1) Di alcune proprietà dell' equazione differenziale lineare, non omogenea del second' ordine 266
2) Di alcune proprietà dell' equazionne differenziale lineare omogenea del second' ordine 266
3) Sul prodotto di più soluzioni particolari d'un equazione differenziale lineare omogenea 268
4) Una classe d'equazioni del sesto grado 269
5) Alcune proposizioni sulle equazioni differenziali lineari 260
Bianchi, L. Sulle superficie a curvatura costante positiva 652
Bianco, O. Z. G. F. Peverone 10
Bickerdike, C. Solution of a question 137
Biehler, Ch. Sur l'élimination 89
Binder, W. Centralprojection als Hilfsconstruction der Orthogonalprojection 483
Björling, C. F. E. 1) Om algebraiska rymdkurvors singulariteter . 575
2) Modelle von Raumcurven 576
Blackwood, E. Solution of a question 156
Blythe, W. H. Solutions of questions 156. 229. 463. 689
Boas, F. Ein Beweis des Talbot'schen Satzes 750
Bobeck, K, Der geometrische Ort der Inflexionspunkte eines Curvenbüschels 580
Böhm, J. G. Kleines logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. (5-stellig) 939
Böklen, O. 1) Ueber die Rechnung mit Vectoren 443
2) Ueber die Krümmung der Flächen 644
3) Die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle 694
4) Aufhängepunkte und Axen für isochrone Schwingungen eines Körpers 757
Boije of Gennas, C. O. Remarkable property belonging to some cubics 621
Bois-Reymond, P. du. 1) Allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen 208
2) Die allgemeine Functionentheorie 309
Boltzmann, L. 1) Experimente über den Stoss von Cylindern . . 815
2) Zur Theorie der Gasdiffusion 907

Seite

Bordiga, G. A. Sulle quadriche analoghi a quello di Pascal nelle coniche 556
Borletti, F. 1) Solutions de questions 59. 211
2) Trasformazione delle coordinate nello spazio 585
Bouniakowsky, V. Propriétés d'une classe particulière des fractions décimales périodiques 116
Bougaeff, N. V. Eigenschaften der Reste und der Zahlsummen . 122
Bourguet, J. 1) Sur les permutations de n objets 147
2) Problème de permutations successives nommé Battement de Monge 148
Boussinesq, J. 1) Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles 247
2) Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions . 301
3) Sur l'intégration d'une équation 302
4) Intégration de certaines équations aux dérivées partielles . . . 781
5) Équations différentielles du mouvement de certaines ondes . . 781
6) Sur certaines ondes dans l'eau en repos d'un canal 781
7) Sur un potentiel à quatre variables 798
8) Les déplacements de petites dilatations ou condensations . . . 805
9) Équilibre d'élasticité d'un solide 806
10) Transmission d'une pression oblique 806
11) Résistance d'une barre prismatique 818
12) Sur le choc d'une plaque élastique 818
Brassinne, E. 1) Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal 530
2) Manière de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier 732
3) Balance d'oscillation employée pour le calcul des moments d'inertie 740
4) Questions de mécanique rationnelle 747
5) Nouvelle manière d'employer le principe de la moindre action dans les questions de la dynamique 747
6) Sur un passage de la „mécanique analytique" 747
7) Méthodes générales pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux 747
Braunmühl, A. v. Geodätische Linie und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades 689
Bresch, R. Der Chemismus, Magnetismus und Diamagnetismus . . 34
Brill, A. 1) Ueber binäre Formen 64
2) Das Polvierseit 534
Brill, L. Nachtrag zum Catalog mathematischer Modelle 691
Brillouin, E. Comparaison des coefficients d'induction 877
Brioschi, F. 1) Sur les fonctions de sept lettres 98
2) Relazione sopra una memoria del Prof. R. de Paolis 140
3) Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari 265
4) Une application du théorème d'Abel 278
Brisse, Ch 1) Applications des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en S 676
2) Réduction de l'équation générale des surfaces du second ordre 680
Brocard, H. Interprétation de l'équation caractéristique de diverses courbes 621
Broda, K. Bildungsgesetz periodischer Brüche 146
Bruno, F. de. 1) Quelques applications de la théorie des formes binaires aux fonctions elliptiques 69
2) Nouvelle série dans les fonctions elliptiques 391
Bruno, G. 1) Coniche che passano per tre punti dati e toccano due rette date 533

Seite
Bruno, G. 2) Sui quadrilateri sghembi circoscritti ad una quadrica 551
Buchheim, A. 1) Some applications of symbolic methods 207
2) Solution of a question 229
3) Extension of certain theories relating to plane cubics to curves of any deficiency 428
Buck, C. Solutions of questions 138. 207. 463
Budd, F. Solutions of questions 539. 621
Budde, E. Bemerkungen über die mechanischen Grundlagen der Gesetze von Ohm und Joule 866
Büttner, A. Die Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra. Nebst einem Anhange, enthaltend Logarithmentafeln für die Zahlen von 1 bis 10000 937
Bugaeff, N. V. Lösung der Congruenzen zweiten Grades 126

Callandreau, O. Sur la détermination des variations séculaires et des éléments moyens des orbites 929
Campori, G. Carteggio Galileiano 15
Cantor, G. 1) Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen 321
2) Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten 433
Capelli, A. Sul numero dei covarianti di grado dato 84
Cardinaal, J. Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung . . 551
Carey, J. The first six books of the elements of Euclid 455
Caron, J. L'intersection d'une surface de révolution du second ordre 493
Casorati, F. 1) Relazione sulla memoria di A. Capelli 86
2) Sulle equazioni differenziali lineari 244
3) Relazioni sopra quattro memorie del D. Besso . . . 266. 268. 269
4) Aggiunte a recenti lavori dei sig[i]. Weierstrass e Mittag-Leffler 327
5) Sulle funzioni analitiche 328
6) Sopra il teorema di Jacobi 361
Caspary, F. Umformung gewisser Determinanten 104
Cassani, P. I nuovi fondamenti della geometria 438
Castigliano, A. Una proprietà dei sistemi elastici 802
Catalan, E. 1) Extrait d'une lettre 121
2) Sur un article des Nouv. Ann. 194
3) Sur les fonctions X_n de Legendre 429
4) Question 65 463
5) Rapport sur un mémoire de M. Mansion 641
Cavallin, C. B. S. 1) Solutions of questions 179. 221
2) Ett sätt att härleda och generalisere Legendre's formel $\int_0^{2\pi} p d\omega = L$ 228
3) Ett geometrisk medalvärde 636
Cayley, A. 1) Tables for the binary sextic 69
2) Solution of a question 87
3) On the 8-square imaginaries 87
4) A proof of Wilson's theorem 120
5) The standart solutions of a system of linear equations 134
6) Geometrical representation of an equation 319
7) On associative imaginaries 319
8) Formula relating to the elliptic integral of the third kind . . . 382
9) On Landen's theorem 384
10) Geometrical interpretation of certain formulae in elliptic functions 402

Seite

Cayley, A. 11) Reduction of $\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$ to elliptic integrals . . . 405
12) Note on Abel's theorem 408
13) Addition to a paper of Mr. Rowe 410
14) A memoir on the Abelian and Thetafunctions 411
15) On the geometrical forms called trees 444
16) Note on the formulae of trigonometry 469
17) On curvilinear coordinates 587
18) Weitere Aufgaben über Curven vierter Ordnung 633
19) Determination of the order of a surface 669
20) On two cases of the quadric transformation between two planes 721
Cazzaniga, P. 1) Il calcolo dei simboli d'operazione 318
2) Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti 324
3) Sopra una formola di Cauchy 331
Ceraski. Ueber die Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs 935
Certo, L. Lo spazio delle omologie affini di un piano 723
Césaro, E. 1) Formule d'arithmétique 115
2) Question de probabilité 178
3) Sur la tractrice 637
Charve, H. L. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives 145
Chomé. Propriété des surfaces gauches 643
Choura, J. Unterricht in der darstellenden Geometrie 483
Christensen, S. A. Vindskjäve Kurvers Polarflade 667
Chrystal. 1) On Mr. Muir's transformation of a determinant into a continuant 102
2) On a special class of Sturmians 102
Clausius, R. 1) Die Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen 857
2) Zusammenhang zwischen den Einheiten der Elektricität und des Magnetismus 857
3) Formule relative à l'électrisation par influence 862
Cohen, A. Solutions of questions 87. 196. 471
Cohn, J. Beweis einer Entwickelung einer Function 196
Colley, R. 1) Ueber die Existens einer diëlektrischen Polarisation in Elektrolyten 865
2) Ueber die in einem geschlossenen Stromkreise geleistete Arbeit äusserer Kräfte 867
Collignon, E. Résolution graphique de certains problèmes de cosmographie 918
Constable, W. J. Solutions of questions 59. 463. 466
Cox, H. 1) On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space 439
2) On systems of circles and bicircular quartics 588
3) Application of quaternions 589
Craig, Th. 1) Some elliptic function formulae 390
2) Certain metrical properties of surfaces 638
3) On areas of corresponding surfaces 639
4) A geometrical theorem 667
5) The counter-pedal surface of the ellipsoid, with a note 693
6) On the parallel surface to the ellipsoid 694
Cremona, L. 1) Elemente der projectivischen Geometrie 497
2) Sopra una memoria del prof. R. de Paolis 691

Seite
Crocchi, L. La corrispondenza tra i coefficienti di un' equazione algebrica e le funzioni simmetriche complete 113
Croullebois. Conséquences du principe de Gauss en électrostatique 862
Curtis, A. H. 1) Solutions of questions . 271. 467. 471. 619. 668. 689
2) Proof that a certain caustic is an epicycloid 626
3) Notes on central forces 750

Dangschat, M. Geometrie für Mittelschulen 451
Darboux, G. 1) Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables. 203
2) Proposition relative aux équations linéaires 264
3) Sur une équation linéaire 278
4) Sur le problème de Pfaff 294
5) Sur une équation linéaire aux dérivées partielles 299
6) Sur une classe de courbes unicursales 542
7) Sur une propriété du cercle 543
8) Représentation sphérique des surfaces 662
Darwin, G. H. On the stresses in the interior of the earth 809
David. 1) Oeuvres de Cauchy 18
2) Applications de la dérivation d'Arbogast 129. 189
Davidoff, A. J. 1) Formule générale des intégrales définies . . . 216
2) Allgemeine Formel in der Theorie der bestimmten Integrale . 230
Davis, E. W. 1) The maximum value of a certain determinant . . 105
2) On binodal quartics 607
Dawson, H. G. Solutions of questions 619
Day, H. G. Solutions of questions 161
Decharme, C. 1) Sur l'imitation des phénomènes d'électricité et de magnétisme 859
2) Réponse à M. Ledieu 859
3) Expériences hydrodynamiques 860
Dedekind, R. 1) Die Determinante endlicher Körper 59
2) Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen . . 252
Delsaux, J. 1) Sur la diffraction des ondes planes 838
2) Sur la théorie de l'arc en ciel 853
Deprez, M. 1) Des actions électriques dans les systèmes conducteurs semblables 879
2) Transport de la force aux grandes distances 879
3) Nouvelles expressions du travail et du rendement économique des moteurs électriques 879
4) Sur les moteurs électriques 880
Despeyrous. Sur les équations différentielles du mouvement d'un corps solide 769
Dillner, G. 1) Intégrales définies des fonctions d'une variable complexe 217
2) Om integration af differentialeqvationerna i n-kroppar-problemet 751
Dickmann, J. Determinanten in der Schule 199
Dickstein, S. 1) Die Geometrie in der Schule. I. 938
2) Ueber Cubikwurzelausziehung 938
Dieterici, C. Ueber Messung kleiner elektrischer Widerstände . 872
Ditscheiner, L. Die Guébhard'schen Ringe 870
Dixon, T. S. E. A general algebraic method for the solution of equations 52
Dorlet, E. Solution d'une question 623
Dorn, E. 1) Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass 873

Seite
Dorn, E. 2) Zur Multiplications- und Zurückwerfungsmethode . . 875
Dorna. Relazioni sopra una memoria del prof. Jadanza 915
Dostor, G. Volumes et surfaces de deux corps de révolution . . 476
Drasch, H. Zur synthetischen Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt 540
Dronke, A. Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung 909
Droz. Solution of a question 539
Dufau, H. Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique . . . 529
Durège, H. Elemente der Theorie der Functionen 313
Durfee, W. 1) Some properties of a certain numerical solution . . 131
2) On symmetric functions 114
Dyck, W. Gruppentheoretische Studien 47
Dziobek, O. 1) Ueber gewisse Functionen von sechs Variabeln . 367
2) Zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks 528
Dziwinski, P. Richtungszahlen 318

Easton, B. Solutions of questions 138. 156. 161. 179. 229. 466. 467. 473, 539. 619. 704
Eastwood, G. Solutions of questions 138. 463. 465. 467. 699
Eckl. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien 35
Edler, F. Vervollständigung Steiner'scher Beweise 463
Edwardes, D. Solutions of questions 161. 179. 229. 462. 463. 465. 471 539. 618. 635. 638. 704
Elliott. Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ 416
Ely, G. S. 1) On partitions 116
2) Algebraic solution of the modular equation for the septic transformation 398
Enneper, A. 1) Flächen mit besonderen Meridiancurven 705
2) Zur Theorie der Flächen 706
Escherich, G. v. 1) Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen 281
2) Die Construction der algebraischen Flächen 560
3) Die Construction der algebraischen Curven und Flächen . . . 560
Evans. Solution of a question 229

Faifofer, A. Lejeune-Dirichlet. Lezioni sulla teoria dei numeri . 115
Falk, M. Om derivator och differentialer af en funktion 204
Favaro, A. 1) Bartolomeo Sovero 12
2) Carteggio Galileiano 15
3) Un episodio del processo di Galilei 15
4) Nuova edizione delle opere di Galilei 15
5) C. Culman 20
Faye. Discours 19
Fergola, E. 1) Sopra una formola del sig. G. Erdmann 306
2) Di alcune equazioni relative alla teoria delle funzioni ellittiche 400
Fermat, P. Manuscrits inédits 14
Fialkowski, N. Zeichnende Geometrie 449
Fiedler, W. 1) Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden 485
2) Geometrische Mitteilungen. III. IV. V. 489. 490
3) Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln 490
4) Cyklographie 492. 500

Seite
Fiedler, W. 5) Zu den Elementen der Geometrie der Lage . . . 506
6) Geometrische Mitteilungen. 583. 712
Folie, F. 1) Rapports sur des mémoires de M. Em. Weyr et de M. C. Le Paige 570. 602. 605
2) Mémoire sur les courbes du 5me ordre 604
3) Un mot encore sur la détermination de la latitude 913
4) Rapport sur un mémoire de M. Lagrange 749
5) Sur un critérium astronomique certain de l'existence d'une couche fluide à l'intérieur de l'écorce terrestre 932
6) Existence et grandeur de la précession et de la nutation diurne, dans l'hypothèse d'une terre solide 932
Forest, F. L. de. 1) On an unsymmetrical probability curve . . . 161
2) Law of error in the position of a point in space 160
Formenti, C. Riduzione di integrali di funzioni algebriche ad integrali di funzioni razionali 375
Forsyth, A. R. 1) Porism of the in- and circumscribed polygon . 400
2) A memoir on the theta-functions 407
3) On Abels's theorem and Abelian functions 408
4) On a theorem of Jacobi 411
Forti, A. Tafeln der hyperbolischen Functionen 369
Franklin, F. 1) On Crocchi's theorem 114
2) On a logical problem connected with assecurances on joint lives 169
Frenzel, Ch. Die arithmetische Integration der Dämme und Einschnitte 232
Frobenius, G. 1) Differentiation der elliptischen Functionen . . . 388
2) Elliptische Functionen zweiter Art 389
Fröhlich, J. Intensität des gebeugten Lichtes 833
Fuchs, L. 1) Ueber gewisse lineare homogene Differentialgleichungen 242
2) Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben 349

Gale, K. Solutions of questions 138. 156. 161. 196. 463. 539
Gambey. 1) Solution d'une question de mécanique élémentaire . . 739
2) Solution d'une question de mécanique 757
Gandtner, J. O. und Junghans, K. F. Aufgabensammlung . . . 456
Gascheau. 1) Cas singulier du mouvement d'un point matériel . . 751
2) Explication de deux paradoxes apparents 751
Gasparis, de. 1) Coordinate eliocentriche in funzione del' anomalia media 920
2) Serie fra anomalia e raggio vettore 920
3) Prima approssimazione di un orbita con cinque dati 920
4) Sur la théorie du mouvement des planètes 920
5) Sur le problème de Kepler 920
Gautero, G. Del movimento di una superficie 729
Geelmuyden, H. Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale 933
Geer, P. v. 1) Over het gebruik van determinanten by de methode der kleinste kwadraten 157
2) Over de beweging van stelsels 755
Gegenbauer, L. 1) Ueber algebraische Gleichungen, welche eine bestimmte Anzahl complexer Wurzeln besitzen 53
2) Das Additionstheorem gewisser Functionen 432
3) Ueber die doppelt-periodischen Functionen zweiter Art 362
Geisenheimer, L. Ueber den Mittelpunkt der Raumcurven dritter Ordnung 558
Gelcich, E. Ueber die Entdeckung der analytischen Geometrie . . 24
Genese, R. W. 1) Solutions of questions 539. 602. 618. 635

Seite
Genese, R. W. 2) On linear syzygetic relations between the coefficients of ternary equations 613
Genocchi, A. 1) Presentazione di „Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert" 18
2) Sur les fonctions de M. Prym et de M. Hermite 372
Genty. Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre 714
Gerbaldi. Sui gruppi di sei coniche in involuzione 537
Gerlach. 1) Determinanten in der Schule 100
2) Das Restproblem für nicht teilerfremde Divisoren 122
Gilbert, Ph. 1) Les preuves mécaniques de la rotation de la terre 26
2) Exercices d'analyse infinitésimale 598
3) Cours de mécanique analytique 724
4) Les preuves mécaniques de la rotation de la terre 762
5) L'application de la méthode de Lagrange à plusieurs problèmes du mouvement relatif 762
Gilles. Die Einheit der Naturkräfte 31
Gilman, B. J. 1) On propositions and syllogism 28
2) On propositions called „spurious" 29
Glaisher, J. W. L. 1) Expression for argsn$a$ and (argsn$a$)^2 as definite integrals 221
2) On certain definite integrals 227
3) Formulæ of the rth integral of a Legendrian coefficient 229
4) Examples illustrative of Cayley's theory of singular solutions . 249
5) On Riccati's equation 272
6) On a partial differential equation 299
7) Une identité trigonométrique 368
8) Proof of the addition equation for elliptic integrals 386
9) Theorem in elliptic functions 392
10) Formulae in elliptic functions 394
11) Method of deriving formulae in elliptic functions 395
12) Équations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques . 396
Glaisher, E. H. Formulae for sn$8u$, cn$8u$, dn$8u$ in terms of sn$u$ 398
Glaser, St. Ellipsoidische Flächenbelegungen 799
Glashan, J. C. Forms of Rolle's theorem 318
Glauser. Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten 932
Glazebrook, R. F. 1) On the refraction of polarized light at the surface of an uniaxal crystal 847
2) Equations connected with the electromagnetic theory of light . 847
Gordan, P. 1) Büschel von Kegelschnitten 80
2) Ueber ternäre biquadratische Formen 80
3) Gleichungen siebenten Grades 80
4) Ueber Büschel von Kegelschnitten 603
Gosiewski, W. Ueber stetige Functionen 218
Goursat, E. 1) Sur les intégrales algébriques des équations linéaires 258
2) Les fonctions hypergéométriques de deux variables 277
3) Fonctions uniformes présentant des lacunes 336
4) Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables 374
5) Sur l'équation qui relie au module la fonction complète de première espèce 383
Gouy Sur la propagation des ondes lumineuses 838
Gräfe, F. 1) Ueber das Pascal'sche, resp. Brianchon'sche Sechseck 529
2) Erweiterung eines Satzes von Hesse 552
3) Sätze über abwickelbare Flächen 595

Seite
Gram, J. P. Le triparty de Nic. Chuquet 9
Greenhill, A. G. 1) Note on a paper of Prof. Cayley 386
2) On the motion of a projectile in a resisting medium 753
3) On the steady motion of a solid of revolution 772
4) On the rotation of a liquid ellipsoid about an axis 777
5) On the flow of viscous liquid in a pipe or channel 784
6) On functional images in Cartesians 864
Greiner, M. 1) Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt 622
2) Ort der Berührungspunkte von gewissen Tangenten 624
Grex. Lehrbuch der Mathematik 936
Griffiths, J. 1) Solution of a question 212
2) Note on Professor Cayley's paper 384
3) Proof of Grave's and Mac Cullagh's theorems 384
Grossmann, J. Zur Theorie der Reglage 773
Grossmann, L. Bestimmung der innern Reibungsconstanten von Gasen 786
Grove, W. B. Solutions of questions 138. 463. 465. 635
Grünwald, A. Entwickelung der begrenzten Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index 206
Günther, S. 1) Peter und Philipp Apian 12
2) Carteggio tra Gauss e S. Germain 18
3) Dépendance entre certaines méthodes d'extraction de racine carrée et l'algorithme des fractions continues 21
4) Die quadratischen Irrationalitäten der Alten 21
5) Specialfall der Pell'schen Gleichung 132
6) Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie*) . . 368
7) Évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques 377
Gusserow, C. Inhaltsermittelung der Körper aus ihren Projectionen 474
Gyldén. 1) Sur la solution du problème des trois corps 925
2) Annäherungsmethode im Problem der drei Körper 925
3) Ueber die absoluten Elemente der Planetenbahnen 926
4) Erwiderung auf die Bemerkung Lindstedt's 927
5) Ueber die von dem Maltheserritter d'Angos im Jahre 1784 mitgetheilte Cometenentdeckung 931

Haan, D. B. de. Bibliographie Néerlandaise 20
Habich, E. 1) Sur les roulettes 637
2) Théorème de cinématique 729
Hadamard. Solution of a question 212
Hagen, G. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung 153
Haigh, E. Solution of a question 621
Hain, E. 1) Das gleichseitige Dreieck 458
2) Construction reciproker Punkte des Dreiecks 460
3) Formeln für die Rechnung mit trimetrischen Punktcoordinaten . 585
Hall, A. The density of the earth 913
Haller von Hallerstein. Lehrbuch der Elementar-Mathematik . 936
Halphén, G. 1) Série de Fourier 187
2) Sur une série pour développer les fonctions d'une variable . . 335
3) Sur une série d'Abel 367
4) Sur un critérium relatif à la théorie des sections coniques . . 532
5) Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles 580
6) Théorie du déplacement 728
Hamburger, M. Zur Theorie der Integration eines Systems von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen 292
Hamilton. Elemente der Quaternionen 590

*) Siehe auch unter Berichtigungen.

Seite
Hammerl, H. Ueber Regenbogen 853
Hammond, J. 1) Proof that an equation must have at least *n* roots 46
2) Calculation of symmetric functions 113
3) Solutions of questions 59. 179. 467. 619. 638. 688. 689. 699
Hanel, J. Reduction hyperelliptischer Functionen auf elliptische . 403
Hankel, H. Die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen 320
Hansted, B. Généralisation de la fonction X_n de Legendre . . . 430
Hardy, G. F. 1) Method of approximating to the value of annuities involving threelines 165
2) On the rate of interest in annuities certain 167
Harley, R. Solution of a question 196
Harmuth, Th. Polydimensionale Zahlenfiguren 138
Harnack, A. 1) Théorie de la série de Fourier 187
2) Berichtigung 189
Hart, H. 1) On the linear vectorial equation of the central pedal of a conic 630
2) The evolute of the symmetrical bicircular quartics 633
3) Quaternion proof of the triple generation of three-bar motion . 731
Harzer, P. 1) Die Wahrscheinlichkeit einen Kometen aufzufinden . 159
2) Neue Methode, die negativen und ungraden Potenzen der Entfernungen der Himmelskörper zu entwickeln 923
3) Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre 934
Hatt. Sur la loi de déviation du pendule de Foucault 760
Hauck, G. Perspectivische Studien 487
Hausmaninger, V. Ueber die Veränderlichkeit der Diffusionscoefficienten zwischen Kohlensäure und Luft 908
Häussler, J. W. Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie . . . 903
Hayash, H. Solution of a question 635
Hayes, J. S. Demonstration of Maclaurin's theorem 184
H. B. D. Solution d'une question 210
Heal, W. E. Solution of a problem 462
Heger, R. Leitfaden für den geometrischen Unterricht 453
Helmert. Einfluss der Lothablenkung auf Nivellements 913
Helmholtz, H. 1) Absolute Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen 857
2) Thermodynamik chemischer Vorgänge 897
Henrici, J. 1) Elementar-Geometrie 454
2) Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln 939
Henry, Ch. Les deux plus anciens traités français d'algorisme et de géométrie 14
Henry, C. Solution d'une question 704
Heppel, G. Solutions of questions 59. 138. 149. 156. 193. 461. 463. 466. 618
Hermes, J. 1) Gleichungen ersten und zweiten Grades 131
2) Ein Algorithmus zur Behandlung quadratischer Formen 140
Hermite, Ch. 1) Application d'un théorème de Mittag-Leffler . . 329
2) Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce 382
3) Applications de la théorie des fonctions elliptiques 402
Hertter, C. F. Zeichnende Geometrie 449
Hertz, H. Berührung fester elastischer Körper 807
Herz, N. 1) Beweis des Riemann'schen Satzes über algebraische Functionen 360
2) Beziehungen zwischen den Integralen der elliptischen Functionen 380

Seite

Herz, N. 3) Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale 413
4) Zur Berechnung der scheinbaren Sternörter 919
5) Zur Theorie der Bahnbestimmung eines Kometen 930
6) Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geometrischen Beobachtungen 931
Hess, E. Ueber Polyeder-Kaleidoskope 447
Hess, W. Das Problem der Rotation 771
Heun, K. Kugelfunctionen 428
Heymann, W. 1) Transformation einer Differentialgleichung . . . 250
2) Zur Integration der Differentialgleichungen 251
Hicks, W. M. On toroidal functions 799
Hildebrand, C. Ueber die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene 868
Hill, G. W. Review of the „theory of the moons motion deduced from the law of universal gravitation" by John N. Stockwell . 929
Hillhouse, W. A new curve for the trisection of an angle . . . 632
Hioux, V. Racines communes à deux équations algébriques entières 58
Hočevar, F. Zur Integration einer Jacobi'schen Differentialgleichung 248
Hochheim, A. 1) Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene 610
2) Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra an höheren Lehranstalten 937
Hölder, O. 1) Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze 180
2) Beweis eines Satzes 337
Hofmann, F. 1) Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Potenzreste 124
2) Ein elementar-geometrischer Satz als Beitrag zur Theorie der stereographischen Projection 497
3) Théorème relatif à un certain réseau de quatre coniques . . . 539
Hoffmann, F. Ueber Linienpaare mit optischen Eigenschaften . . 851
Holl, W. Lehrbuch der Geometrie 450
Hollman, P. J. Eenige toepassingen van de theorie der singuliere integraalen 279
Holst, E. 1) Et Par synthetiske Methoder isor til Brug ved Studiet af metriske Egenskaber 599
2) Zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Curven 600
3) Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes 600
Hopkins, G. F. Solution of a question 619
Hoppe, R. 1) Reduction einer biquadratischen Gleichung auf eine cubische 56
2) Zwei reciproke Relationen einer Integralfunction 212
3) Infinitärer Hauptwerth 219
4) Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen 435
5) Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie 435
6) Die regelmässigen linear begrenzten Figuren jeder Anzahl von Dimensionen 436
7) Bestimmung einer Fläche durch die eine ihrer Mittelpunktsflächen 653
8) Zur Flächentheorie 659
9) Das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugirten Tangenten 659
Horta, F. da P. Algunas propriedades das conicas 527
Hossfeld, C. Construction der Kegelschnitte 528
Hoüel, J. 1) Sur l'enseignement de la trigonométrie 37. 468
2) Généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique 312

Seite

Houzeau, J. C. et A. Lancaster. Bibliographie générale de l'astronomie . . . 916
Houzeau, J. C. 1) Annonce bibliographique . . . 916
2) Vademecum de l'astronomie . . . 916
Hoza, F. Zur sphärischen Trigonometrie . . . 473
Hromádko, F. Berechnung des kubischen Inhalts eines schiefen Prismas . . . 475
Hudson, W. H. H Solution of a question . . . 473
Hudson, Ch. On equal roots of equations . . . 51
Hübner, V. J. Neue Ableitung gewisser Formeln . . . 469
Hugoniot. 1) Développement des fonctions en séries d'autres fonctions . . . 330
2) Sur des fonctions d'une seule variable analogues aux polynômes de Legendre . . . 330
3) Sur les vibrations etc., siehe **Sebert** . . . 815
Hultsch, F. Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate . . . 23
Hunyady, E 1) Zusatz zu einer früheren Abhandlung . . . 612
2) Geometrischer Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelfläche zweiten Grades . . . 692
Hurwitz, A. 1) Eine Reihe neuer Functionen . . . 345
2) Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(x) = \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^3}$ 371
3) Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung . . . 559

Jacobi, C. G. J. Gesammelte Werke . . . 314
Jadanza, N. 1) Sopra un determinante gobbo . . . 110
2) Alcuni problemi di geodesia . . . 915
Jamet, V. Développement de arctang$x$ en série convergente . . . 191
Janni, V. Sul teorema di Sturm . . . 50
Janse, L. Bz. 1) Stromverdeelingssysteem van Gebr. Sulzer . . . 731
2) Oplossing eener prijsfraag . . . 919
Järisch, P. Die beiden Theorien der Elasticität . . . 26
Jarleton, F. A. Some deductions of McCullagh's „Lectures on rotation" . . . 769
Jarolimek, V. Projection der Durchdringungscurve zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung auf die Ebene der beiden Drehungsaxen . . . 494
Jeffery, H. M. 1) Theorems relating to the regular polyhedra . . . 474
2) On theorems relating to the regular polyhedra . . . 474
3) On certain quartic curves . . . 630
4) Tangential property of regular hypocycloids and epicycloids . . . 637
5) On the rectifiable spherical epicycloid . . . 637
6) On spherical curves of the fourth class . . . 703
7) On spherical cycloidal and trochoidal curves . . . 703
Jenkins, J. S. Solution of a question . . . 619
Jensen, P. V. Analytisk Fremstilling af Kurves beskrevne ved en bevägelig Frestangsferbindelse . . . 633
Jeřábek, V. Construction von conjugirten und senkrechten Strahlen von projectivischen Büscheln . . . 507
Igel, B. Eine Klasse von Abel'schen Gleichungen . . . 50
Igurbide, A. F. Investigaciones filosofico-matematicas sobre las contidades imaginarias . . . 30
Imschenetzky, V. G. Erweiterung einer Euler'schen Methode . . . 253
Jockmick, W. Sifferexempel till plana koordinatgeometrien . . . 597

Seite
Johnson, W. W. 1) Glaisher's enumeration of primes 118
2) Certain symbolic relations 202
3) Systems of formulae for the sn, cn and dn of $u+v+w$ . . . 396
4) The spherical triangle proof of the addition equation in elliptic functions 396
5) On the derivation of elliptic function formulae 397
6) New notation for anharmonic ratios 506
Jonquières, E. de. 1) Sur la formule récemment communiquée à l'Académie 118
2) Formules pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné 118
Jordan. 1) Theilung eines Vierecks 915
2) Bemerkung zur Rectification eines Meridianbogens 915
Jordan, C. 1) Rapport sur un mémoire de M. Stéphanos 71
2) Cours d'analyse 200
3) Rapport sur un mémoire de M. de Salvert 645
4) Rapport sur un mémoire de M. Ph. Gilbert 762
Israel, C. 1) Gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit und der Schiefe der Ekliptik 918
2) Astronomische Anwendung eines Satzes der Transversalenlehre 918
3) Gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit, Schiefe, Ekliptik und geographischen Breite 918
Israel-Holtzwart, K. 1) Abriss der mathematischen Geographie 917
2) Elemente der sphärischen Astronomie 917
3) Elementare Darstellung der Gauss'schen Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnelemente 920
Judson, C. N. Zero and infinity 29
Jung, G. 1) Alcuni teoremi baricentrici 737
2) Alcuni teoremi sulle forme degeneri dell' ellissoide del Culmann 740
3) Sul pseudofoco del paraboloide e sul centro magnetico 885
Junghans, K. F. und Gandtner, J. O. Aufgabensammlung . . . 456
Jürgens, E. Ueber das Integral $\int_\alpha^\beta \frac{y dz}{x-z}$ 245
Jurgielewicz, A. 1) Der Unterricht im Rechnen 938
2) Ueber den mathematischen Unterricht in den Töchterschulen . 939

Kaiser, H. Anfangsgründe der Determinanten 99
Kantor, S. 1) Zu Sturm's: „Ueber die reciproke Verwandtschaft etc." 514
2) Allgemeinste lineare Systeme linearer Transformationen 515
3) Zu einer Abhandlung von Durège 700
Kapteyn, W. Over den vorm van zekere differentiaalen 209
Keindorff, A. Kritik der drei Kepler'schen Gesetze 34
Kerber. Refractionstheorie auf geometrischer Grundlage 934
Kessler, F. 1) Minimum der Zeit bei der Brechung des Lichts . . 852
2) Minimum der Rotation des Lichtstrahls 852
3) Minimum der Ablenkung eines Lichtstrahls 852
4) Ersatz eines centrirten Systems brechender Kugelflächen durch eine einzige dieser Art 853
Ketteler, E. 1) Bemerkungen zu Arbeiten der Herren Lommel, Glazebrook und Mathieu 842
2) Theorie der circular- und elliptisch-polarisirenden Mittel . . . 844
Kiessling. Entwickelung des Imaginären in der Analysis 23
King, S. Theory of finance 164
Kirchhoff, G. Zur Theorie der Lichtstrahlen 829

Seite
Kitchin, J. L. Solutions of questions 87. 166. 539
Kittudge, L. A. Solutions of questions 461. 470
Klein, F. 1) Ueber eindeutige Functionen 345
2) Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale 358
Klemenčič, J. Capacität eines Plattencondensators 866
Klug, L Entwickelung des Euler'schen Algorithmus 100
Knieseley, U. J. Solution of a question 229
Knowles, R. Solutions of questions . 191. 463. 471. 539. 619. 621. 635
König, A. Beziehungen zwischen der galvanischen Polarisation und der Oberflächenspannung des Quecksilbers 866
König, W. Elliptische Polarisation des reflectirt gebeugten Lichtes 838
Königsberger, L. 1) Aus der Theorie der Differentialgleichungen 234
2) Irreductibilität von Differentialgleichungen 240
3) Eigenschaften der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen 241
4) Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen 289
Kohlrausch, F. 1) Messung der Windungsfläche einer Drahtspule auf galvanischem Wege 874
2) Absolute Messungen mittels bifilarer Aufhängung 881
Korkin, A. N. Unmöglichkeit einer gewissen Gleichung durch ganze Functionen zu genügen 134
Köstler, H. Vorschule der Geometrie 448
Kostka, C. Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen 112
Kotanyi, L. Construction algebraischer Ausdrücke mit Hülfe von Involutionen auf Kegelschnitten 536
Kramer, P. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes . . . 26
Krantz, H. J. Solution d'une question 190
Krause, M. 1) Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 414
2) Multiplicatorgleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 414
3) Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen für die Transformation fünften Grades 415
Krazer, A. Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel 415
Krebs, C. Hvorvidt ere Axiomerne Erfaringssätninger 35
Krey, H. Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten . 572
Kronecker, L. 1) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen 38
2) Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches in ihre irreductibeln Factoren 44
3) Zur Theorie der Formen höherer Stufen 44
4) Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen 45
5) Die Composition Abel'scher Gleichungen 46
6) Die cubischen Abel'schen Gleichungen 46
7) Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen 48. 115
8) Die Subdeterminante symmetrischer Systeme 111
Küttner, W. Activitätswahrscheinlichkeit 172
Kuntze, O. Analytische Untersuchungen aus der Hydrostatik . . . 745

Laboulaye. Discours 19
Ladd, Ch. Solutions of questions . 87. 156. 179. 229. 463. 473. 539. 595 618. 635. 669. 685. 688

Seite

Lagarde, P. de. Woher stammt das x der Mathematiker 21
Lagarde, H. 1) Recherches analytiques sur la méthode de M. Thoulet 909
2) De l'évaluation de la conductibilité thermique par la mesure des temps pendant l'état variable 909
Lagrange, C. Exposition critique de la méthode de Wronski . . 749
Laguerre. 1) Sur la distribution dans le plan des racines d'une équation algébrique 54
2) Quelques équations transcendantes 57
3) Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière 57
4) Sur les fonctions du genre zéro et du genre un 57. 218
5) Quelques équations transcendantes 57. 217
6) Détermination du genre d'une fonction transcendante entière 57. 217
7) Sur la distribution dans le plan des racines d'une équation algébrique 366
8) Sur les hypocycles 541
9) Transformation par semi-droites réciproques 722
Laisant, A. 1) Théorie des régions et des aspects 151
2) Propriétés des centres de gravité 736
Lamb, H. 1) On the forces experienced by a solid moving in an infinite mass of liquid 778
2) Oscillations of a viscous spheroid 789
3) On the vibrations of an elastic sphere 823
Laplace. Oeuvres complètes 726
Laquière, E. 1) Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore 495
2) Sur un théorème de M. Laisant 736
3) Sur un théorème de Pappus 736
Lasswitz, K. Die Lehre von den Elment 25
Léauté, H. Sur les solides d'égale résistance 772
Léauté, A. Sur l'application de la résistance des matériaux . . . 825
Lebon, E. 1) Solution d'une question 492
2) Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second ordre 493
Lecher, E. Ueber Ausstrahlung und Absorption 829. 910
Ledieu, A. 1) Théorie vibratoire de la matière 727
2) Objections à la théorie de l'électricité 856
3) Conceptions rationnelles de la nature et de la propagation de l'électricité 859
4) Réponse aux objections de M. Decharme 859
5) Sur la théorie cinétique des gaz 902
6) Du cycle du raisonnement 31
7) Sur la théorie générale des unités 31
Legebeke, G. J. Eene eegenschap van de wortels eener afgeleide vergelijking 51
Legoux, A. 1) Application d'un déterminant 107
2) Stabilité de l'équilibre d'un point matériel 735
Lehmann, P. Tafeln zur Berechnung der Mondphasen 929
Lehmann-Filhés. Kritischer Beitrag zur Geschichte der meteorischen Astronomie 933
Lejeune-Dirichlet, P. G. Lezioni sulla teoria dei numeri . . . 115
Lemoine, E. Décomposition d'un nombre premier N 119
Lemonnier, H. 1) Conditions pour que deux équations différentielles linéaires aient p solutions communes 283
2) Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre 298

Seite

Leonhardt, G. 1) Integraleigenschaften der adjungirten Kegelfunctionen . . . 430
2) Grundzüge einer Dipolargeometrie . . . 588
Lerch, M. Ueber den Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ . . . 368
Letnikoff, A. V. Untersuchungen über trigonometrische Functionen . . . 206
Leudesdorf. Solution of a question . . . 493
Lévy, M. 1) Une extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité . . . 748
2) Mouvement de deux particules électrisées . . . 861
3) Solution pratique du problème du transport de la force à de grandes distances . . . 880
4) Sur la relation entre la force électromotrice d'une machine électrodynamique et sa vitesse de rotation . . . 880
5) Sur une communication de M. Deprez . . . 880
Lez, H. Solution of a question . . . 59
Lie, S. 1) Gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten . . . 234
2) Untersuchungen über Differentialgleichungen . . . 287. 288
3) Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten . . . 641
4) Bestimmung aller Flächen, die durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden . . . 642
5) Bestimmung von Raumcurven . . . 668
Lieber, H. Geometrische Constructionsaufgaben . . . 457
Liebisch, Th. Geometrische Krystallographie . . . 476
Ligowski, W. Zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades . . 56
Liguine, V. 1) Liste des travaux sur les ovales de Descartes . . 25
2) Les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe . . 730
Lilienthal, R. v. Schaaren sphärischer Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen sind . . . 399
Lindemann, F. 1) Das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen . . . 189
2) Ueber die Ludolph'sche Zahl . . . 369
3) Sur le rapport de la circonférence au diamètre . . . 369
4) Ueber die Zahl π . . . 369
5) Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini . . . 601
Lindstedt, A. Fresnel'sche Integrale . . . 836
Lindstedt. 1) Eine für die Störungstheorie wichtige Differentialgleichung . . . 926
2) Bemerkungen zur Integration einer gewissen Differentialgleichung 927
Lindhagen, A. Nic. Copperniei de hypothesibus motuum coelestium 11
Lionnet. Solution d'une question . . . 138
Lippich, F. Polaristrobometrische Methoden . . . 849
Lippmann, G. 1) Sur la théorie des couches doubles de M. Helmholtz . . . 867
2) Expressions générales de la température absolue . . . 890
Lipschitz, R. 1) Sur une communication de M. de Jonquières . . 119
2) Sur une intégrale . . . 228
3) Bestimmung von Oberflächen . . . 650
4) Sur le pendule . . . 759
Lisleferme, H. de. Note d'analyse géométrique . . . 232
Livenzoff, A. Ueber Maxima und Minima der einfachen bestimmten Integrale . . . 306
Löven, J. M. Om plana algebraiska kurvors rektifiabilitet . . . 579

Seite
Lommel, E. 1) Theorie der elliptischen Doppelbrechung 841
2) Zur Theorie des Lichtes 842
Lorentz, H. A. 1) Leerboek der differentiaal- en integraalrekening 201
2) Grondformules der electrodynamica 861
3) Over de bewegingen di onder den invlöd der zwaartekracht in eene gasmassa optreden 904
Lowry, W. H. Solution of a question 539
Lühmann, F. v. Geometrische Constructionsaufgaben 457

Macfarlane, A. 1) An analysis of relationship 29
2) Solutions of questions 156. 179. 195
Mach, E. Herrn Guébhard's Darstellung der Aequipotential-Curven 869
Machai, Y. Théorèmes d'électricité 863
MacMahon, P. A. 1) Sur un résultat de calcul obtenu par M. Allégret 385
2) Integration of an equation 385
3) The cassinian 626
Maggi, G. A Formole relative al calcolo degli errori d'osservazione 159
Mahler, E. 1) Beiträge zur Geschichte der Mathematik 23
2) Zur Theorie der Kegelschnitte 544
3) Zur Theorie der Curven grader Ordnung 544
4) Eine Curve vierter Ordnung 631
Malet, J. C. 1) On a class of invariants 270
2) On certain definite integrals 403
3) Solution of a question 618
Malmsten, C. J. Generalisering af det s. k. „Femtonspelet". (Boss puzzle) 150
Mandl, M. Jede Gleichung des n^{ten} Grades hat genau n Wurzeln . 46
Mannheim, A. 1) Premiers éléments de la géométrie descriptive . 479
2) Construire les axes d'une certaine ellipse 532
3) Détermination en un point d'une surface du second ordre des axes de l'indicatrice 554
4) Théorèmes de géométrie 623
5) Sur les surfaces homofocales du second ordre 685
6) Sur les centres de courbure principaux des surfaces homofocales du second ordre 686
Mansion, P. 1) Examen critique 32
2) Introduction à la théorie des déterminants 99
3) Cours d'analyse infinitésimale 200
4) Méthode dite de Fermat pour la recherche des maxima et des minima 205
5) Sur les cubatures et les quadratures approchées 231
6) Rapport sur une note de M. de Lisleferme 232
7) Principe fondamental relatif au contact de deux surfaces . . . 641
Marchand, J. Développement d'une fonction en série 183
Margules, M. 1) Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit 784
2) Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder 784
3) Bewegung zäher Flüssigkeiten 786
Marks, S. Solutions of questions 87. 138. 196. 619
Marsano, G. B. 1) Sul numero delle combinazioni a tre a tre dei successivi intieri 1, 2, 3, ..., B 147
2) Dimostrazione del parallelogrammo delle forze data dal R. P. G. Badano 732
Martin, A. Solutions of questions 146. 539
Martus, H. C. E. Mathematische Aufgaben 938

Seite
Masoni, U. Sopra alcune curve del quarto ordine 701
Mathieu, E. 1) Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss 276
2) Sur les coordonnées curvilignes 586
Matlister, D. 1) Solution of a question 156
2) On probability and listerism 176
Matthiessen, L. Antike Auflösung des sogenannten Restproblems 122
Matz. Solutions of questions 59. 156. 161. 179. 207. 222. 465. 618. 621. 625. 688
Matzka, W. Kritische Berechnungen der musikalischen Töne . . . 827
Maximowitsch, W. Interpolation der impliciten Functionen . . . 161
Maxwell, A. Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus . . 856
Mayenberg, J. Aufgaben der sphärischen Astronomie 918
Mayer, H. Ueber die von Guébhard vorgeschlagene Methode der Darstellung äquipotentialer Linien 869
McCay, W. S. Solution of a question 467
McColl, H. Solution of a question 179
McFarlane. On probability and listerism 176
McIntosh, A. Solutions of questions 625
McKenzie, D. J. Mc.G. Transformation of annuities 168
McKenzie, J. L. Solutions of questions 87. 625
McMurphy, A. 1) Solutions of questions 87. 196. 688
2) Solutions of questions 473. 539
Meech, L. W. 1) System and tables of life insurance 169
2) Complementary division 938
Meisel, F. Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel 855
Menger, J. 1) Lehrbuch der darstellenden Geometrie 480
2) Geometrische Formenlehre 480
Mensbrugghe, G. v. d. 1) Rapport sur un mémoire de M. Lagrange 749
2) Interprétation de l'effet d'une couche mince d'huile 826
Méray, Ch. Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré 130
Meyer, A. I hvad mon äro axiomerna erfarenhetssatzer 35
Meyer, M. S. Solutions of questions 207. 539. 689
Meyer, W. Ueber die Strahlenbrechung im Innern eines Cometen 934
M. K. Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades 55
Miassojedoff, A. N. Satz über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung 53
Michaelis, N. Th. Brugbalken van de tweede ordre 741
Michaelis, G. J. 1) Bewegingen van vloeistoffen 788
2) Theorie der elastischen Nachwirkung 801
Michelson, A. Sur le mouvement relatif de la terre et de l'éther 850
Migotti, A. Zur Theorie der Kreistheilung 127
Mildner, R. Ableitung neuer unendlicher Reihen 182
Milinowski, A. Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte 522
Miller, W. J. C. Solutions of questions 59. 179. 461. 625. 635
Minchin. Sätze über Rollcurven 637
Minich, S. R. Sulle equazioni di quinto grado 57
Minin, A. P. Eigenschaften der Zahlen, die den vollkommenen analog sind 120
Mitchell, O. H. 1) On determinants of powers 105
2) On partitions 117
Mittag-Leffler, G. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable 325

Seite

Möller, J. Transformation einer gewundenen Curve durch sphärische Inversion 577
Möllinger, O. Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojectionen . . . 495
Monteiro, A. Sch. 1) Sobre a divisão em partes eguaes da distancia entre dois pontos e da circumferencia empregando o compasso ordinatio 465
2) Sur la génération d'une conique au moyen du cercle ou d'une autre conique 527
Morawetz, J. Zur Reflexion und Refraction des Lichtes an Curven und Flächen 851
Morel. Solutions of questions 465. 466
Morera, G. Una formola di meccanica analitica 749
Moret-Blanc. 1) Solutions de questions 59. 138. 621. 634. 688
2) Démonstration des propositions de M. Lionnet 130
Morgan, C. Solutions of questions 161. 462. 635. 638
Morgenbesser, A. Die mathematischen Grundlagen des gesammten Versicherungswesens 163
Morley, F. Solution of a question 476
Morrison, J. 1) Integration of the general equations of motion . 751
2) On the compensation of the excentric anomaly 925
Morth. Solution of a question 138
Moser, K. Grundformeln der Dioptrik 853
Mott, J. P. On the solution of equations 55
Mouchez. Discours 14
Mounier, G. J. Eene byzondere eigenschap der quaternionen . . 591
Much. Erklärung 387
Muir, Th. 1) Solutions of questions 87. 138
2) Atreatise of the theory of determinants 100
3) The law of extensible minors in determinants 101
4) Transformations connecting general determinants with continuants 102
5) Circulants of odd order 102
6) A determinant formed by bordering the product of two determinants 107
7) On a symmetric determinant 108
8) Condensation of skew determinants 109

Nanson, E. J. 1) On the geometry of conics 620
2) On the potential of a uniform spherical shell 798
Narducci, E. Intorno a due trattati inediti d'Abaco 8
Nash. Solutions of questions 179. 229. 635
Nehls, Ch. Graphische Rectification von Kreisbögen 467
Netto, E. Substitutionentheorie 90
Newcomb, S. On the doctrine of limits 29
Nicolas, M. Étude des fonctions de Fourier 424
Nilman, G. Linearperspective 483
Nissen, J. H. Elementarmathematik 451
Niven, W. D. A method of approximating to the solution of electrostating problems 865
Nöther, M. 1) Zur Theorie der algebraischen Raumcurven . . . 669
2) Algebraische Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich selbst zulassen. Mit Nachtrag 719
Novarese, E. 1) Intorno ad alcune formole di Hermite 393
2) Intorno alla multiplicazione delle funzioni ellittiche 393
Nowosielski, F. Eigenschaften des Systems zweier oder mehrerer Kreise 467
Nowotny. Die Lösungen der Differentialgleichungen 233

Seite
Oberbeck, A. 1) Ueber die Bewegungen der Luft an der Erdoberfläche . . . 791
2) Ueber die Phasenunterschiede elektrischer Schwingungen . . . 871
3) Ueber elektrische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Phasen . . . 871
Ocagne, M. d'. 1) Sommation d'une série . . . 194
2) Développement des logarithmes et des exponentielles . . . 195
3) Mode de détermination des courbes planes . . . 730
4) Remarques sur le pendule . . . 753
O'Neil de Medeiros, J. C. Sobre um problema de algebra elementar . . . 190
Openshaw, T. W. Solution of a question . . . 621
Opitz, P. Sätze über Anziehung . . . 798
Oppermann, L. Om vor Kundskab om Primtallenes Mongde . . . 118
Oppolzer, Th. v. 1) Ueber eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsternis . . . 1
2) Ermittelung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen . . . 753
3) Lehrbuch der Bahnbestimmung der Cometen und Planeten. I. . 919
4) Syzygientafeln für den Mond nebst ausführlicher Anweisung für den Gebrauch derselben . . . 930
5) Lösung des Kometenproblems . . . 930
6) Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen beim Cometenproblem . . . 931
Orchard, H. L. Solutions of questions . . . 138. 471
O'Regan, J. Solutions of questions 59. 87. 146. 156. 463. 469. 470. 621
Orlow, G. Sur une intégrale double . . . 215

Padeletti, D. 1) Alcuni corollari di un teorema del prof. Fergola 401
2) Principii della teoria dei quaternioni . . . 594
3) Su un calcolo nella teoria delle dinami analogo a quello dei quaternioni . . . 595
Paige, C. Le. 1) Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables . . . 77
2) Sur les formes quadratiques à deux séries de variables . . . 77
3) Sur la forme quadrilinéaire . . . 77
4) Die $2k$-elementige centrale Gruppe einer Involution k^{ter} Stufe und $(2k+1)^{\text{ten}}$ Grades . . . 87
5) Sur l'involution biquadratique du troisième rang . . . 540
6) Die $2k$-elementige neutrale Gruppe einer Involution . . . 602
7) Représentation géométrique de deux transformations uniformes . 602
8) Transformations géométriques uniformes . . . 603
9) Mémoire sur les courbes du 3me ordre . . . 604
10) Essai de géométrie du 3me ordre . . . 605
11) Les courbes du 3me ordre . . . 605
Pánek, A. 1) Zur Auflösung einer Gleichung . . . 55
2) Geometrische Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . 179
Paraira, M. C. 1) Over de figuur, welke ontstaat, wanneer men op de sejden van een driehoek parallelogrammen beschrijft . . . 475
2) Een stereometrisch analogon van het theorema van Pappus . . 475
Pasch, M. 1) Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*) 197
2) Vorlesungen über neuere Geometrie . . . 498
3) Ueber projective Punktreihen . . . 507
4) Zur Kegelschnittstheorie . . . 615

*) Siehe unter Berichtigungen.

Seite

Peano, G. Sui sistemi di forme binarie di egual grado 74
2) Un teorema sulle forme multiple 75
3) Formazioni invariantive delle corrispondenze 721
Pechüle. Sur la favorabilité des stations relativement à l'ensemble des mesures micrométriques à faire pendant le passage de Vénus 933
Peirce, C. S. 1) Remarks 28
2) On a class of multiple algebras 89
3) On the relative forms of quaternions 594
Pellet, A. E. Sur les résidus cubiques et biquadratiques 123
Pelz, C. Zum Normalenproblem der Kegelschnitte 532
Pepin, Th. 1) Le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné 132
2) Théorèmes sur une équation indéterminée 133
3) Classification des formes quadratiques binaires 142
4) Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre 259
Perott, J. 2) Sur une arithmétique espagnole du 16me siècle . . . 10
2) Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières 366
3) Sur un théorème de Gauss 366
Perrin. 1) Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré 56
2) Sur le problème des aspects 152
Perry, H. M. 1) On singular solutions 250
2) Sur la future observation du passage de Vénus à Madagascar . 933
Peschka, G. A. V. 1) Darstellende und projective Geometrie 481. 500
2) Kotirte Projectionsmethode 482
3) Neue Eigenschaften der Normalenfläche 555
Petersen, J. 1) Om Primtal 119
2) Partielle Differentialligninger 289
3) Statik 731. 732
Peterson, K. M. Ueber Integration partieller Differentialgleichungen 363
Petzold, M. Constructive Lösung einer Aufgabe 493
Pfannenstiel, E. Bidrag till de liniära differentialeqvationernas teori 271
Pfeiffer, G. Formeln fur den Inhalt der Kegelfläche 214. 682
Philbrick, P. H Integration of some general classes of trigonometric functions 211
Piazza. Sulle corrispondenze (1,2) ed (1,3) 721
Picard, E. 1) Certaines formes quadratiques ternaires 79
2) Sur certaines formes quadratiques 79
3) Sur les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires 263
4) Sur l'intégration par les fonctions abéliennes de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre 290
5) Classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes 291. 350
6) Sur certaines fonctions uniformes de deux variables 335
7) Fonctions uniformes affectées de coupures 338
8) Sur un groupe de substitutions linéaires 350
9) Réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques . 403
10) Sur les équations différentielles abéliennes dans le cas de la réduction du nombre des périodes 406
11) Sur un théorème relatif à certaines surfaces 687
Picart, A. 1) Solution d'un problème de géométrie 459
2) Paraboloïdes du second ordre osculateurs aux surfaces 640
Pick, G. A. Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen 404

Seite

Picquet, H. Traité de géométrie analytique 582
Pincherle, S. Teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche 328
Pirmez, D. De l'unité des forces de gravitation et d'inertie . . . 32
Pitsch, J. Halbreguläre Sternpolyeder 448
Plarr, G. Establishment of the elementary principles of quaternions 319
Pleyl, J. Zur Cardioïde 626
Pocrovsky. Beziehungen zwischen den Moduln und ihren Complementären 398
Poincaré, H. 1) Extension de la notion arithmétique 139
2) Séries trigonométriques 185
3) Sur les fonctions fuchsiennes 255
4) Une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires 282
4) Les points singuliers des équations différentielles 284
5) L'intégration des équations différentielles par les séries 285
6) Sur les transcendantes entières 323
7) Théorie des groupes fuchsiens 338
8) Sur les groupes kleinéens 344
9) Sur les functions fuchsiennes 344
10) Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires 344
11) Sur les groupes discontinus 350
12) Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle 666
Polignac, O de. Solution of a question 613
Posse, K. A. Ueber die ϑ-Functionen von zwei Veränderlichen . 416
Prym, F. Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Characteristikentheorie 419
Puchta, A. Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten . 105

Quet. Sur les forces d'induction que le soleil développe dans les corps par sa rotation 886

Radau, R. 1) Remarques concernant le problème de Kepler . . . 921
2) Sur un point de la théorie des perturbations 924
Ramisch, A. Ueber sich in einem Punkte schneidende coordinirte Linien 521
Rasche, A. Untersuchung gewisser Flächen zweiten Grades . . . 552
Rausenberger, O. 1) Eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden 345
2) Zur Theorie der Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden 362
3) Periodische Functionen zweiter Gattung 363
4) Zur Theorie der elliptischen Functionen 378
5) Zur Theorie der Modulfunctionen 397
Rawson, R. 1) Solutions of questions 191. 271. 411. 412
2) On a transformation of Riccati's equation 972
Rayleigh, L. On the infinitesimal banding of surface of revolution 810
Razzaboni. Relazioni sopra una memoria del D. Besso 270
Réalis, S. 1) Solutions de questions 59. 138
2) Quelques intégrales indéfinies 211
Reeves, G. M Solutions of questions 463. 585. 635
Reggio, Z. Alcune ricerche sulle coniche 534
Řehořovský, W. 1) Borchardt's erzeugende Function 105
2) Tafeln der symmetrischen Functionen 114
Reidt, G. Trigonometrische Analysis planimetrischer Constructionsaufgaben 468

Seite

Reiff, R. Principien der neueren Hydrodynamik 774
Résal, H. 1) Sur l'application d'un théoreme de Poncelet 214
2) Applications du théorème de Savary 635
3) Correspondance 735
4) Formules approchées relatives à l'équilibre d'une position de chaîne 738
5) Sur la courbe synchrone de la cycloïde 754
6) Propriétés mécaniques de la lemniscate 755
7) L'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement du pendule 761
8) Détermination du niveau potentiel de l'ellipsoïde 798
9) Sur la théorie mathématique du jeu de billard 820
10) Sur le choc des corps imparfaitement élastiques 820
11) Du choc de deux sphères 820
12) Du choc de deux billes 820
13) De l'effet d'un coup de queue inclinée sur une bille 820
14) Remarque sur la théorie des chocs 820
15) Théorie de l'électrostatique 862
16) Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier . 949
Rethwisch, F. Der Irrtum der Gravitationshypothese 33
Reuschle, C. Die Deckelemente 489
Reye, Th. 1) Das Problem der Configurationen 546
2) Strahlensystem zweiter Klasse sechster Ordnung von der ersten Art 561
Ribaucour, A Étude des élassoïdes 708
Riccardi, P. Nota statistica di storia matematica 20
Ricci, G. Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti 886
Riecke, A. Pythagoras 2
Riemann, B. Partielle Differentialgleichungen 287
Rijn van Alkemade, A. C. van. De elliptische polarisatie bij de terugkaatsing van het licht etc. 845
Riley, R. E. Solution of a question 618
Rink, H. J. Applications géométriques simples du théorème d'Abel 604
Ritter, A. 1) Die Höhe der Atmosphäre 796
2) Ueber die Höhe der Atmosphäre und Constitution gasförmiger Weltkörper 900
Rive, L. de la. Étude sur la projection des angles 699
Roberts, W. R. W. 1) A geometrical representation of a system of two binary cubics 68
2) Solution of a question 539
Roberts, R. A. 1) On polygons circumscribed about a cuspidal curve 540
2) On tangents to a cubic forming a pencil in involution 606
3 Examples and problems on conics 610
4) Solution of a question 625
Rodrigues, J. M. Sobre a formula de Lagrange 184
Rosenberger, F. Die Geschichte der Physik 25
Rouché, E. 1) La méthode des isopérimètres 464
2) Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite 493
Rouget, Ch. Observations astronomiques sans mesure d'angles . 919
Rowe, R. C. 1) On a geometrical theorem 150
2) On Abel's theorem 409
3) On Mr. Taylor's six-point circle 461
Rowland, E. A. Relazione critica sulle varie determinazioni dell' equivalente meccanico della caloria 887

Seite

Rozé, C. Des termes à courte période dans le mouvement de rotation de la Terre 932
Rudel, K. Vom Körper höherer Dimension 437
Rüefli, J. Lehrbuch der ebenen Geometrie 454
Runge, C. Die linearen Relationen zwischen den verschiedenen Subdeterminanten symmetrischer Systeme 112
Rupp, O. Ueber die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln 553
Rusch. Zur Trisection 632
Russell, W. H. L. 1) On certain definite integrals 220
2) Certain geometrical theorems 603
Russell, J. W. Solution of a question 471
Rutter, E. Solutions of questions 59. 87. 138. 463. 467. 476. 619. 621. 635
Rychlicki, St. Beitrag zum Rationalmachen einer Summe von $2^{q\text{ten}}$ Wurzeln 366

Sachse, A. 1) Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten 110. 191
2) Eigenschaft des vollständigen Vierecks 463
3) Beweis zweier Sätze von Schlömilch 508
Saint-Germain, A. de. 1) Sur les équations de l'équilibre astatique 741
2) Extrait d'une lettre 798
Saint-Venant, de. 1) Des mouvements que prennent les diverses parties d'une liquide dans l'intérieur d'un verre ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice 779
2) Du choc longitudinal d'une barre élastique libre 817
3) Solution du problème du choc longitudinal 817
Saltel, L. Moyen d'étendre la théorie des imaginaires sans faire usage des imaginaires 317
Salvert, De. Mémoire sur les ombilics coniques 645
Sanat. Permutationen der Zahlen des dekadischen Systems 149
Sarkar, N. Solution of a question 621
Sauvage, L. Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes 243
Scott, R. F. 1) On some determinants where elements are rational fractions 106
2) On determinants 109
3) Some forms of cubic determinants 110
Scott, Ch. A. Solutions of questions 469. 539
Schäwen, P. v. 1) Analogien zwischen dem sphärischen und ebenen Dreieck 471
2) Die seitenhalbirenden Transversalen des sphärischen Dreiecks . 472
Scheffler, H. Die magischen Figuren 134
Scheibner. Ueber einige Arbeiten C. J. Jacobi's auf dem Gebiete der Störungstheorie 924
Schell, A. Der Einschneidetransporteur von V. von Reitzner . . . 915
Schelle, K. Lehrgang der populären Astronomie 917
Scheller, F. E. Theorie der geographischen Netze 496
Schier, O. Potenzsummen rationaler Zahlen 121. 190
Schiffner, F. Die Schraubenregelfläche 730
Schlegel, V. 1) Théorèmes de géométrie à n dimensions 434
2) Geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre 443
3) Sur un théorème de M. Laisant 736

Seite
Schlepps, F. Die Logarithmen 22
Schlömilch, O. 1) Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis 197
2) Ueber gewisse elliptische Integrale 380
3) Reihenentwickelung für gewisse hyperelliptische Integrale . . . 413
4) Zwei projectivische Sätze 507
Schmidt, A. Elemente der darstellenden Geometrie 480
Schmidt, G. 1) Analogien zwischen elektrischen und Wasserströmen 794
2) Ueber die innere Pressung und die Energie überhitzter Dämpfe 895
Schmidt, Th. Untersuchungen über innere Reibung von Flüssigkeiten 787
Schmitz, A. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien . 35
Schnell. Harmonische Teilung und consonirender Dreiklang . . . 828
Schöffler, B. Synthetische Theorie der Curven zweiter Ordnung . 525
Schols, Ch. M. 1) Le calcul de résistance et de l'azimut au moyen de la longitude et de la latitude 912
2) Studien over kaartprojectien 915
Schottky, F. Eindeutige Functionen mit linearen Transformationen 345
Schoute, P. H. 1) Deux cas particuliers de la transformation birationnelle 519
2) Over een paar met elkaar samenhangende involutorische birationale transformaties 520
3) Théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques 579
4) Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères 620
Schreiber, O. Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz 914
Schröder, E. Die Anzahl der Substitutionen, welche in eine gegebene Zahl von Cyklen zerfallen 96
Schröter, H. 1) Eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species 566
2) Geometrischer Satz 533
3) Cyklische projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen 548
Schubert, H. 1) Beweis des Feuerbach'schen Satzes 460
2) Zahl der Bilder bei einem Winkelspiegel 466
3) Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems 509. 571
4) Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformation der Ebene 515
Schülke, A. Die Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressiblen Flüssigkeit 779
Schumann, Ad. 1) Ein Beweis für ein Theorem von Liouville . 361
2) Wechselbeziehung zwischen einem Satze von Chasles und von Steiner 531
3) Allgemeine Beziehung zu fünf Punkten des Raumes 548
Schumann, H. Lehrbuch der Planimetrie 453
Schur, F. Besondere Classe von Flächen vierter Ordnung 564
Schwarz, H. A. Démonstration d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires 367
Schwering, K. 1) Ueber die fünften Potenzreste 121. 122
2) Zur Theorie der algebraischen Functionen 128
Sebert et Hugoniot. 1) Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques 815
2) Sur le choc longitudinal d'une tige élastique 815

Seite
Sebert et Hugoniot 3). Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques 815
Seidelin, C. Om Konstruktion af Tangenter til Róringskurven . . 640
Seitz. Solutions of questions 156. 161. 179
Selby, A. L. Solutions of questions 476. 621
Selivanoff. Sur les intégrales définies uniformément convergentes 215
Sepp, B. Zu Posidonius Rhodius 7
Serdobinsky, V. E. Zur Determinantentheorie 109
Sexe, S. A. Skul de des ikke lade sig finde et reellt mathematisk Udtryk 30
Seydler, A. 1) Zur Theorie der complanaren Biquaternionen. . . 596
2) Einleitung in die theoretische Physik 724
Sharp, W. J. C. 1) Solutions of questions 59. 87. 138. 151. 196. 476. 539. 595. 613. 618. 621. 625. 638. 689
2) On the invariants of certain orthogonal transformations 802
Siacci, F. Gli assi statici di un sistema di forma invariabile . . . 740
Siebel, A. Ueber algebraische Gleichungen 55
Silva, D. L. P. da. 1) Derivadas de ordem qualquer de y em ordem a x quando è $f(x, y) = 0$ 203
2) Sobre alguns integraes indefinidos 211
Šimerka, W. Die Kraft der Ueberzeugung 28
Simony, O. 1) Neue mathematische Erfahrungssätze 30
2) Ueber Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen etc. entstehen 444
3) Ueber eine Reihe neuer Tatsachen aus dem Gebiet der Topologie 444
4) Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze 444
5) Lösung einer Aufgabe 446
Sinram, Th. 1) Zur Gleichung dritten Grades 56
2) Zur Lösung von Gleichungen höheren Grades 57
Smolik, F. Elemente der darstellenden Geometrie 480
Sohncke, L. Ableitung des Grundgesetzes der Krystallographie . . 801
Spitzer, S. Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen 280
Spottiswoode, W. 1) Note on: Certain definite integrals of Mr. Russell 220
2) Note on Mr. Russell's paper 604
3) On the polar planes of four quadrics 699
Sprung. Zur Theorie atmosphärischer Wirbel 793
Stahl, W. Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades 563
2) Das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Classe . . . 562
Stammer. Geometrischer Ort der Punkte, von welchen aus zwei feste Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen 631
Stankewitsch, B. Zur Theorie der Congruenzen 124
Staude, O. 1) Fadenconstruction des Ellipsoides 686
2) Geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid 686
Steen, A. 1) Om Anvandelsen af delvis Integration 212
2) Om et bestemt Integral som diskontinuert Function 221
3) Integration af en lineär Differentialligning 375
Stefan, J. 1) Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken 897
2) Ueber die magnetische Schirmwirkung des Eisens 882
3) Die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes . . . 883

Seite
Steiner, J. Gesammelte Werke 18
Steinschneider, M. Sur les tables astronomiques attribuées à Pierre III. d'Aragon 9
Steinthal, A. E. Solution of a differential equation 274
Stelzel, K. Grundzüge der graphischen Statik 741
Stéphanos, C. 1) Relation entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes binaires biquadratiques 521
2) Propriétés métriques et cinématiques d'une sorte de quadrangles conjugués 727
Stern, M. A. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen 191
Stickelberger, L. Differentiation der elliptischen Functionen . . 388
Stieltjes, T. J. jr. 1) Over het quadratische rest-karakter van het getal 2 122
2) Bijdrage tot de theorie der derde-en veerde-machts-resten . . . 123
3) Over eenige theorema's omstrent oneindige reeksen 181
4) Over Lagrange's interpolatie formule 185
5) Over een algorithmus voor het meetkundig midden 191
6) Bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie 202
7) Over de transformatie van eene periodiche functie 365
8) Sur un théorème de M. Tisserand 923
Stockwell, J. M. On Mr. Hill's review of the theory of moons motion 929
Stoll. Zur Tangentenconstruction der Astroide 545
Stolp, C. De elliptische integralen van de eerste soort 379
Stolz, O. 1) Zur Geometrie der Alten 23. 437
2) Zur Theorie der elliptischen Functionen 387
Story, W. E. 1) On the non-Euclidian trigonometry 439
2) On a system of conchordal conics 607
3) Analytical proof of some properties of binodal quartics . . 607. 621
Streissler, J. Construction der gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte 535
Stringham, W. J. Determination of finite quaternion groups . . . 320
Struve, K. Elemente der Mathematik 452
Struve, H. 1) Fresnel's Interferenz-Erscheinungen 834
2) Einfluss der Diffraction an Fernröhren 836
Stuart, G. A. Reduction of integrals of a certain form 376
Study, E. Ueber Distanzrelationen 437
Studnička, F. J. 1) Rein analytischer Beweis eines Satzes von Bolzano 45
2) Mathematische Geographie 917
3) Ueber Primzahlen 118
Sturm, R. 1) Ueber reciproke Verwandschaften 509
2) Ueber das Geschlecht von Curven auf Kugeln 578
Suter, H. Unbekannte Schrift des Nic. Oresme 9
Sutton, W. Institute of actuaries 164
Swift, C. H. Solution of a question 635
Sykora, A. Enveloppe einer Geraden 611
Sylvester, J. J. 1) On the completion of a method of obtaining the groundforms to any binary quantic 72
2) On Subinvariants 72
3) A word on nonions 88
4) Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires . . 99
5) Properties of a split matrix 103
6) On Chrocchi's theorem 114
7) On a question in partitions 117

Seite

Sylvester, J. J. 8) Geometrical treatment of a theorem in numbers 117
9) Solutions of questions 138
10) On a logical problem connected with assecurances on joint lives 169
11) On mechanical involution 834
12) A certain integrable class of differential and finite difference equations 285
13) Theory of simultaneous linear differential equations 285
Symons, E. W. Solutions of questions 87. 146. 471. 473. 476. 618. 619. 635. 638

Tanner, W. L. 1) Solutions of questions 178. 196. 669
2) The coordinates of a plane curve in space 585
Tannery, P. 1) Sur le système astronomique d'Eudoxe 2
2) Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules 3
3) Aristarque de Samos 4
4) Critique ancienne d'une démonstration d'Archimède 6
5) Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus 7
Tannery, J. 1) Sur les intégrales eulériennes 225
2) Rectification 225
Tarry, G. 1) Propriétés générales de trois figures semblables . . 458
2) Relation entre sept points quelconques d'une section conique . 530
Taylor, C. Solution of a question 621
Taylor, H. M. 1) On a geometrical theorem 150
2) On a six-point circle connected with a triangle 461
Taylor, W. W. Solution of a question 138
Tchébycheff. Ueber die Functionen, die für gewisse Werte der Variabeln wenig von Null abweichen 364
Tebay, S. Solutions of questions 156. 161. 621
Teixeira, F. G. L'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre 298
Terry, T. R. Solutions of questions . 87. 161. 179. 193. 196. 222. 463. 466. 471. 473. 619
Tesař, J. Kinematische Bestimmung der Contour einer veränderlichen Schraubenfläche 495
Tessari, D. Applicazioni della geometria descrittiva 483
Tetmajer, L. Culman's bleibende Leistung 20
Thiele, T. N. Ueber Prof. Gyldén's intermediäre Bahnen 928
Thieme, H. 1) Zur Geometrie des Tetraeders 549
2) Zur Construction des Polarsystems einer Fläche 3ter Ordnung . 558
Thirion, J. Comptes rendus 917
Thomae, J. 1) Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe 193
2) Ueber specielle elliptische Functionen 380
3) Elliptische Integrale zweiter Gattung 381
4) Integrale zweiter Gattung 418
Thomson, J. J. 1) Note on an integral 223
2) On the vibrations of a vortex ring 776
Tilšer, F. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie 479
Tisserand, F. Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes 925
Tognoli, O. Sulla teoria delle involuzioni 574
Tonelli. Sopra la funzione potenziale in uno spazio di *n* dimensioni 797
Torelli, G. Sui determinanti circolanti 103

Seite
Townsend. 1) Solutions of questions 539. 618. 626. 635
2) On the atriphthaloid and atriphthalid of Dr. Haughton 633
3) On a property in the theory of the irrotational strain of an incompressible lamina in the plane of its mass 775
Tresca. Théorie de la résistance des étoffes 824
Treutlein, P. Elementar-Geometrie 454
Tricht, van. Examen critique 32
Trudi, N. Intorno ai corollari del prof. Padelletti 401
Tucker, R. 1) Solutions of questions 146. 473
2) The radial of an ellipse 634
Turaza, D. G. Bellavitis 20
Turrell, J. H. Solution of a question 635
Turriff, G. Solutions of questions 59. 87. 476

Ungar, M. Reduction Abel'scher Integrale auf Normalintegrale . . 403

Vályi, J. Die Flächen, deren sämmtliche Normalen eine Kugelfläche berühren 692
Vaneček 1) Die Transversalen in vollständigen Vielecken und Vielseiten 526
2) Génération des surfaces et des courbes à double courbure . . 576
3) Sur un mode de transformation des figures dans l'espace . . . 575
4) Sur l'inversion générale 602
5) Sur l'inversion générale 723
Veltmann, W. 1) Die Fourier'sche Reihe 185
2) Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function . . . 322
3) Zur Theorie der Punktmengen 322
Veltzer, G. A. v. Transformation of determinants of equal value . 101
Veronese, G. 1) Dei principali metodi in geometria 478
2) Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni 478
Vianna, M. da T. P. Influencia das cargas un movimento sobre as nigas rectas 824
Vietor, A. Die harmonische Configuration 24_4 547
Villarceau, Y. 1) Sur „Science de l'ordre" 29
2) De la nécessité d'introduire certaines modifications dans l'enseignement de la mécanique 37
Villicus, F. Ganzzahlige Verhältnisgruppen in der Alligationsrechnung 131
Vogler, A. 1) Grundzüge der Ausgleichungsrechnung 157
2) Die Grundzüge der Ausgleichungsrechnung 914
Vogt, H. Die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren . . 550
Voigt, W. 1) Formeln für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten 811
2) Volumen- und Winkeländerung krystallinischer Körper 813
3) Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe 813
4) Bemerkungen zu Herrn Lommels Theorie der Doppelbrechung . 843
5) Theorie der elektrochemischen Experimente des Herrn Guébhard 869
Volkmann. P. 1) Molecularanziehung von Flüssigkeiten 825
2) Zum absoluten Maasssystem 859
Vonderlinn, J. Geometrische Beleuchtungsconstructionen 484

Waitz, K. Ueber die Diffusion der Gase 908
Walecki. Équation en s de degré m 107

Seite

Walker, G. F. 1) Solutions of questions . 138. 179. 462, 539. 618. 619. 621. 625. 685
2) Two constructions for drawing spheres to touch four given spheres 473
3) Solutions of questions 87. 207. 307. 473. 595. 606
4) On a certain inequality and a limit 192
5) Proof of the addition theorem for elliptic integrals of the second kind 392
6) On the covariant locus of the vertex of a pencil of tangents on a cubic involution 606
Wallentin, F. Lehrbuch der Arithmetik für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen 938
Walter, A. Ueber die molecular-kinetischen Gesetze der Verdampfungswärme 892
Walton, W. 1) Method of finding maxima and minima of functions 205
2) Determination of the maxima and minima of a function 205
Warburg, E. und L. von Babo. Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichtigkeit bei flüssigen Körpern 905
Wassmuth, A. 1) Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung 884
2) Ueber den inneren Zusammenhang einer Anzahl von elektromagnetischen Erscheinungen 884
3) Ueber elektromagnetische Tragkraft 885
4) Ueber die specifische Wärme des stark magnetischen Eisens . 897
5) Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung 899
Webb, R. R. 1) Stress and strain 805
2) On the equilibrium of a bent plate 809
Weber, H. 1) Beweis eines Satzes 141
2) Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen . . 352
Weber, H. Der Rotationsinductor 874
Websky. Methode einen Normalenbogen zu berechnen 478
Weierstrass, K. 1) Recherches sur les fonctions $2r$-fois périodiques de r variables 325
2) Zur Theorie der elliptischen Functionen 387
3) Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen 415
Weilenmann, A. Der geometrische Unterricht in Mittelschulen . 36
Weiler, A. Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen 713
Weiler. 1) Bemerkung zu einem Aufsatz in No. 2383 928
2) Nachträge zu der Abhandlung über das Problem der drei Körper 928
Weill. 1) Sur un certain triangle 470
2) De l'involution de plusieurs points sur une conique 537
3) Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale 603
4) De l'involution de plusieurs points sur une conique 615
5) Sur certains polygones 675
Weingarten, J. Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen 661
Weiss, M. Ueber einige Abel'sche Gleichungen vom sechsten Grade 50
Wenck, J. Die synthetische Geometrie der Ebene 499
Wenzel, E. Zurückführung der schiefen Ebene auf den Hebel . . 733
West, E. Exposé des méthodes en mathématiques 233

Seite
Weyr, Ed. 1) Perott's Beweis, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist 117
2) Zahlentheoretischer Satz 120
3) Integration von rationalen Differentialausdrücken 298
Weyr, Em. 1) Ueber cyklische Projectivität 508
2) Sulle curve gobbe razionali 569
3) Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubi-schen Curve 570
4) Sur les surfaces d'involution 570
Wiedemann, E. Sulle storia delle scienze naturali presso gli Arabi 11
Wiedemann, G. Die Lehre von der Electricität 857
Wiegand, A. Analytische Geometrie 669
Wiener, Ch. Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven 546
Wilkinson, M. M. U. 1) Formulae arising from the differentiation of elliptic functions 390
2) Some elliptic function formulae 525
3) The addition equation for the elliptic and Θ-functions 286
Willis, S. N. Solution of a question 403
Wilson, J. R. Solution of a question 621
Winckler, A. Entwickelung einiger von dem Euler'schen Integrale zweiter Gattung abhängiger Reihen 228
Winterberg Der Tractat Franco's von Lüttich: „De quadratura circuli" 8
Withworth, W. A. Solutions of questions 138. 146. 463
Witkowski, A. Einfluss der Deformation auf die elektrische Leitungsfähigkeit 871
Wittstein, Th. 1) Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate 157. 158
2) 5-stellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln 939
Wittwer, W. C. Grundzüge der mathematischen Chemie 939
Wolf. Beitrag zur Invalidenfrage 172
Wolstenholme. 1) Solutions of questions 221. 466. 613 619 620. 621. 635
2) Two notes 222
3) Determination of the real foci and of the vector equation of the pedal of a given ellipse 628
4) Determination of the foci of the pedal of a given parabola . . 629
Wood, D. V. 1) Limits 29
2) Solution of a problem 637
Woodcock, T. Solutions of questions 59. 539. 425. 635
Woodward, R. S. On the actual and probable values of interpolated values 161
Workman, W. P. On tac-loci 249
Wright, T. W. On the computation of probable errors 160
Wüllner, A. Zur Dispersion farblos durchsichtiger Medien 846

Young, J. Solutions of questions 463. 465. 539. 635

Zaijck. Lehrbuch der praktischen Messkunst 914
Zdrahal, A. Eigenschaft der Binomialcoefficienten 190
Zenger, K. V. 1) Auflösung numerischer Gleichungen 55
2) Berechnung des Endomersionsobjectives 854
3) Dioptrische Studien 854
4) On the solution of Keplers problem 921
5) Solution rapide du problème de Kepler 922
6) Tables pour calculer l'anomalie vraie 922

Seite

Zenger, K. V. 7) Solution du problème de Kepler pour des excentricités considérables 922
Zeuthen, H. G. 1) Fra Mathematikens Historie 4
2) Bevis for en Konstruktion af Chasles 532
3) The mekanisk Konstruktion of Descartes' Ovales 627
4) Om stationäre kurver i el System 597
5) Elementär Behandling af et Par Sätninger om et Punkts Bevägelse 750
6) Om mekanisk Konstruktion af Descartes' Ovaler 627
Zimmermann, O. Aufgaben über Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt 539
Zuckermann, B. Jüdische Zeitrechnung 27

Berichtigungen.

Band XIV.

Seite 14 Zeile 3 von unten füge hinzu: „Mathesis II, 243-245“.
„ 32 „ 9 „ oben lies „Lesage“ statt „Lagrange“.
„ 87 „ 7 „ „ „ „Marks“ statt „Marcks“ und „Buck“ statt „Busk“.
„ 99 „ 8 „ unten „ „Anhang“ statt „Anfang“.
„ 197. Gegen unser sonstiges Princip ist es leider vorgekommen, dass in dem Referat über das Lehrbuch des Herrn Pasch die Grenzen einer rein sachlichen Besprechung überschritten worden sind. Wir heben bei dieser Gelegenheit noch einmal hervor, dass die Verantwortung hierfür ganz allein dem Herrn Referenten anheimfällt.
Seite 309 Zeile 8 von oben lies „Laupp“ statt „Laapp“.
„ 365 „ 15 „ „ „ „de periodicke“ statt „der periodiche“
„ 365 „ 20 „ „ „ „$n = 2$“ statt „$n = z$“.
„ 367 „ 1 „ „ „ „2“ statt „1“.
„ 368 „ 1 „ unten „ „Referat im folgenden Bande“.
„ 379 „ 1 „ oben „ „de“ statt „der“.
„ 398 „ 7 „ unten „ „sn yu“ statt „sin $8n$“.
„ 414 „ 5 „ „ „ „Multiplicatorgleichungen“ statt „Multiplicationsgleichungen“.
„ 416 „ 12 „ oben „ „Elliot“ statt „Elliott“.
„ 430 „ 10, 7, 5 und 3 von unten lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„ 431 „ 6 und 14 von oben lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„ 431 „ 1 von unten lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„ 520 „ 16 „ „ „ „transformaties“ statt „transformatics“.
„ 547 „ 11 „ oben „ „Vietor“ statt „Victor“.
„ 802 „ 13 „ „ „ „Castigliano“ statt „Castegliano“.
„ 848 „ 11 „ „ „ „licht“ statt „lieht“.





